

# Dificultades para establecer analogías apropiadas entre problemas de ciencias: diferencias entre estudiantes y profesores en formación

Vicente Sanjosé<sup>1</sup>, Carlos B. Gómez-Ferragud<sup>2</sup>, Joan Josep Solaz-Portolés<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Valencia. <sup>2</sup>FloridaUniversitaria.

## RESUMEN

Se muestra un estudio empírico para analizar en qué características se basan los estudiantes de Secundaria, y de Máster en Profesor de Educación Secundaria, para codificar problemas y detectar sus analogías en tareas de categorización (*sorting*). Se utilizaron técnicas cuantitativas y cualitativas combinadas. Primero se analizó cómo los estudiantes de secundaria son influidos por diferentes variables características de problemas de ciencias. Una gran proporción de sujetos no fue capaz de percibir las analogías y diferencias adecuadas entre problemas. El Nivel Académico y la Familiaridad con las temáticas fueron factores significativos, pero los futuros profesores participantes mostraron demasiadas dificultades, alertando sobre la conveniencia de revisar algunos supuestos instruccionales habituales.

**Palabras clave:** Resolución de Problemas de Ciencias. Superficie y Estructura de problemas. Familiaridad con la temática. Analogías entre Problemas. Categorización de problemas.

## INTRODUCCIÓN

En Educación Secundaria un modo frecuente de instruir en resolución de problemas se basa en la ‘transferencia analógica’ (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2012; Bernardo, 2001): típicamente, el profesor resuelve un conjunto de problemas basados en algún procedimiento, principio, ley o teorema y, a continuación, propone problemas ‘análogos’ a aquellos para que los estudiantes intenten resolverlos (Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Gick y Holyoak, 1980). Aunque los mecanismos cognitivos de la Transferencia no son bien conocidos, desde la Teoría de los Componentes Idénticos de Thorndike (Thorndike y Woodworth, 1901; Gentner, 1983), se acepta que uno de los elementos esenciales de este proceso es el reconocimiento de elementos comunes entre las situaciones conocidas y la nueva.

La pregunta es, ¿sobre qué rasgos se puede codificar y construir analogías entre problemas con enunciado? En este trabajo consideraremos tres factores característicos de un problema verbal algebraico: a) su superficie (incluyendo la Familiaridad con la temática); b) su estructura algebraica; y c) su incógnita. Los dos primeros fueron descritos por Holyoak (1984) y Novick (1988). La pregunta o incógnita de un problema influye directamente en la dificultad del problema y condiciona el proceso de resolución (Hiebert, 1982). Hay evidencia de que los estudiantes con bajo conocimiento previo y pericia focalizan su atención en la incógnita (Castro, Rico, Batanero y Castro-Martínez, 1991), e incluso es frecuente el uso de la estrategia de trabajar “hacia atrás” (Chi, Glaser y Rees, 1982), comenzando por la incógnita y retrocediendo paso a paso hasta encontrar los datos del problema. Es de esperar que las relaciones entre la incógnita y el resto de cantidades afecten la resolución de un problema, ya que ello configura la estructura del mismo.

El propósito del presente trabajo es estudiar cómo diferentes características definitorias de los problemas con enunciados de ciencias, afectan a su codificación y a las analogías entre ellos

percibidas por estudiantes de distinto nivel académico. Las situaciones problemáticas científicas involucran entidades usualmente menos familiares para los estudiantes que las situaciones de la vida ordinaria, cotidiana. Una temática poco familiar para un estudiante podría dificultar la representación mental de la situación descrita y, con ello, dificultar también la activación de esquemas abstractos apropiados para resolver correctamente un problema. De hecho, se ha probado que la representación mental de conceptos y procesos abstractos es distinta que la de conceptos y procesos de naturaleza concreta (Otero y Mateus, 2011). La comparación entre ambos tipos de situaciones, en igualdad del resto de factores, debe arrojar luz sobre esta conjetura.

