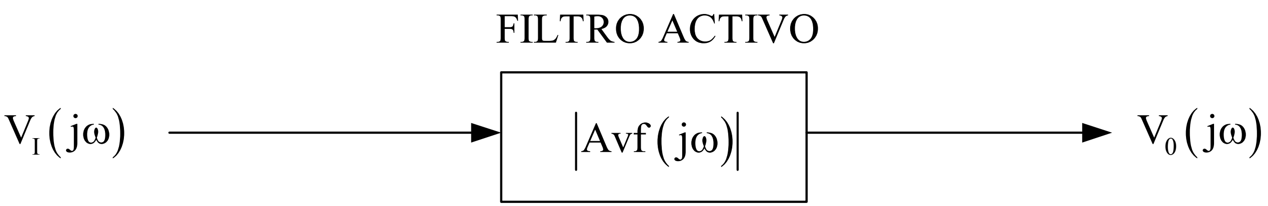
El tema 5 está dedicado al análisis y diseño de filtros activos.

Inicialmente se realiza una clasificación de los filtros.

Posteriormente se propone el uso de **filtros prototipos** y **el escalado** como técnicas de diseño para los filtros de primer y segundo orden.

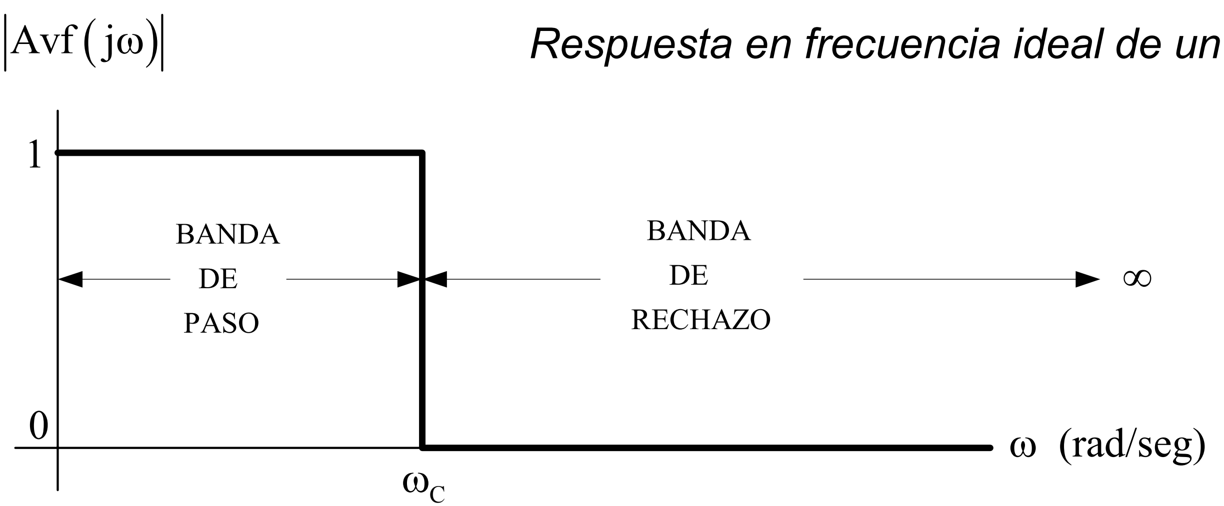
Finalmente se tratan los filtros normalizados de **Butterworth** para el diseño de filtros de orden superior a dos.

CUESTIONES DEL TEMA - V



Un filtro es un circuito electrónico selectivo de frecuencias. En sentido ideal:

- ► Transmite desde su entrada hasta su salida todas las señales cuyas frecuencias estén comprendidas dentro de una o más **bandas** de frecuencias.
- ► Rechaza las señales cuyas frecuencias no estén comprendidas en dichas bandas.



Respuesta en frecuencia ideal de un filtro paso bajo.

En la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo ideal observamos:

► Existe una banda de frecuencia, banda de paso, en la cual el módulo de la ganancia vale la unidad, y por tanto la salida del filtro es igual a la entrada (La señal de entrada del filtro pasa sin modificación hacia su salida).

► Existe una banda de frecuencia, banda de rechazo, en la cual el módulo de la ganancia vale la cero, y por tanto la salida del filtro es igual a cero (La señal de entrada del filtro no pasa hacia su salida).

