

ELEMENTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

1. Rectas notables en un triángulo.
2. Intersección de las mediatrices de un triángulo. Circuncentro.
3. Intersección de las alturas de un triángulo. Ortocentro.
4. Intersección de las bisectrices de un triángulo. Incentro.
5. Intersección de las medianas de un triángulo. Baricentro.

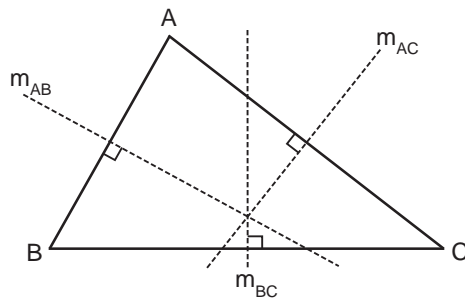
Rectas notables en un triángulo.

En cualquier triángulo, además de sus lados y sus ángulos (interiores) existen otros elementos cuyo estudio es especialmente interesante, pues ayudan a comprender la geometría del triángulo. En esta sección se estudiarán algunos de estos elementos notables.

Definición. Sea ABC un triángulo.

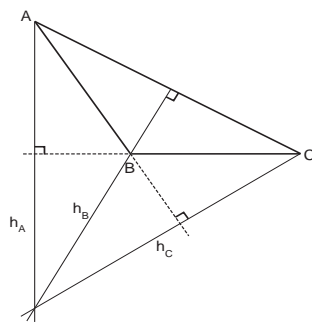
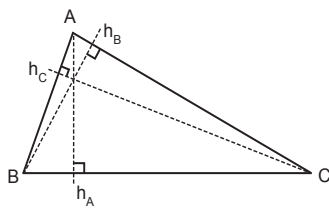
- La *mediatriz* correspondiente al lado \overline{AB} es la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio. Se denotará por m_{AB} .

Análogamente pueden definirse las medianas correspondientes a los lados \overline{AC} y \overline{BC} , esto es, m_{AC} y m_{BC} .



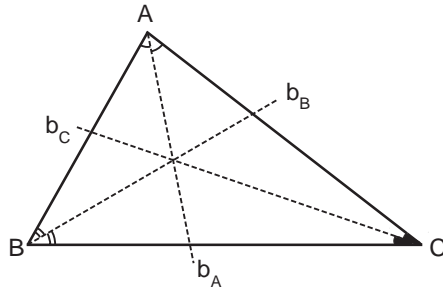
- La *altura* correspondiente al vértice A es la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado opuesto, es decir, a \overline{BC} . Se denotará por h_A .

Análogamente pueden definirse las alturas correspondientes a los vértices B y C , esto es, h_B y h_C .



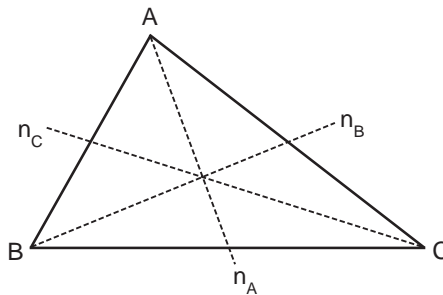
- La *bisectriz (interior)* correspondiente al vértice A es la recta que pasa por el vértice A y que divide al ángulo \hat{A} en dos ángulos iguales. Se denotará por b_A .

Análogamente pueden definirse las bisectrices (interiores) correspondientes a los vértices B y C , esto es, b_B y b_C .



- La *mediana* correspondiente al vértice A es la recta que pasa por el vértice A y por el punto medio del lado opuesto, es decir, del lado \overline{BC} . Se denotará por n_A .

Análogamente pueden definirse las medianas correspondientes a los vértices B y C , esto es, n_B y n_C .



Si nos fijamos en cada una de la ilustraciones anteriores podemos observar que, al dibujar en el triángulo las tres rectas de un mismo tipo, éstas se han cortado en un punto. Lo que resta de sección se dedicará a poner de manifiesto que este hecho no es una casualidad, sino que va a ser cierto cualquiera que sea el triángulo.

Intersección de las mediatrices de un triángulo. Circuncentro.

Antes de demostrar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un único punto, necesitamos ciertas propiedades que verifica la mediatriz de cualquier segmento.

Propiedad 1. Sea \overline{AB} un segmento cualquiera. Entonces cualquier punto de la mediatriz de \overline{AB} equidista de los extremos; es decir, si O es un punto de m_{AB} entonces $\overline{OA} = \overline{OB}$.

DEMOSTRACIÓN:

Pulsar [MED-PROP1](#) en [HERRAMIENTAS](#).

La siguiente propiedad es el resultado recíproco de la propiedad anterior.

Intersección de las alturas de un triángulo. Ortocentro.