Si se toman colecciones adecuadas de problemas, la tarea de categorizarlos a partir de la lectura de sus enunciados puede ser utilizada para evaluar si los resolutores son capaces de categorizar problemas según su estructura, como hacen los expertos, o no pueden ir más allá de sus características superficiales (Chi, Feltovich y Glaser 1981; Sanjosé, Solaz-Portolés y Valenzuela, 2009).

## **MÉTODO**

### **Diseño**

La tarea propuesta fue la de agrupar colecciones de problemas según el modo en que se resuelven. Se siguió una metodología mixta en dos fases: análisis cuantitativo (descriptivo, y contrastes pertinentes) y análisis cualitativo (entrevistas semi-estructuradas). Las variables consideradas fueron las características de los problemas suministrados. Además, se consideraron los efectos de una mayor o menor Familiaridad de los resolutores con el contexto de los problemas, y también los efectos del nivel académico, ligado al conocimiento previo y la experiencia resolviendo problemas. La Familiaridad (Baja: Ciencias/Alta: Vida diaria) fue un factor intra-sujetos mientras que el Nivel Académico (Secundaria/ Master de Secundaria) fue un factor entre-sujetos.

### **Participantes**

En el estudio participaron 118 estudiantes españoles de ambos sexos. De ellos, 69 pertenecían a 3 grupos intactos, dos de 3º ESO y uno de 4º ESO, de dos centros educativos distintos en dos poblaciones de más de 20000 habitantes. El resto fueron 49 graduados universitarios, futuros profesores en formación docente inicial. Aunque se trató de una muestra de conveniencia, ésta no presentó ninguna característica diferencial con el resto de sus poblaciones.

### **Materiales empleados**

Se diseñaron dos colecciones, cada una de 8 enunciados de problemas algebraicos, cuya resolución implica un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas en todos los casos. En una colección, las superficies implicaron temáticas científicas consideradas de Baja Familiaridad para los estudiantes. En estos problemas se procuró reducir al mínimo las diferencias entre problemas, escogiendo objetos y eventos de fácil representación mental para los estudiantes, de modo que las diferencias superficiales se concentrasen en las magnitudes implicadas al tratar como ‘fenómenos’ dichos eventos. En la otra colección, los enunciados de los problemas incluyeron objetos, eventos y situaciones de la vida diaria, es decir, contextos de Alta Familiaridad para los estudiantes.

Los 8 problemas de cada colección se configuraron a partir de un diseño factorial  $2 \times 2 \times 2$  con 3 factores: a) Superficie (temática): mecánica/térmica o piscinas/ahorros); b) Estructura: se consideraron dos estructuras correspondientes a dos ecuaciones que se pueden representar por dos rectas que se cortan, con pendientes del mismo signo o de distinto signo; denominamos estas estructuras ‘Alcanzar’ y ‘Encontrar’ respectivamente, en reconocimiento a los clásicos problemas de móviles que, bien circulan por la misma ruta y en el mismo sentido y uno alcanza al otro en un punto, o bien se mueven en sentidos opuestos y se encuentran en un punto de la ruta; y c) Incógnita del problema. Otros elementos importantes, como las cantidades dadas como datos, y las variables sintácticas, fueron fijados para minimizar su impacto. Las colecciones de problemas pueden verse en el Anexo.

Se elaboraron dos cuadernillos, uno para Alta y otro para Baja Familiaridad. Cada cuadernillo incluyó, por orden, las instrucciones, un ejemplo de práctica y los 8 enunciados de los problemas para realizar la tarea. Los alumnos debían dibujar diagramas de Venn con los problemas correspondientes en su interior, identificados por su número en el listado suministrado. El ejemplo consistió en un ejercicio sencillo de práctica de la tarea principal.

En Secundaria se controló el conocimiento mínimo necesario para acometer la tarea propuesta en ambos estudios mediante una prueba consistente en 5 problemas sencillos, cuya solución exigía plantear un sistema de ecuaciones lineales. Cinco participantes de secundaria resolvieron correctamente menos de 3 problemas en esta prueba. Se consideró que no disponían de conocimiento previo suficiente para abordar la tarea y sus datos fueron excluidos de los análisis posteriores.