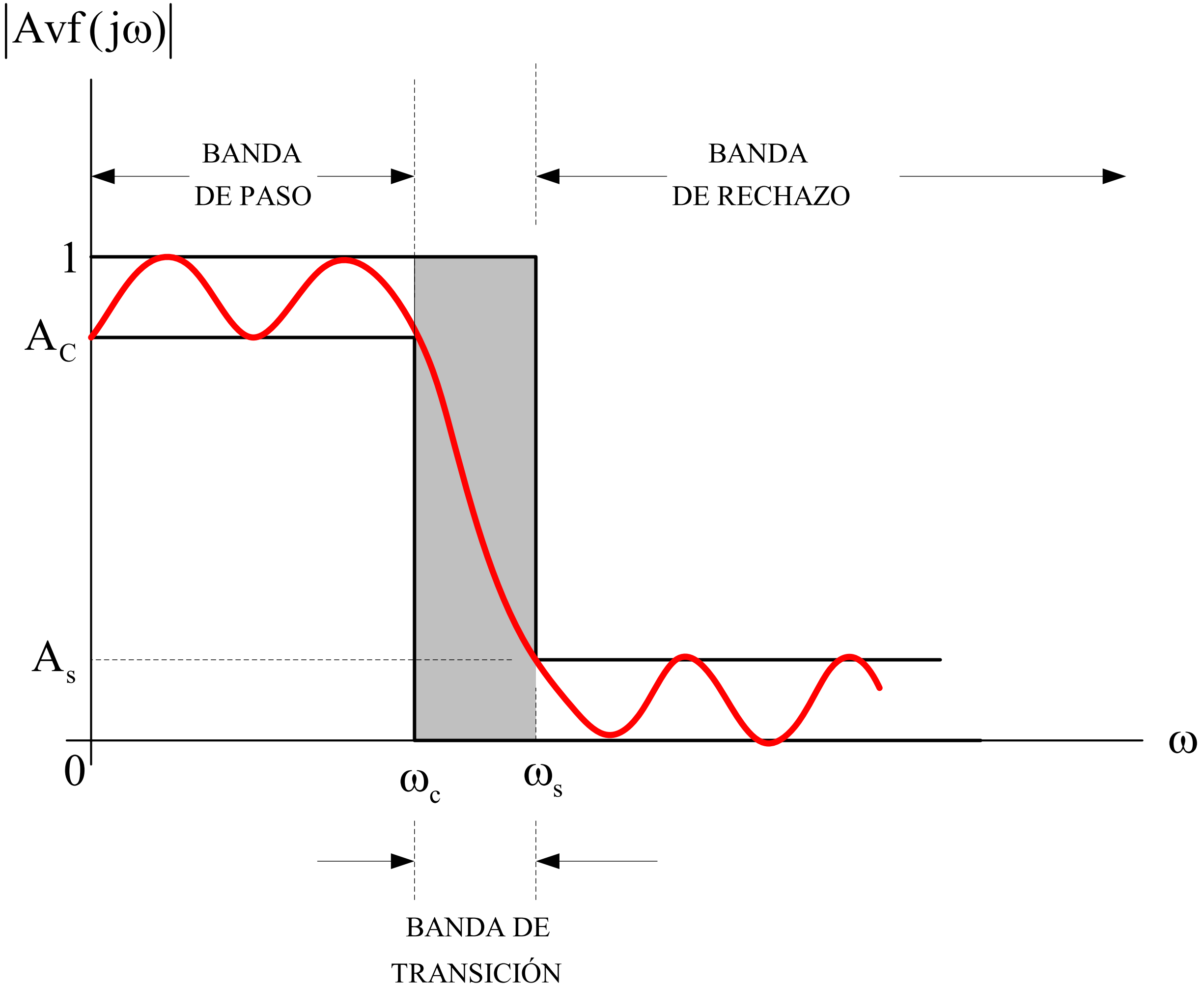
► La trecuencia ω_C es la frecuencia de cruce que separa la banda de paso de la banda de rechazo.

Es imposible conseguir filtros con respuestas en frecuencia ideales.

♦ Las respuestas en frecuencia de los filtros reales presentan una banda de transición entre las bandas de paso y las bandas de rechazo.

♦ Tanto las bandas de paso como la bandas de rechazo pueden presentar un rizado.

Plantilla de la respuesta en frecuencia real de un filtro paso bajo.



ORDEN DE UN FILTRO:

$$\mathrm{Avf}(s) = \frac{10^5 (s+2)}{s^2 + 5s + 1}$$

El orden del filtro cuya función compleja se representa es dos, puesto que el mayor exponente de la variable compleja “s” del polinomio denominador es dos.

CLASIFICACIÓN DE LOS FILTROS SEGÚN SUS COMPONENTES.

a) Filtros pasivos

Están formados por autoinducciones, capacidades y resistencias.

→ No tienen ganancia.

→ Trabajan con frecuencias superiores al Megahercio.

→ Son voluminosos y caros debido a las autoinduciones.

b) Filtros activos.

Están formados por capacidades, resistencias y un elemento activo tal como un amplificador operacional.

