

## Tema 3

# Interpolación Polinomial

### Introducción

En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico. Investigamos un fenómeno que se está desarrollando ante nuestros ojos, queremos estudiarlo, y junto con los modelos previos con que contamos, podemos tomar muestras experimentales. Tenemos una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo. [Naturalmente hemos hecho una cantidad finita de mediciones.] Queremos extraer información de esos datos. Esencialmente podemos tratarlo con

1/ técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones)

2/ o bien "intentandorecrear/reconstruir el fenómeno en su totalidad (en un "dominio continuo de espacio, tiempo o cualquier otra magnitud), con la función que represente "lo mejor posible" esos datos.

Obsérvese que no se habla necesariamente de ajuste perfecto a los datos obtenidos (de hecho, es posible que por los aparatos de medición y sus usuarios haya errores de medición, redondeo, truncamiento... que no controlemos siquiera con exactitud la escala de tiempo o cualquier otra magnitud que haya sido usada como variable independiente...)

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

a) Curvas de ajuste: cálculo de funciones aproximadas a los datos que tenemos (en algún sentido, para cierta distancia), e

b) Interpolación: cálculo de funciones que pasan ("interpolan"es el término matemático) exactamente por los puntos señalados.

La opción a) será tratada en un contexto lineal en la parte de Álgebra (Tema 2), y por las cuestiones de errores comentadas antes, será, en general, más deseable que la segunda (de hecho esta vía se usa también en estadística cuando se calcula la recta de regresión, otro modo de hablar de la recta de mínimos cuadrados).

No obstante, la opción b) también tiene utilidad, como veremos por ejemplo al tratar la integración numérica (Tema 4 de Cálculo), aunque con ciertos matices técnicos que precisaremos al final del presente tema.

**Interpolar una función**  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un conjunto abierto  $D$  y en un conjunto de  $n + 1$  puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset I$  es encontrar otra función  $\Phi$  de manera que sobre estos puntos, la nueva función tome los mismos valores que la función original. Es decir, verificando

$$\Phi(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En concreto el problema que planteamos es el siguiente. Consideremos una familia de funciones  $\Phi$  reales de variable real  $x$  que dependa de  $n + 1$  parámetros,  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . La describimos de la forma  $\Phi = \Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ .

**El problema de interpolar consiste en determinar estos  $n + 1$  parámetros de manera que para los  $n + 1$  pares ordenados  $(x_i, f_i)$  con  $i = 0, \dots, n$  se verifique**

$$\Phi = \Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Existen motivos técnicos (fuera del objetivo de este curso), modelado que usamos en el problema, tipo de soluciones que se quieren buscar con un mejor ajuste, desarrollo por ejemplo en series de Fourier, o economía de cálculo, entre otros, que nos llevan a usar diferentes tipos de interpolación, dependiendo del tipo de función  $\Phi$  que queramos utilizar:

- Interpolación polinómica:  $\Phi$  es una función polinómica de  $x$ , es decir

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

- Interpolación racional:  $\Phi$  es una función racional (cociente de polinomios) de  $x$ , es decir

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

- Interpolación exponencial:  $\Phi$  es una combinación lineal de exponenciales reales, es decir

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) = a_0e^{b_0x} + a_1e^{b_1x} + a_2e^{b_2x} + \dots + a_n e^{b_nx}.$$

con  $b_i \neq b_j$  si  $i \neq j$  con  $i, j = 1, \dots, n$ .

- Interpolación trigonométrica:  $\Phi$  es una combinación lineal de exponenciales imaginarias, es decir

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1e^{ix} + a_2e^{2ix} + \dots + a_n e^{nix}.$$

con  $i = \sqrt{-1}$ . Recordemos que por la fórmula de Euler se tiene que  $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$ .

En este tema estudiaremos la interpolación polinómica.