### Análisis: posibles analogías entre problemas

La Tabla 1 muestra los criterios usados para las agrupar problemas en la condición de Baja Familiaridad (ciencias). Cada criterio se puede asociar unívocamente a una agrupación determinada. Como puede verse, aparecieron dos criterios de agrupación focalizados en la incógnita. Uno de ellos utiliza el tipo o nombre de la magnitud involucrada; el otro usa el rol o carácter de la incógnita como variable independiente (x) o dependiente (y) en las ecuaciones lineales que se han de plantear.

Crterios simples	Crterios compuestos	
<b>A. Según la Estructura</b>	<b>B. Según Estructura X Rol de la Incógnita</b>	
Estructura-Alcanzar → {2, 4, 5, 7}	Alcanzar x Rol-x → {1, 8}	Encontrar x Rol-x → {4, 5}
Estructura-Encontrar → {1, 3, 6, 8}	Alcanzar x Rol-y → {3, 6}	Encontrar x Rol-y → {2, 7}
<b>C. Según la Temática</b>	<b>E. Según Temática X Nombre de la Incógnita</b>	
Contexto Mecánico → {2, 3, 5, 8}	Térmico x Calorías → {1, 4}	Termod. x Litros → {6, 7}
Contexto Termodinámico → {1, 4, 6, 7}	Mecánico x Litros → {2, 3}	Mecánico x Gramos → {5, 8}
<b>D. Según el Nombre de la Incógnita</b>	<b>G. Según Estructura X Temática</b>	
Volumen (litros) → {2, 3, 6, 7}	Alcanzar x Termod. → {4, 7}	Alcanzar x Termod. → {4, 7}
Masa (gramos) → {5, 8}	Alcanzar x Mecánico → {2, 5}	Alcanzar x Mecánico → {2, 5}
Calor (calorías) → {1, 4}		
<b>F. Según el Rol de la Incógnita</b>	<b>H. Otros criterios inidentificables</b>	
Rol de Incógnita es "x" → {1, 4, 5, 8}	Respuestas incompletas, incoherentes o inidentificables	
Rol de Incógnita es "y" → {2, 3, 6, 7}		

Tabla 1. Relación entre agrupaciones y criterios vinculados con los distintos factores característicos de los problemas. Ejemplo para Familiaridad Baja. El número de cada problema corresponde al que tiene asignado en el listado del Anexo.

Para validar los materiales, la codificación y el procedimiento, se utilizó un grupo de 7 profesores universitarios, todos ellos expertos en resolución de problemas. Primero, 2 de ellos propusieron algunas modificaciones en la redacción de algunos problemas. Después, otros 5 realizaron la tarea de agrupación. Todos utilizaron la estructura algebraica como criterio (criterio A en la Tabla 1).

### Procedimiento

Se usaron 3 sesiones. En la primera se realizó el test de conocimientos mínimos (15 min.; sólo en Secundaria). A continuación se repartieron los cuadernillos. Cada alumno recibió solo un cuadernillo en una de las dos condiciones de Familiaridad consideradas. El reparto se hizo contrabalanceando los cuadernillos de Baja y Alta Familiaridad. Se leyeron las instrucciones en voz alta, se explicó la tarea de agrupación, y se realizó y discutió el ejemplo de práctica (10 min.) junto con los estudiantes. Luego, los alumnos realizaron sin ayuda la tarea de agrupación y la entregaron en la hoja correspondiente (25 min.). En la segunda sesión cada alumno realizó la tarea en la condición de Familiaridad que le faltaba. De este modo, se procuró reducir globalmente los posibles efectos del orden de realización de la tarea en las dos condiciones de Familiaridad. Una tercera