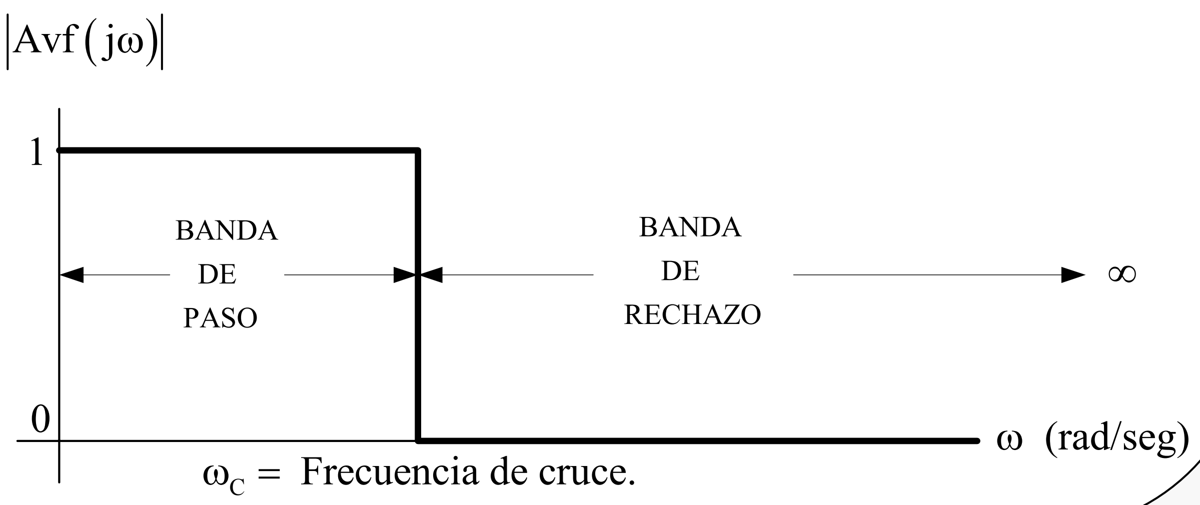
→ Pueden tener ganancia.

→ No son voluminosos y se pueden integrar en un Chip.

→ Trabajan con frecuencias inferiores al Megahercio.

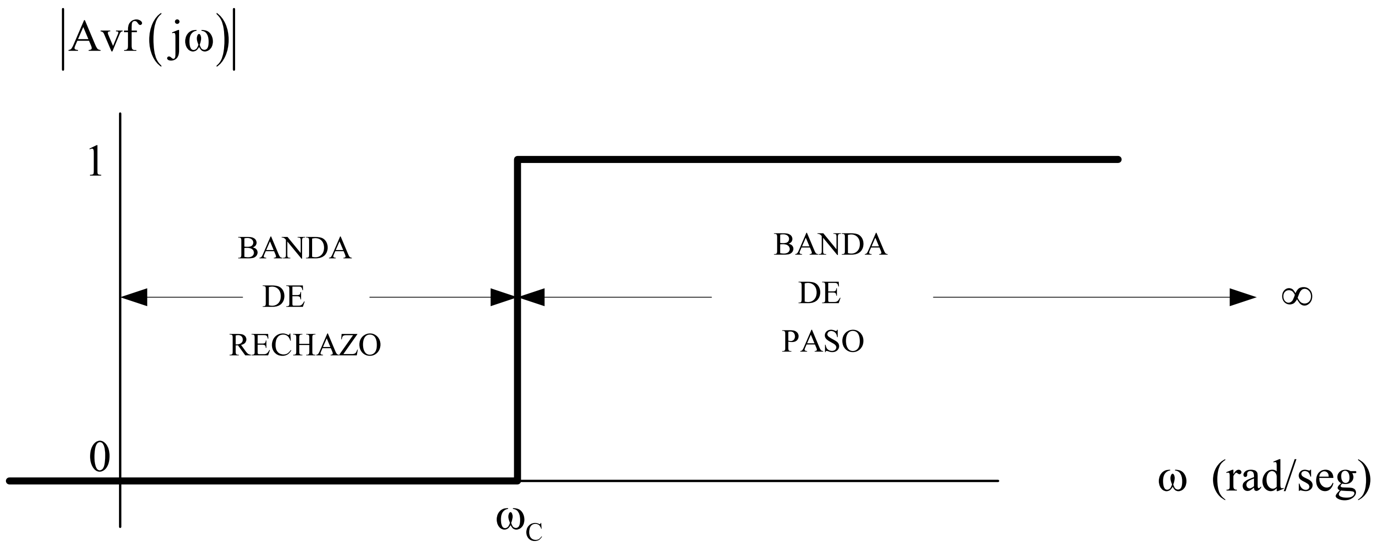
CLASIFICACIÓN DE LOS FILTROS SEGÚN SU RESPUESTA EN FRECUENCIA.

1) Filtro paso bajo.