### 3.1. Existencia de polinomio de interpolación

El problema de la interpolación tiene propiamente tres cuestiones:  
 Saber si tiene solución o no.  
 En caso de tenerla, ¿dicha solución es única o existen varias?  
 Y finalmente métodos de cálculo lo más eficientes posibles.

A este respecto en interpolación polinómica tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.** *Supongamos conocido el valor de una función  $f(x)$  en un conjunto de puntos distintos dos a dos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Entonces, existe un único polinomio  $P(x) \in \mathfrak{R}_n[x]$  (esto es, polinomios de grado menor o igual que  $n$ ) que interpola a la función en esos puntos, es decir,  $P(x_i) = f(x_i)$  con  $i = 0, \dots, n$ .*

La prueba más directa (con el coste de unos leves conocimientos de álgebra) consiste en plantear el sistema lineal de ecuaciones (ahora las incógnitas son los coeficientes del polinomio  $P$  buscado) y darse cuenta de que es un sistema compatible determinado al tener matriz de coeficientes de tipo Van der Monde (con los  $x_i$  distintos dos a dos) y por tanto invertible.

Otra forma inmediata de ver la unicidad de solución al problema consiste en imaginar la existencia de dos polinomios  $P$  y  $Q$  de grado  $n$  satisfaciendo la tesis del teorema. Entonces  $P - Q$  es otro polinomio de grado  $n$  con  $n + 1$  ceros, y eso conduce inevitablemente a que  $P - Q \equiv 0$ .

Completamos este razonamiento con dos respuestas (en las siguientes secciones) de existencia de solución, ambas constructivas.

### 3.2. Interpolación de Lagrange.

Este método es el más explícito para probar existencia de solución ya que la construye. Sin embargo su utilidad se reduce a eso: a dar una respuesta formal y razonada, pues no es eficiente en términos de cálculo (requiere muchas operaciones y tiene limitaciones técnicas que después nombraremos).

Para calcular el polinomio interpolador  $P(x)$  asociado a una tabla de datos  $(x_i, f_i)$  con  $i = 0, \dots, n$  podemos plantearnos una simplificación previa: ¿qué ocurre si construimos polinomios  $l_i(x)$  de grado  $n$  que valgan 1 en el nodo  $x_i$  y 0 en el resto?

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Es inmediato que con esto se resuelve el problema original, tomando la suma de esos  $n + 1$  polinomios de grado  $n$  (con coeficientes adecuados):  $P(x) = \sum_{k=0}^n f_k \cdot l_k(x)$ .

¿Es posible encontrar tales  $l_i(x)$ ? Si damos el polinomio factorizado para que tenga en cada nodo  $x_j$  (con  $j \neq i$ ) una raíz, el candidato es

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j).$$

Lo único que no conseguimos es que en  $x_i$  valga 1, para ello hay que “normalizar” la función anterior.

Así, finalmente la fórmula de interpolación de Lagrange es

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f_k \cdot l_k(x), \quad l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Los polinomios  $l_k(x)$  reciben el nombre de polinomios de Lagrange.

**Ejemplo 2.** Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 que interpola los siguientes datos:

$x_i$	1	3	5	6
$f_i$	$\frac{2}{3}$	1	-1	0

La ventaja de este método es que es directo:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{2}{3} \frac{(x-3)(x-5)(x-6)}{(1-3)(1-5)(1-6)} + \frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(3-1)(3-5)(3-6)} \\ &\quad - \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(5-1)(5-3)(5-6)} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(6-1)(6-3)(6-5)} \\ &= (x-6) \left( \frac{2}{3} \frac{(x-3)(x-5)}{-40} + \frac{(x-1)(x-5)}{12} + \frac{(x-1)(x-3)}{8} \right). \end{aligned}$$

Por contra, tiene un inconveniente y es que la forma obtenida es mala para operar: para sumarlo con otra función, para derivar, integrar, etc. Por lo que la respuesta es sólo formal y hay que realizar mucho cálculo para obtener la expresión final en la forma  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  (aquí, hasta  $n = 3$ ).