sesión se dedicó a entrevistar un subconjunto de estudiantes. Estas entrevistas se realizaron 4-5 días después de la tarea de agrupación, de modo individual, y en un espacio con privacidad. Fueron grabadas con permiso para su posterior transcripción y análisis. Se siguió un procedimiento semi-estructurado consistente en: a) recordatorio de la agrupación de problemas; b) entrega de la agrupación realizada por el entrevistado; y c) demanda de revisión, confirmación o rectificación, explicación y clarificación del criterio empleado para agrupar problemas que “se resuelven con las mismas ecuaciones”. No se limitó el tiempo de la entrevista y se procuró la total explicitación de las analogías entre problemas percibidas por cada alumno. En ningún caso se proporcionó la respuesta correcta ni se emitió juicio alguno sobre la ejecución del alumno.

## RESULTADOS

Primero se analizaron las posibles diferencias entre los estudiantes de 3º y 4º de ESO en la tarea. Distintas pruebas  $\chi^2$  mostraron que no hubo ninguna asociación significativa entre curso y criterio de agrupación ( $p > .40$  en todos los casos). Por ello, se colapsaron ambos cursos en todos los análisis posteriores. La Figura 1 muestra, y permite comparar, los porcentajes de estudiantes de Secundaria y de Máster cuyas agrupaciones en Baja (ciencias) y Alta Familiaridad (vida diaria) pueden asociarse con cada uno de los criterios expuestos en la Tabla 1.

Los porcentajes de alumnos de Máster que usaron el “criterio experto” (criterio A en Tabla 1) no son muy diferentes de los de Secundaria, tanto en Baja como en Alta Familiaridad, e incluso son menores. Sin embargo, más estudiantes del Máster usaron el criterio Rol X Estructura, (criterio B en Tabla 1), que no es el elegido por los expertos, pero que puede considerarse correcto. En efecto, este criterio puede suponer una aplicación más estricta del significado “se resuelven igual” al incluir no sólo las ecuaciones, sino también el modo en que éstas se resuelven para obtener el valor de la incógnita (despejando la variable “x” o la “y”). Si se colapsan estos dos criterios considerados correctos de acuerdo con la tarea propuesta, encontramos el resultado mostrado en la Tabla 2.