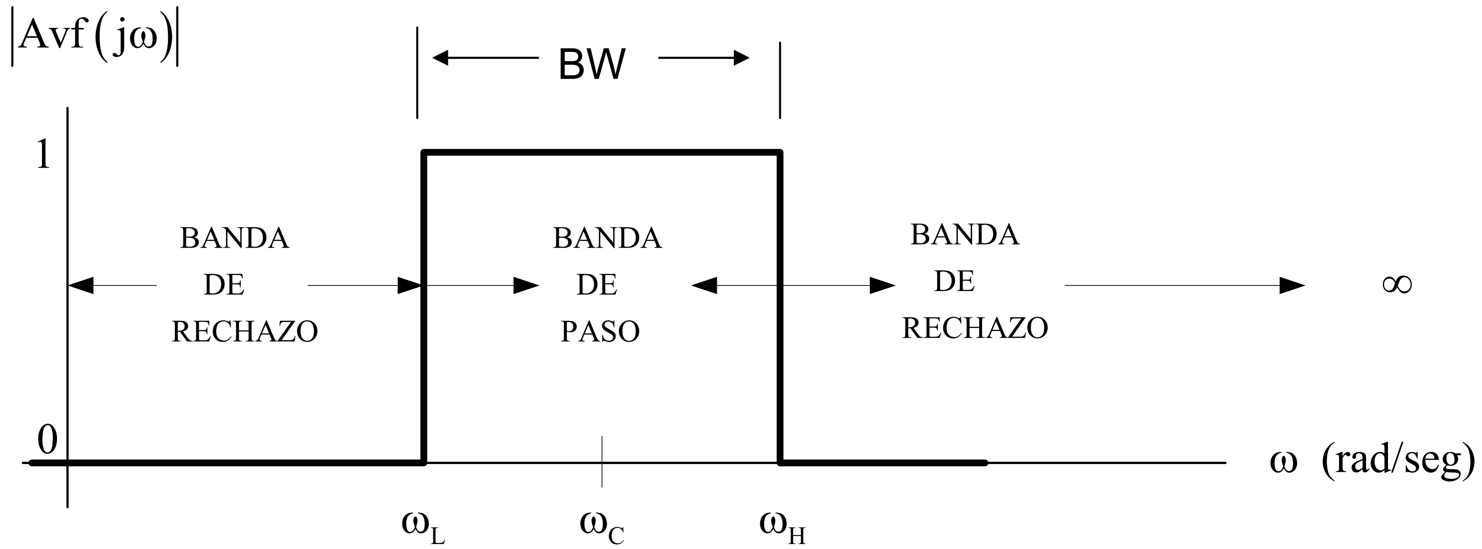
La banda de paso está comprendida entre cero y la frecuencia de cruce, y la banda de rechazo comprende todas las frecuencias superiores a la de cruce.

2) Filtro paso alto.



La banda de rechazo está comprendida entre cero y la frecuencia de cruce, y la banda de paso comprende todas las frecuencias superiores a la de cruce.

3) Filtro pasa banda.



ω_L = frecuencia de cruce inferior.

ω_H = frecuencia de cruce superior.

ω_C = frecuencia central.

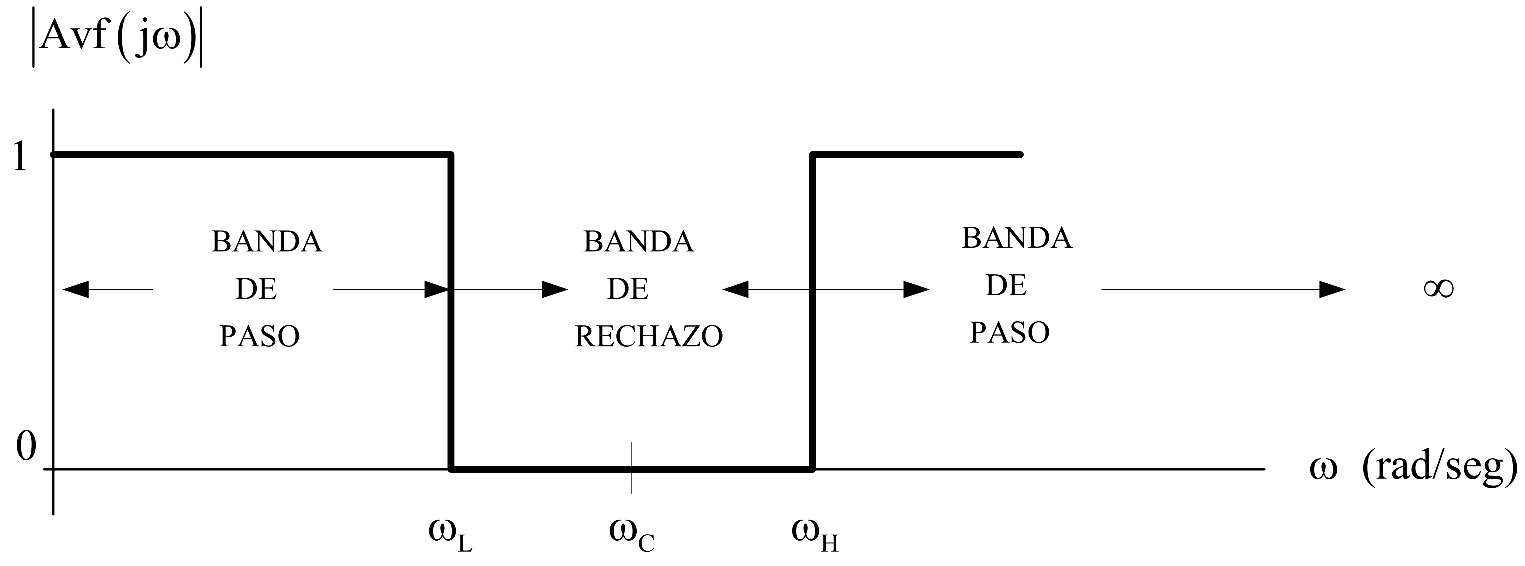
BW = (ω_H - ω_L) = ancho de banda.

$$\log(\omega_C) = \frac{\log(\omega_H) + \log(\omega_L)}{2} = \frac{\log(\omega_H\omega_L)}{2} = \log\sqrt{\omega_H\omega_L}$$

$$\omega_C = \sqrt{\omega_H\omega_L}$$

La banda de paso está comprendida entre las frecuencias de cruce inferior y superior. Las bandas de rechazo están comprendidas entre cero y la frecuencia de cruce inferior, y entre la frecuencia de cruce superior e infinito.