De hecho hay otro inconveniente, más sutil que el anterior.

Es natural que en el contexto de mediciones y experimentos que nombrábamos en la introducción del tema se incorporen nuevos datos. ¿Qué ocurre si nos dan otro dato más  $(x_{n+1}, f_{n+1})$ ? A través de esta vía ¡hay que construir todos los polinomios de Lagrange de nuevo! (lo realizado antes es trabajo inútil).

Ambos motivos nos conducen a replantear el problema por otra vía más eficiente.

### 3.3. Polinomios de interpolación con diferencias divididas de Newton

Cualquier polinomio de  $\mathfrak{R}_n[x]$  se puede expresar en forma única como una combinación lineal de los monomios  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ , pues son evidentemente sistema generador y además linealmente independientes (luego forman una **base** del espacio vectorial), la más simple de hecho, la base canónica.

Esta base, que es adecuada para algunas manipulaciones inmediatas de polinomios como nombrábamos en la sección anterior (derivación e integración por ejemplo), no es, sin embargo, la más adecuada para construir en principio el polinomio interpolador.

Vimos que resultaba útil incluir los propios nodos del problema en los polinomios a construir, de modo que en este párrafo adoptamos una solución intermedia: expresaremos el polinomio  $P(x)$  que interpola a las abscisas  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , como una combinación lineal del siguiente conjunto de polinomios  $\{\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x)\}$  siendo

$$\begin{aligned}\Psi_0(x) &= 1, \\ \Psi_1(x) &= (x - x_0), \\ \Psi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\ \Psi_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \\ &\vdots \\ \Psi_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}),\end{aligned}$$

Este conjunto es otra base del espacio de  $\mathfrak{R}_n[x]$  por tener  $n + 1$  elementos linealmente independientes (obsérvese que con este método cada problema requiere una base distinta, en función de los nodos  $x_i$  que nos dan, y que el cálculo de cada  $\Psi_j$  sirve para el siguiente.)

Antes de desarrollar el método en abstracto, recuperamos el ejemplo anterior a modo introductorio:

**Ejemplo 3.** *Dados los pares*

$x_i$	1	3	5	6
$f_i$	$\frac{2}{3}$	1	-1	0

usamos en  $\mathfrak{R}_3[x]$  la siguiente<sup>1</sup> base  $\{1, x - 1, (x - 1)(x - 3), (x - 1)(x - 3)(x - 5)\}$ .

Buscamos un polinomio  $P(x) = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)(x - 3) + c_3(x - 1)(x - 3)(x - 5)$  tal que  $P(x_i) = f_i$  para  $x_0, \dots, x_3$ . La elección de esta base nos permite hallar los coeficientes  $c_i$  directamente ya que en cada paso conocemos todos los coeficientes que aparecen menos el último:

$$\begin{aligned}P(1) &= \frac{2}{3} && \Rightarrow c_0 = \frac{2}{3}, \\ P(3) &= 1 && \Rightarrow c_0 + c_1(3 - 1) = 1 && \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6}, \\ P(5) &= -1 && \Rightarrow c_0 + 4c_1 + 8c_2 = -1 && \Rightarrow c_2 = -\frac{7}{24}, \\ P(6) &= 0 && \Rightarrow c_0 + 5c_1 + 15c_2 + 15c_3 = 0 && \Rightarrow c_3 = \frac{23}{120}.\end{aligned}$$

Por tanto  $P(x) = \frac{2}{3} + \frac{x - 1}{6} - \frac{7}{24}(x - 1)(x - 3) + \frac{23}{120}(x - 1)(x - 3)(x - 5)$ .

No podemos evitar tener que operar un poco para llegar a expresar el polinomio en la base canónica:

$$P(x) = \frac{23}{120}x^3 - \frac{121}{60}x^2 + \frac{689}{120}x - \frac{13}{7}.$$

Pero los cálculos son menos que los realizados con los interpoladores de Lagrange.