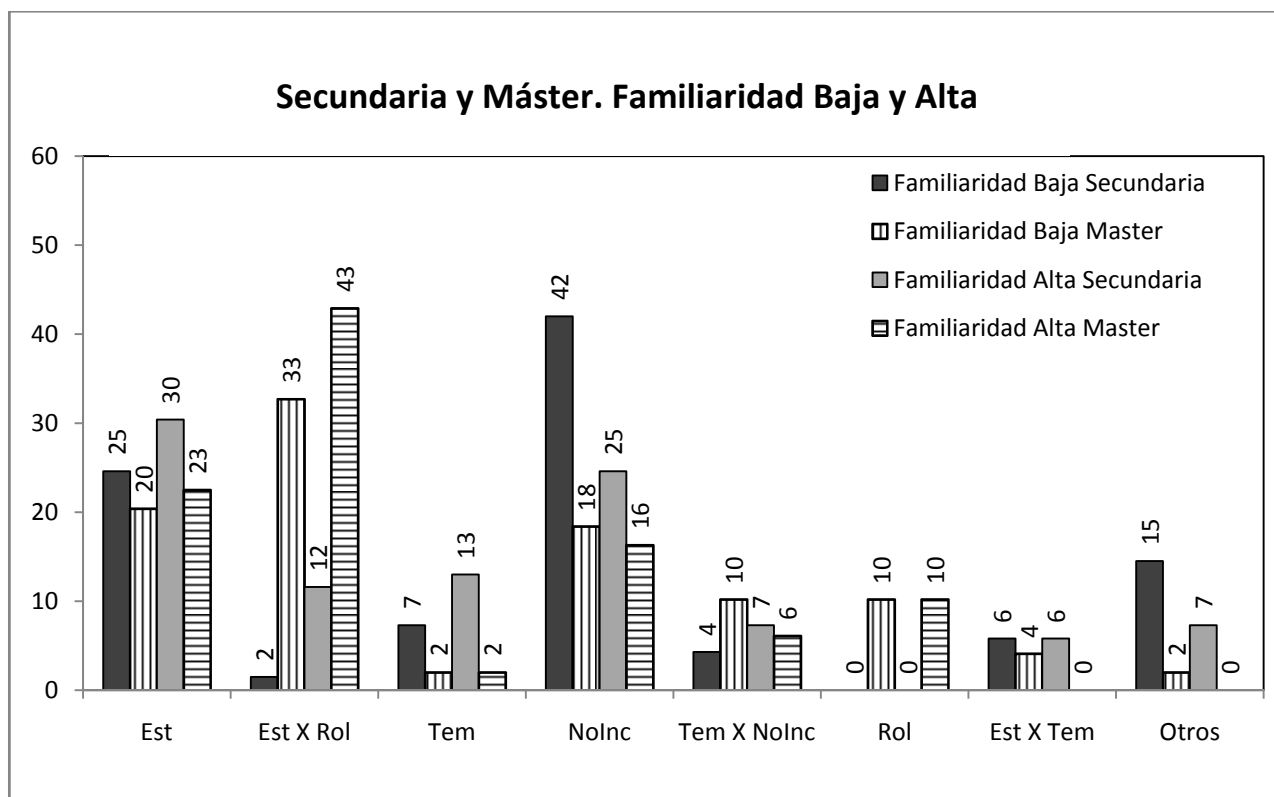


Figura 1. Porcentaje de participantes que utilizaron cada uno de los criterios para agrupar problemas. ‘Est’ alude a “estructura”, ‘Rol’ al rol, x o y de la incógnita, ‘Tem’ abrevia la palabra “temática” y ‘NoInc’ significa “nombre de la incógnita”.

% alumnos	Secundaria	Máster
<b>Baja Fam</b>	26,1	53,1
<b>Alta Fam</b>	42,0	65,4

Tabla 2. Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio estructural correcto para agrupar problemas de Baja y Alta Familiaridad.

Como muestra la Tabla 2, en Familiaridad Alta los porcentajes de estudiantes que son capaces de establecer analogías estructurales correctas entre problemas son significativamente mayores que en Familiaridad Baja (McNemar:  $X^2 = 6,919$ ;  $p = ,009$ ). También el nivel académico es importante y se asocia significativamente con un criterio correcto, tanto en Familiaridad Baja ( $X^2(1) = 7,799$  con corrección de Yates;  $p = ,005$ ), como en Alta ( $X^2(1) = 5,320$  con corrección de Yates;  $p = ,021$ ).

También analizamos el uso de criterios de clasificación basados solamente en rasgos superficiales, como la temática o el nombre de la magnitud incógnita, o su combinación (criterios C, D y E en Tabla 1). La Tabla 3 recoge los porcentajes de alumnos de cada nivel que usaron este tipo de criterios en ambas Familiaridades.

% alumnos	Secundaria	Máster
<b>Baja Fam</b>	53,6	30,6
<b>Alta Fam</b>	44,9	24,4

Tabla 3. Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio superficial incorrecto para agrupar problemas de Baja y Alta Familiaridad.

Hubo significativamente más estudiantes que utilizaron un criterio basado en rasgos superficiales en Familiaridad Baja que en Alta (McNemar:  $X^2 = 6,323$ ;  $p = ,012$ ). El nivel educativo también tuvo influencia, ya que un porcentaje significativamente menor de alumnos de Máster que de Secundaria, usaron criterios superficiales en ambos niveles de Familiaridad, Baja ( $X^2(1) = 13,090$  con corrección de Yates;  $p < ,001$ ), o Alta ( $X^2(1) = 7,989$  con corrección de Yates;  $p = ,005$ ).