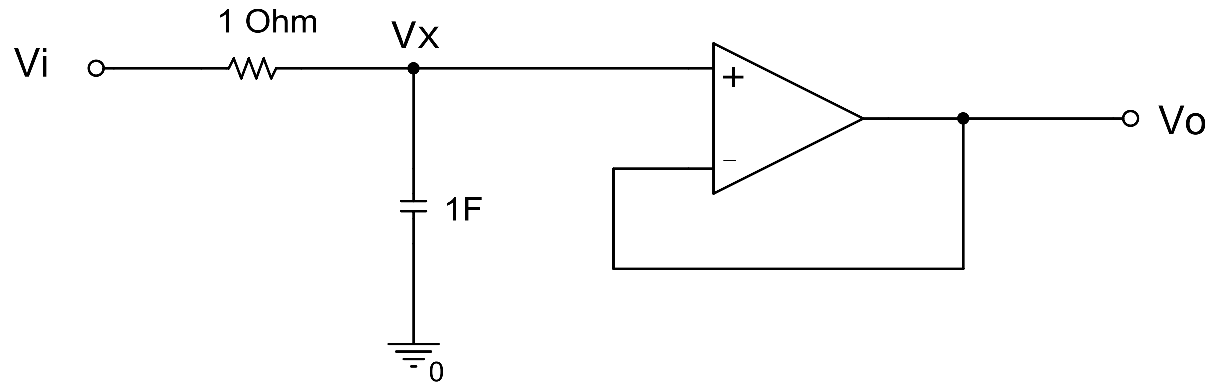
3) Filtro de banda eliminada.



La banda de rechazo está comprendida entre las frecuencias de cruce inferior y superior. Las bandas de paso están comprendidas entre cero y la frecuencia de cruce inferior, y entre la frecuencia de cruce superior e infinito.

Para diseñar filtros activos reales utilizaremos la técnica que consiste en partir de un filtro prototipo, el cual tiene todas las capacidades de 1 F y todas las resistencias de 1 Ω, y después transformarlo en el filtro diseñado.

a) Análisis de un filtro prototipo paso bajo sin ganancia..



En este circuito $V_O = V_X$, y la función de transferencia compleja es:

$$Avf(s) = \frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

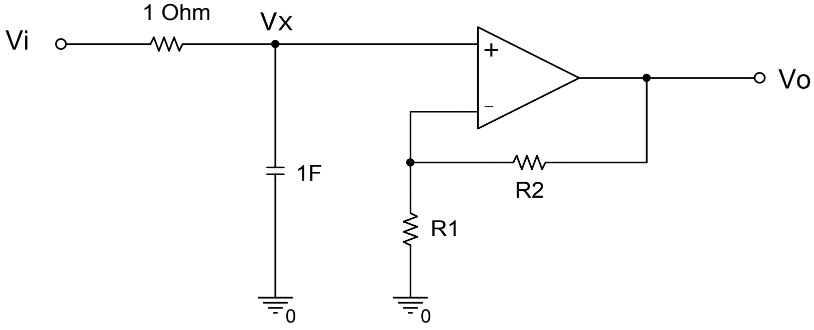
Filtro de primer orden.

La función de transferencia en alta frecuencia es:

$$Avf(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}$$

Un polo con frecuencia ω_C = 1 rad/seg.

b) Análisis de un filtro prototipo paso bajo con ganancia..



Función de transferencia del amplificador en baja frecuencia K

$$V_O(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_X(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{(s+1)} Vi(s) = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{(s+1)} V_I(s)$$

Función de transferencia compleja:

$$A_{vf}(s) = \frac{V_0(s)}{V_i s(} = \frac{K}{(s+1)}$$

Para un filtro lo importante son los valores de las bandas y es irrelevante el valor de la ganancia K en baja frecuencia. Por este motivo, las funciones de transferencia complejas de los filtros se normalizan dividiendo dicha función por la ganancia K.