Es más, si tuviéramos un nodo más en la lista, no resulta inconveniente para el método empleado, se ampliaría la base con el elemento  $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 6)$  y se escribiría la siguiente igualdad  $P(x_4) = f_4$  para despejar  $c_4$ .

---

<sup>1</sup>Obsérvese que es indiferente que los nodos estén ordenados o no por sus valores.

Damos a continuación un algoritmo (que da título a la sección) que permite calcular directamente los  $c_j$  sin necesidad de plantear las igualdades  $P(x_j) = f_j$ . El polinomio interpolador (para el problema general) se expresa de la forma

$$P(x) = \sum_{j=0}^n c_j \Psi_j(x).$$

Imponiendo ahora las condiciones de interpolación  $P(x_i) = f_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  llegamos a un sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes  $c_j$ , es decir

$$\sum_{j=0}^n c_j \Psi_j(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

En dicho sistema lineal la matriz del sistema  $A = (a_{ij}) = (\Psi_j(x_i))$  es triangular inferior, puesto que

$$\Psi_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \implies \Psi_j(x_i) = \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = 0 \quad \text{si } i \leq j - 1.$$

Como hemos visto en el ejemplo, es directo resolver el sistema lineal por sustitución hacia adelante. Obtenemos los coeficientes  $c_j$  y comprobamos trivialmente que  $c_0$  sólo depende de  $f_0$ ,  $c_1$  sólo de  $f_0$  y  $f_1$ ,  $c_2$  sólo de  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$ , y así sucesivamente. Una forma de indicar esta dependencia es mediante la siguiente notación: definimos

$$c_j := f[x_0, x_1, \dots, x_j], \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n$$

que se conocen como **diferencias divididas de  $f$** . En concreto, el polinomio interpolador adopta la forma

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Veamos un ejemplo para el caso de interpolación de Newton con dos abscisas  $x_0$  y  $x_1$ . El polinomio interpolador de grado uno se puede escribir de la forma

$$P(x) = c_0 \Psi_0(x) + c_1 \Psi_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

de manera que interponiendo las condiciones de interpolación  $P(x_i) = f_i$  para  $i = 0, 1$ , obtenemos el sistema triangular inferior siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned} c_0 &:= f[x_0] = f_0. \\ c_1 &:= f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

El *método de Newton de las diferencias divididas* nos permite calcular los coeficientes  $c_j$  de la combinación lineal mediante la construcción de las llamadas *diferencias divididas* que vienen definidas recurrentemente de la manera siguiente

$$f[x_i] = f_i.$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}.$$

Tenemos los siguientes casos particulares:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

El esquema del proceso descrito anteriormente para el cálculo de las diferencias divididas en el caso  $n = 3$  es el siguiente

$x_0$	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
$x_1$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
$x_3$	$f[x_3]$			

Los coeficientes necesarios para dar el polinomio de interpolación están al principio de cada columna.

Veámoslo una vez más sobre el ejemplo de partida:

1	2/3			
		1/6		
3	1	-7/24		
		-1	23/120	
5	-1	2/3		
		1		
6	0			

Recalcamos que Método de las Diferencias Divididas de Newton para el cálculo del polinomio interpolador es más ventajoso que el de Lagrange en el sentido de que si añadimos más puntos de interpolación, podemos aprovechar el trabajo realizado anteriormente ya que lo único que debemos hacer es completar el esquema de diferencias divididas para calcular los coeficientes que faltan. Esto es, hemos encontrado un modo eficiente de resolver los inconvenientes que planteaba la anterior vía.

### 3.4. Análisis del error

Cuando interpolamos una función  $f(x)$ , nos interesa tener un criterio que nos permita en cierta medida conocer la *proximidad* entre la función  $f(x)$  y su polinomio interpolador  $P(x)$ .