Para aumentar la fiabilidad de nuestra interpretación sobre los criterios utilizados por los estudiantes, un subconjunto de 15 estudiantes de ambos niveles educativos fue entrevistado sobre cada una de las agrupaciones realizadas en ambos niveles de Familiaridad. La Tabla 4 muestra fragmentos de entrevistas realizadas a dos estudiantes de Secundaria y a dos de Máster sobre la tarea en Baja Familiaridad (ciencias). Algunos estudiantes propusieron varias alternativas en sus agrupaciones. Entonces la entrevista sirvió para explicar de nuevo la tarea y pedirles que escogieran aquella que les parecía la apropiada. En todos los casos se alentó a los estudiantes a re-pensar su agrupación y se esperó a que ‘estabilizaran’ su criterio. La Figura 1 anterior recoge los resultados tras las entrevistas, con los criterios estabilizados.

---

#### Segmentos de información de entrevistas

---

##### Caso #3. Secundaria

I: Hola, Buenos días. [El entrevistador entrega la agrupación]. ¿Podrías intentar recordar tu agrupación?

S: Si... [El estudiante repasa el cuadernillo]

I: Voy a intentar ayudarte a recordar. La tarea os pedía que agruparais los problemas en función de si se resolvían del mismo modo, es decir, con idénticas ecuaciones. ¿Puedes volver a pensar en ello y explicármelo para que yo comprenda bien?

S: Si no he entendido mal, ¿te he de decir qué problemas se resuelven con las mismas ecuaciones?

I: ¡Exactamente!

S: Bien! ... [El sujeto relee de nuevo sus respuestas....] Ya lo tengo claro: los problemas que preguntan por “gramos” tendrán las mismas ecuaciones y así igual con las “calorías” y el “volumen”. (...)

---

##### Caso #6. Secundaria

I: Hola, ¿qué tal? [El entrevistador entrega la agrupación y solicita aclaración]. No he entendido bien tu respuesta. Primero indicas que hay unos problemas de  $\text{cm}^3/\text{g}$  y otros problemas de  $\text{cm}^3/\text{cal}$  [criterio basado en la temática].

Luego expresas que hay unos problemas donde dos globos aumentan de volumen y otros problemas donde un globo aumenta y el otro disminuye [que tiene que ver con la estructura]. Finalmente realizas la agrupación en función de si la pregunta se refería a los “gramos”, a las “calorías” o al “volumen” [nombre de la incógnita]. ¿Recuerdas?

---

---

S: Sí, lo recuerdo bien

I: Veo que has reconocido varias características que diferencian los problemas, pero lo que yo necesito saber es cuál crees que hace que los problemas de un mismo grupo se resuelvan igual, con las mismas ecuaciones.

S: Entonces, ¿he de elegir sólo un criterio?

I: ¡Sí, exacto! Te dejo un tiempo para que vuelvas a pensar en la tarea y recuerda que lo que pretendo es que los agrupes en función de si se resuelven exactamente con las mismas ecuaciones.

S:[*El estudiante repasa sus respuestas*] Yo creo que lo importante para que sean las mismas ecuaciones es que los dos globos aumenten o que uno aumente y el otro disminuya...[*se decide finalmente por el criterio estructural*]

---

#### **Caso #4. Máster**

I: Hola, Buenos días. [*El entrevistador entrega la agrupación*]. ¿Recuerdas como clasificaste los problemas?

S: ... [*El estudiante repasa su agrupación*]

I: Recuerda que la tarea pedía agrupar los problemas en función de si estos se resuelven con idénticas ecuaciones o no...

S: Yo me fijé en cómo se resolvía el problema, en que el problema se resolviera igual independientemente de si el problema me preguntaba por volúmenes o por gramos...

Lo hice así: [*El sujeto utiliza el criterio de agrupación basado en la Estructura X el Rol de la incógnita; B en la Tabla 4*].

I: Muy bien, muchas gracias.

---

#### **Caso #11. Master**

I: Hola, ¿qué tal? [*El entrevistador entrega la agrupación*]. Me gustaría que recordaras la tarea que hiciste.