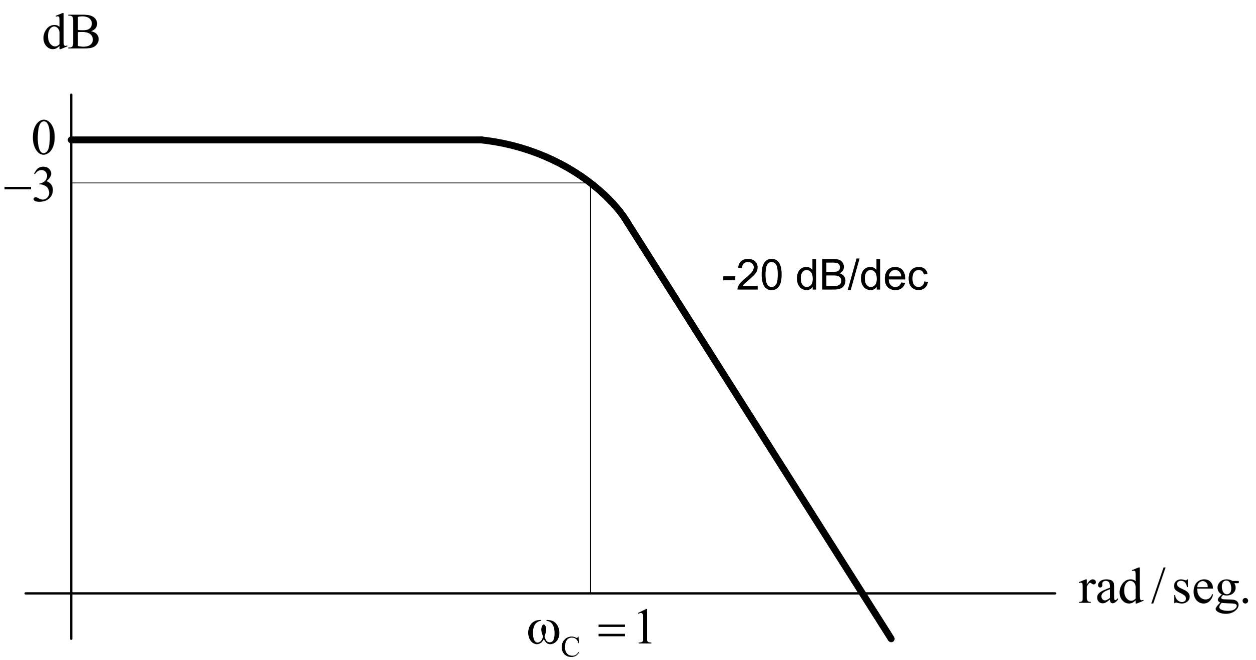
$$A_{vf(N)}(s) = \frac{A_{vf}(s)}{K} = \frac{1}{(s+1)}$$

La función de transferencia normalizada en alta frecuencia es:

$$A_{vf(N)}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}$$

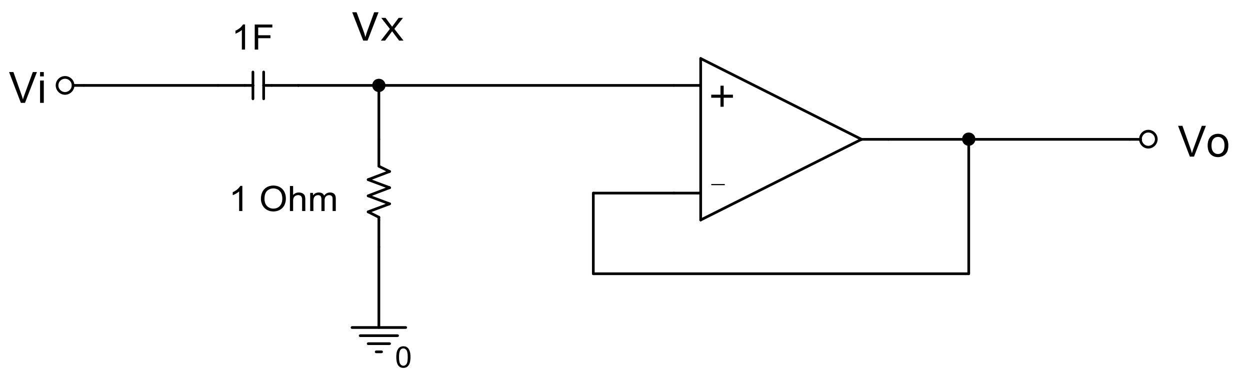
Podemos afirmar que las respuestas en frecuencia de los filtros prototipos paso bajo de primer orden con ganancia y sin ganancia son equivalentes.

Trazado de la respuesta en frecuencia de un filtro prototipo normalizado paso bajo de primer orden.



Cualquier tipo de filtro prototipo paso bajo con frecuencia de cruce $\omega_C = 1$ rad/seg se puede convertir en un filtro prototipo paso alto con $\omega_C = 1$ rad/seg, utilizando la transformación RC-CR, que consiste en intercambiar las capacidades de 1F por resistencias de 1Ω y las resistencias de 1Ω por capacidades de 1F.

a) Análisis de un filtro prototipo paso alto sin ganancia..