En la práctica se trata de dar una estimación a priori sobre el parecido del polinomio interpolador obtenido a partir de las mediciones hechas, y el fenómeno real (representado aquí por  $f$ , aunque propiamente no la conozcamos).

A este respecto se tiene el siguiente resultado, que nos dice que si tomando cierto número de puntos de interpolación el factorial “vence” a la función (y sus derivadas, es decir, que tengamos una cota) y al producto de los nodos indicado, entonces la aproximación será buena [recíprocamente, para funciones poco regulares, o que oscilen mucho y no haya buenas cotas de sus derivadas, la función  $f$  y el polinomio interpolador no serán parecidos].

**Teorema 4.** *Sea  $f$  una función de clase  $C^{n+1}([a, b])$ , y sea  $P$  un polinomio de grado menor o igual que  $n$  que interpola a la función  $f$  en los siguientes  $n + 1$  puntos distintos dos a dos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, para cualquier  $x \in [a, b]$ , existe un punto  $\xi_x \in (a, b)$  tal que*

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

La prueba es simple, y merece ser comentada aunque sólo sea para ver una aplicación del Teorema de Rolle visto en el Tema 1 (una función derivable que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo tiene un cero de la derivada en su interior).

Tomamos la función

$$q(\xi) = (f(\xi) - P(\xi)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) + (P(x) - f(x)) \prod_{i=0}^n (\xi - x_i),$$

que tiene  $n + 2$  ceros, los nodos de interpolación, y el punto de abscisa  $x$ . Por tanto posee  $n + 1$  intervalos donde aplicar el resultado anterior, y así mismo la derivada tendrá  $n$  intervalos donde repetir el razonamiento... los puntos concretos no los conocemos ni los necesitamos para establecer el resultado. Simplemente repetimos  $n + 1$  derivadas (recuérdese que la variable es  $\xi$ ) llegando con  $q^{(n+1)}(\xi_x) = 0$  [la derivada  $n + 1$  de un polinomio de grado  $n$  es cero, y la de un polinomio de grado  $n + 1$  de coeficiente líder 1 es  $(n + 1)!$ ] a la tesis anunciada.

En general, no es aconsejable efectuar interpolación polinómica con muchas abscisas de interpolación  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (el resultado previo nos exigiría un gran control sobre la función y muchas de sus derivadas). Una de las razones de esta afirmación es la siguiente. Supongamos que la función  $f(x)$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y que  $P_n(x)$  es su polinomio interpolador en las abscisas  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ . Entonces, en general no es cierto que se verifique la convergencia puntual siguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

C. Runge propuso en 1901 el siguiente ejemplo: Sea  $P_n(x)$  el polinomio interpolador sobre  $n + 1$  abscisas equiespaciadas de la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  en el intervalo  $[-5, 5]$ . Entonces  $P_n(x)$  converge puntualmente cuando  $n \rightarrow \infty$  hacia  $f(x)$  si  $|x| < 3,63\dots$  y diverge en caso contrario.

Una conclusión interesante (y práctica en el análisis numérico) es por tanto la contraria: en vez de tomar muchos nodos sobre un único intervalo en el que generar un único polinomio

de interpolación, elegir muchos intervalos menores (así se controla el término del producto) y pocos nodos en cada uno de ellos (para no tener que exigir muchas cotas a las derivadas), generando polinomios a trozos. Esto será particularmente útil a la hora de planificar la integración numérica (integración compuesta).

**Nota 5 (Errores relativo y absoluto).** *Aunque hasta ahora los resultados sobre error se han referido al **error absoluto**, es decir, la diferencia total entre el valor verdadero y el aproximado, a veces, un valor relativo entre ese error ejercido y el valor real mejora la visión sobre la aproximación aplicada: no es lo mismo un error de 2 unidades cuando el valor exacto de la función es 2, que cuando el valor es 2000. Llamaremos **error relativo** al cociente del error total entre el valor exacto.*