S: Claro, aunque creo recordarla bastante bien...[*El estudiante repasa su agrupación*]... Si, ya lo recuerdo...

Agrupé los problemas según preguntaban por volumen, por calorías o por la cantidad de gramos.....

I: Y, ahora que puedes volver a pensarlo, ¿sigues pensando lo mismo?

S: [*El estudiante repasa la tarea*]... quizá con el volumen se pueda calcular la cantidad de calorías pero yo en aquel momento no recordaba cómo se calculaba un volumen... [*El estudiante piensa*]...Al final aquí lo que es importante es que pregunta por el volumen [*El estudiante insiste en el criterio Superficial basado en el nombre de la Incógnita*]

---

*Tabla 4. Ejemplos de entrevistas realizadas a los estudiantes de Secundaria y del Máster tras la tarea de agrupación para clarificar las analogías que establecieron entre los problemas de Baja Familiaridad.*

*S: Estudiante; I: Entrevistador.*

## **CONCLUSIONES**

Aunque las muestras de conveniencia utilizadas en los dos estudios expuestos no permiten generalizar o concluir de modo general, podemos subrayar algunos aspectos que merecen especial atención desde la didáctica de las ciencias. Los resultados obtenidos no son tan buenos como se desearía, e invitan a formular conjeturas o hipótesis para explicarlos. Una primera conjetura es, naturalmente, que los rasgos superficiales, explícitos y de naturaleza ontológica concreta, son mucho más fáciles de reconocer que los abstractos, implícitos propios de la ciencia. El mejor desempeño en la tarea de los estudiantes de Máster en ambos niveles de Familiaridad (problemas con temáticas de la vida diaria o científicas), indica que un conocimiento previo elevado y una cierta experiencia resolviendo problemas podrían ser necesarios para salvar el ‘efecto de apantallamiento’ que los rasgos superficiales de los problemas producen sobre los estructurales (Chi, Feltovich y Glaser., 1981) como anunciaron Reeves y Weisberg (1994). Disponer de poco conocimiento previo sobre la situación descrita en el enunciado puede dificultar la representación ‘concreta’ (no abstracta) de la situación y, con ello, obstaculizar la representación matemática del problema. En otros estudios se encontró apoyo empírico a esta afirmación (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013). Sin embargo, los porcentajes de estudiantes de Máster (entre 35% y 45%) que no fueron capaces de establecer analogías estructurales, o que utilizaron criterios superficiales en este estudio (entre 25% y 30%) son inquietantes, especialmente al tratarse de futuros profesores en Secundaria. Estrictamente hablando, sólo entre el 20% y el 23% utilizaron un “criterio experto”, basado sólo en la estructura algebraica de los problemas para codificarlos y clasificarlos. Además, los alumnos de Máster, supuestos expertos y futuros profesores, fueron sensibles a la Familiaridad y en contextos de ciencias manifestaron dificultades imprevistas. Estos bajos porcentajes suscitan la duda de si estos futuros profesores serán capaces de instruir a sus estudiantes de una forma eficaz en resolución de problemas verbales.

Finalmente, no se puede excluir la posibilidad de que la instrucción recibida por los estudiantes (¿de cualquier nivel educativo!) no atienda suficientemente a las analogías y diferencias, superficiales y estructurales, entre problemas. Los materiales instruccionales en ciencias suelen estar secuenciados según las temáticas, mientras que en matemáticas suelen estar secuenciados por las estructuras subyacentes. Además, en muchas ocasiones, las historias o situaciones de los enunciados de problemas de matemáticas, sobre todo en niveles no superiores, suelen pertenecer al ámbito de la vida diaria, y, por tanto, estas situaciones son de Alta Familiaridad para los estudiantes. En todo caso, muchos profesores suponen que las analogías estructurales entre problemas son fácilmente percibidas por sus estudiantes, cuando no es así (Oliva, 2004), pero esto puede significar que no trabajen suficientemente con sus alumnos las tres fases que preceden a la ejecución de una resolución: a) el reconocimiento de características constitutivas del problema propuesto; b) su clasificación dentro de una clase de problemas, y c) la activación, bien de un esquema resolutivo de cierta generalidad, previamente elaborado (relacionado con el ‘transfer vertical’ de Rebello Cui, Bennett, Zollman, y Ozimek, 2007), o bien de un análogo previamente aprendido y almacenado en la memoria del resolutor (relacionado con un ‘transfer horizontal’; Rebello et al. opus cit.).