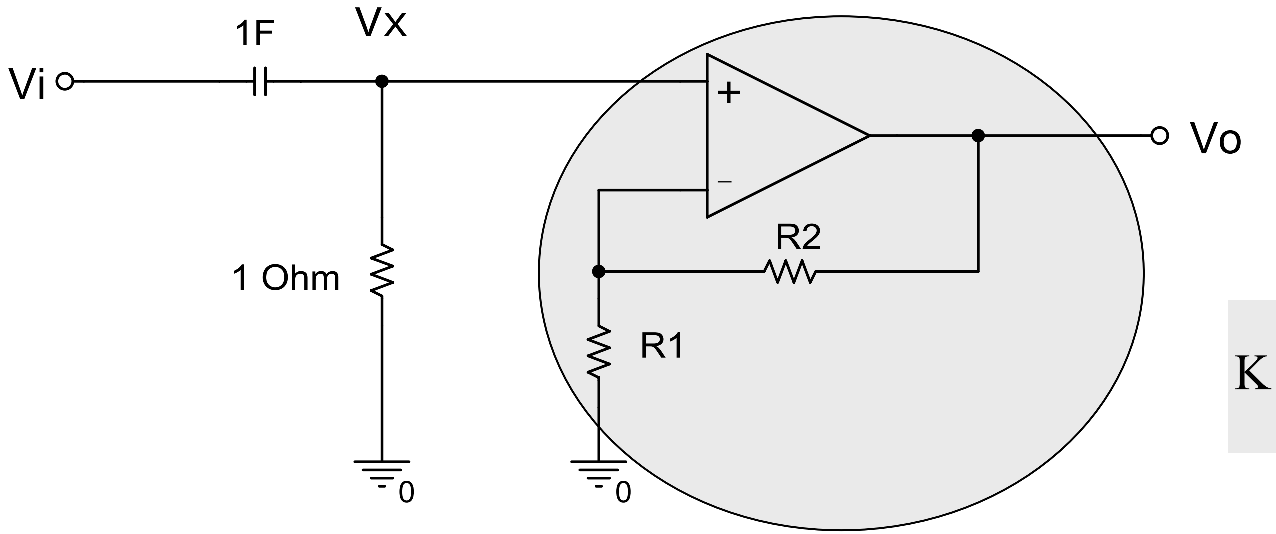
Función de transferencia compleja:

$$Avf(s) = \frac{1}{\frac{1}{s}+1} = \frac{s}{1+s}$$

Función de transferencia en alta frecuencia.

$$Avf(j\omega) = \frac{j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}$$

a) Análisis de un filtro prototipo paso alto con ganancia..



$$K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Función de transferencia compleja.

$$Vo(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) Vx(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{s}{1+s} Vi(s) = \frac{sK}{1+s} Vi(s)$$

$$A_{vf}(s) = \frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{sK}{1+s}$$

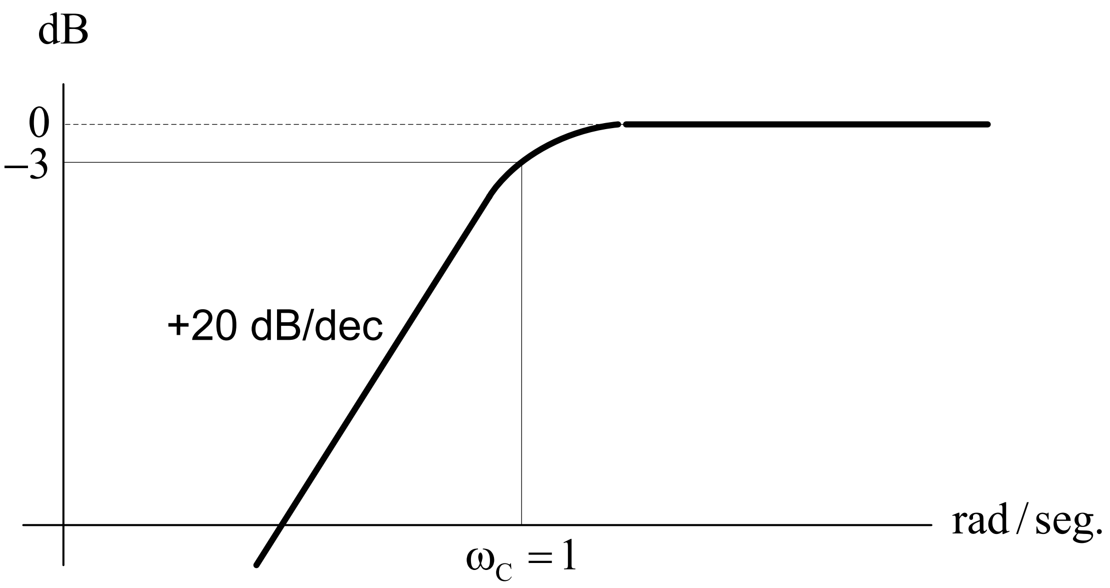
Función de transferencia compleja normalizada.

$$Avf_N(s) = \frac{s}{1+s}$$

Función de transferencia en alta frecuencia normalizada.

$$Avf_N(j\omega) = \frac{j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}$$

Trazado de la respuesta en frecuencia de un filtro prototipo paso alto de primer orden.



Hay que resaltar que la transformación RC-CR sobre el circuito de un filtro equivale a sustituir en su función de transferencia compleja “s” por “1/s”.

Ejercicio 1.