En este apartado vamos a demostrar que las tres alturas de cualquier triángulo se cortan en un único punto. Para ello, haremos uso de lo estudiado en el apartado anterior, o sea, que las mediatrices de cualquier triángulo se cortan en un único punto.

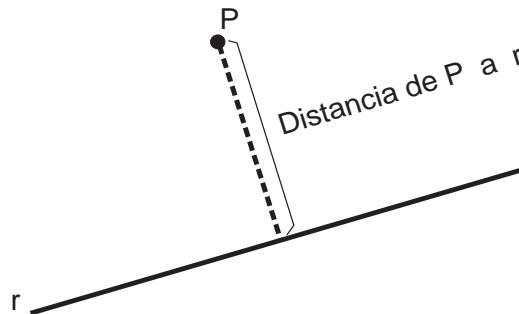
Proposición. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un único punto denominado **ortocentro**.

DEMOSTRACIÓN:

Pulsar [ORTOCENTRO](#) en [HERRAMIENTAS](#).

Intersección de las bisectrices de un triángulo. Incentro.

Este apartado sigue un desarrollo análogo al de las mediatrices. Así, antes de demostrar que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un único punto, necesitaremos ciertas propiedades que verifica la bisectriz de cualquier ángulo. Es conveniente precisar que la distancia de un punto P a una recta r viene dada por la longitud del segmento perpendicular que une P con r .



Propiedad 3. Sea $\angle PAQ$ un ángulo cualquiera. Entonces cualquier punto de la bisectriz de $\angle PAQ$ equidista de los lados del ángulo; es decir, si I es un punto de la bisectriz de $\angle PAQ$, entonces la distancia de I a la recta AP es igual que la distancia de I a la recta AQ .

DEMOSTRACIÓN:

Pulsar [BIS-PROP3](#) en [HERRAMIENTAS](#).

La siguiente propiedad es el resultado recíproco de la propiedad anterior.

Propiedad 4. Sea $\angle PAQ$ un ángulo cualquiera. Si I es un punto del plano que equidista

de los lados del ángulo, entonces I está en la bisectriz de dicho ángulo; es decir, si I es un punto del plano cumpliendo que la distancia de I a la recta AP es igual que la distancia de I a la recta AQ entonces I es un punto de la bisectriz de $\angle PAQ$.

DEMOSTRACIÓN:

Pulsar [BIS-PROP4](#) en [HERRAMIENTAS](#).

Consecuencias.

1. *Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un único punto denominado **incentro**. Por tanto, el incentro de un triángulo es el único punto del plano que equidista de los lados del triángulo.* En efecto, consideremos un triángulo ABC y sea I el punto en el que se cortan las mediatrices b_A y b_B . Como el punto I está en b_A , gracias a la propiedad 3 podemos afirmar dicho punto equidista de los lados AB y AC (pues son los lados que conforman el ángulo \hat{A}); análogamente puede razonarse para b_B . Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} I \in b_A \Rightarrow \text{distancia}(I, AB) = \text{distancia}(I, AC) \\ \quad \text{(Propiedad 3)} \\ I \in b_B \Rightarrow \text{distancia}(I, AB) = \text{distancia}(I, BC) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{distancia}(I, AC) = \text{distancia}(I, BC).$$

Por tanto, se llega a que el punto I equidista de los lados AC y BC . Estos son los lados del ángulo \hat{C} ; utilizando ahora la propiedad 4 se concluye que el punto I debe estar en la bisectriz del ángulo \hat{C} . En consecuencia, $I \in b_C$ y tal punto I es la intersección de las tres bisectrices.

Pulsar [INCENTRO](#) en [HERRAMIENTAS](#) para ver la construcción del incentro de un triángulo .

2. Se dice que una circunferencia está *inscrita* en un triángulo si la circunferencia es tangente a los tres lados del triángulo. **Para construir la circunferencia inscrita en un triángulo dado, basta tomar como centro de dicha circunferencia, el incentro del triángulo** (que equidista de los tres lados, según se ha comentado en el punto anterior) **y como radio, la distancia del incentro a cualquiera de los tres lados**. Además, al ser el incentro el único punto que equidista de los lados del triángulo, sólo existe una circunferencia inscrita en un triángulo (es decir, dado un triángulo, sólo existe una circunferencia que es tangente simultáneamente a los tres lados).

Pulsar [INSCRITA](#) en [HERRAMIENTAS](#) para ver la construcción de la circunferencia inscrita a un triángulo .

Intersección de las medianas de un triángulo. Baricentro.

Aunque sería posible demostrar en este apartado que las tres medianas de un triángulo se cortan en un único punto (**baricentro**), resulta más sencillo demostrarlo en el siguiente apartado utilizando la semejanza de triángulos.