Atravesar las barreras entre temas en las clases de ciencias, o incluir contextos científicos en las clases de matemáticas, parece conveniente para ayudar a los estudiantes menos expertos a ir más allá de los rasgos superficiales y crear vínculos más profundos entre problemas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Castro, E.; Rico, L.; Batanero, C. y Castro-Martínez, E. (1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa, en F. Furinghetti (ed.) *Proceedings Fifteenth PME Conference*. Vol. 1 (pp. 192-198). Assisi. Italy.
- Chi, M.T.H.; Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Chi, M.T.H.; Glaser, R. y Rees, E. (1982). Expertise in problema solving. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, Vol.1. (pp. 7-75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gick, M.L. y Holyoak, K.J. (1980). Analogical problem-solving. *Cognitive Psychology*, 15, pp. 306-355. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010028580900134>.
- Gómez, C.B.; Solaz, J.J. y Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 26, 199-227.
- Gómez, C.B.; Solaz, J.J. y Sanjosé, V. (2013). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18(1), 81-108.
- Hiebert, H. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 341-349.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (ed.) *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 2, (pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520. Disponible en: <http://psycnet.apa.org/index.cfm?fa=search.displayRecord&uid=1988-31644-001>
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3 (3), Artículo 7. Disponible en: [http://reec.uvigo.es/REEC/spanish/REEC\\_older\\_es.htm](http://reec.uvigo.es/REEC/spanish/REEC_older_es.htm)
- Otero, J. y Mateus, G.E. (2011). Memory content of scientific concepts in beginning university science students. *Educational Psychology*, 31 (6), 675-690.

Reed, S. K., Dempster, A. y Ettinger, M. (1985) Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 11, 106-125.

Reeves, L. M. y Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400. Disponible en: doi: 10.1037//0033-2909.115.3.381

Rebello, N. S.; Cui, L.; Bennett, A. G.; Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (pp 223-246). Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Sanjosé, V.; Solaz-Portolés, J.J. y Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184. Disponible en: <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/132235/332866>.

Thorndike, E.L. y Woodworth, R.S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 84, 127-90.

## ANEXO: PROBLEMAS DE BAJA Y ALTA FAMILIARIDAD UTILIZADOS

### Baja Familiaridad

1. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que extrae calor de A y lo introduce en un acumulador y otra que extrae calor del acumulador y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántas calorías se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

2. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

3. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito y otra que extrae gas del depósito y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

4. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que extraen calor de un acumulador y se lo introducen en cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántas calorías se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

5. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

6. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que extrae calor de A y lo introduce en un acumulador, y otra que extrae calor del acumulador y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

7. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que extraen calor de un acumulador y se lo introducen en cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

8. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito, y otra que extrae gas del depósito y lo inyecta en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

Los problemas de Alta Familiaridad se diseñaron sobre las mismas estructuras que los de Baja Familiaridad, pero con temáticas de la vida diaria: llenado/vaciado de piscinas con el tiempo, y aumento/disminución de dinero en cuentas de ahorro con el tiempo. Por ejemplo, el problema 1 de esa colección sería el siguiente:



---

### Alta Familiaridad

---

**1. Enunciado:** Consideremos dos piscinas de diferente tamaño A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A se vacía a razón de 20 litros/día y la piscina B se llena a razón de 30 litros/día.

**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo habrá pasado cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

---

El resto puede deducirse fácilmente.