Modelado de Sistemas Discretos mediante Mínimos Cuadrados

Antonio Javier Barragán Piña

Introducción

Teoría (I)

Programación

Teoría (II)

Modelado de Sistemas Discretos mediante Mínimos Cuadrados

Control por Computador, Ingeniería Informática

Antonio Javier Barragán Piña

E.P.S. La Rábida, Universidad de Huelva

http://www.uhu.es/antonio.barragan

Modelado de Sistemas Discretos mediante Mínimos Cuadrados

Antonio Javier Barragán Piña

Introducción

Teoría (I)

Programación

Teoría (II)

Introducción

- Aplicable a Sistemas Discretos M.I.M.O., Lineales e Invariantes en el tiempo (o que varíen muy lentamente).
- Minimiza el Error Cuadrático Medio entre las medidas reales y su estimación.
- Requiere establecer un modelo de partida para así estimar sus parámetros.
- Utilizaremos el modelo general de orden n:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+...+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-n}}$$

Técnica de Mínimos Cuadrados (I)

Si $G_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}}$,

$Y_i(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}) = U_j(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_nz^{-n})$

$\mathbf{Z^{-1}} \Rightarrow y_i(k) = -a_1y_i(k-1) + \ldots - a_ny_i(k-n) + b_0u_j(k) + \ldots + b_nu_j(k-n)$

Esta expresión puede ponerse de forma matricial:

$$y_i(k) = m(k)\theta$$

Siendo $m(k)$ el conjunto de muestras para el instante k:

$$m(k) = (-y_i(k-1), \ldots, -y_i(k-n), u_j(k), \ldots, u_j(k-n))$$

y θ el vector de los $2n+1$ parámetros que se desean estimar:

$$\theta = (a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n)^T$$

Técnica de Mínimos Cuadrados (II)

Modelado de Sistemas Discretos mediante Mínimos Cuadrados

Antonio Javier Barragán Piña

Introducción

Teoría (I)

Programación

Teoría (II)

- Si $\hat{\theta}$ es la estimación del vector de parámetros reales:
- La salida estimada será $\hat{y}_i(k) = m(k)\hat{\theta}$.
- El error de estimación vendrá dado por $e_i(k) = y_i(k) - \hat{y}_i(k)$.
- Si tenemos $N > (2n+1)$ muestras tomadas del sistema:

$$M(N) = \begin{pmatrix} m(0) \\ m(1) \\ \ldots \\ m(N) \end{pmatrix} \qquad Y(N) = \begin{pmatrix} y_i(0) \\ y_i(1) \\ \ldots \\ y_i(N) \end{pmatrix}$$

- $M(N)$ no será cuadrada.
- No podremos calcular $\hat{\theta} = M(N)^{-1}Y(N)$.

Técnica de Mínimos Cuadrados (III)

- No existe una solución exacta para $\hat{\theta}$.
- La solución Óptima será la que minimice el *Índice de Mínimos Cuadrados de los Errores*: $J = \left\|\theta - \hat{\theta}\right\|$

Solución Óptima

$$\hat{\theta} = \underbrace{(M^T M)^{-1} M^T}_{\text{Pseudo-inversa izquierda}} \quad Y$$

- Este Método es ideal para identificación *Fuera de Línea*.
- Se escogerá un orden n pequeño, y se aumentará hasta no apreciar mejora considerable o llegar a un error aceptable para la aplicación que se pretenda realizar.

Programación con MATLAB

◂ Descarga el código


```
function [Gz,P]=min_cuadrados(in,out,T,n)
% MIN_CUADRADOS. Minimum square algorithm for Discrete L.T.I. System Identification
% function [Gz,P]=min_cuadrados(in,out,T,n)
% in  -> Input vector  (in column form)
% out -> Output vector (in column form)
%  T  -> Sample time (in seconds)
%  n  -> Order for Gz (scalar)
%  P  -> Pass matrix for use with recursive algorithm;
num_params=2*n+1;
if length(in)~=length(out)
    error('Los vectores de datos no son coherentes')
end
for i=1:length(in)
M(i,:)=zeros(1,num_params);
    if ((i-n)<1)
       M(i,n+1)=in(i);
       for j=1:n
          if (i-j)>0
             M(i,j)=-out(i-j);
             M(i,n+1+j)=in(i-j);
          end
       end
    else
       M(i,:)=[-out(i-1:-1:i-n)',in(i:-1:i-n)'];
    end
end
P=inv(M'*M);
Q=P*M'*out; % Q = [a1;...;an;b0;...;bn]
Gz=tf(Q(n+1:end)',[1,Q(1:n)'],T);
if n==0 % Se convierte Gz en una constante si n=0
    Gz=Gz.num1;
end
```

Estimación Recurrente de Mínimos Cuadrados (I)

- Con la Formulación Normal...
  - Si tenemos muchos datos, el cálculo de la pseudo-inversa puede ser muy costoso.
  - Al obtener más muestras debemos recalcular la pseudo-inversa completa.
- Con la Formulación Recurrente...
  - La pseudo-inversa se calculará con pocos datos,
  - se puede actualizar el modelo fácilmente al obtener nuevas muestras,
  - y la identificación puede hacerse *en línea*.

Estimación Recurrente de Mínimos Cuadrados (II)

- Con unas pocas muestra se construye el modelo inicial:

Modelo Inicial

$$P(-1) = (M^T(N)M(N))^{-1}$$
$$\hat{\theta}(0) = P(N)M^T(N)Y(N)$$

- Con cada nueva muestra, $m(N+1)$, se actualiza el modelo:

Algoritmo Recurrrente de Mínimos Cuadrados

1. $K(N) = P(N)\ m^T(N+1)\left[1 + m(N+1)P(N)\ m^T(N+1)\right]^{-1}$
2. $P(N+1) = \left[I - K(N)\ m(N+1)\right]P(N)$
3. $\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N)\left[\underbrace{y_i(N+1) - m(N+1)\hat{\theta}(N)}_{\text{error de la muestra actual}}\right]$