La función de transferencia compleja de un filtro prototipo paso bajo de primer orden es:

$$\mathrm{Avf}(s) = \frac{1}{1+s}$$

Al sustituir s por:

$$\frac{1}{s}$$

Obtenemos la función de transferencia de un filtro prototipo paso alto de primer orden.

$$\mathrm{Avf}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1}$$

Los escalados son métodos que nos permite diseñar cualquier filtro a partir de un filtro prototipo.

$$\text{ESCALADOS}\begin{cases}\text{De frecuencia}\begin{cases}\text{Sobre la función de transferencia.}\\\text{Sobre el circuito del filtro.}\end{cases}\\\text{De impedancia sobre el circuito del filtro.}\end{cases}$$

a) Escalado de frecuencia sobre la función de transferencia.

Escalar en frecuencia la función de transferencia compleja de cualquier filtro consiste en sustituir en dicha función **s** por **s/α** siendo **α > 0** el factor de escalado en frecuencia.

Sea un filtro paso bajo de primer orden sin escalar cuya función de transferencia compleja es:

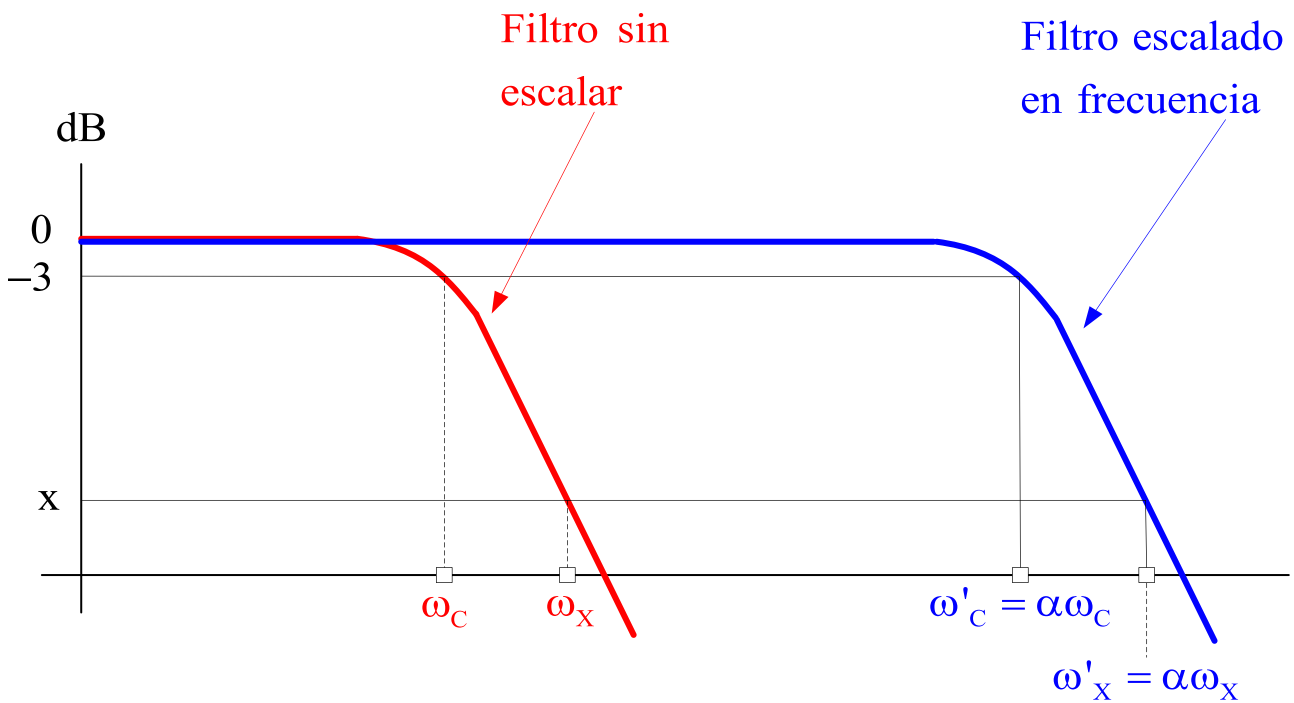
$$A_{vf}(s) = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{s}{\omega_C}\right)}$$

Respuesta en frecuencia en línea gruesa roja

Al escalar en frecuencia la función de transferencia anterior obtenemos:

$$A_{vf}\left(\frac{s}{\alpha}\right)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\frac{s}{\alpha}}{\omega_C}\right)}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\alpha\omega_C}\right)}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\omega'_C}\right)}$$

Respuesta en frecuencia en línea gruesa azul



El escalado en frecuencia produce un **desplazamiento hacia la derecha** de la respuesta en frecuencia del filtro sin escalar, de modo que todas las frecuencias quedan multiplicadas por el factor de escalado en frecuencia **α**.

b) Escalado de frecuencia sobre el circuito del filtro.

Si tenemos en cuenta que en el dominio de la variable compleja **s**:

$$C(s) = \frac{1}{sC}$$

$$R(s) = R$$

Al escalar en frecuencia:

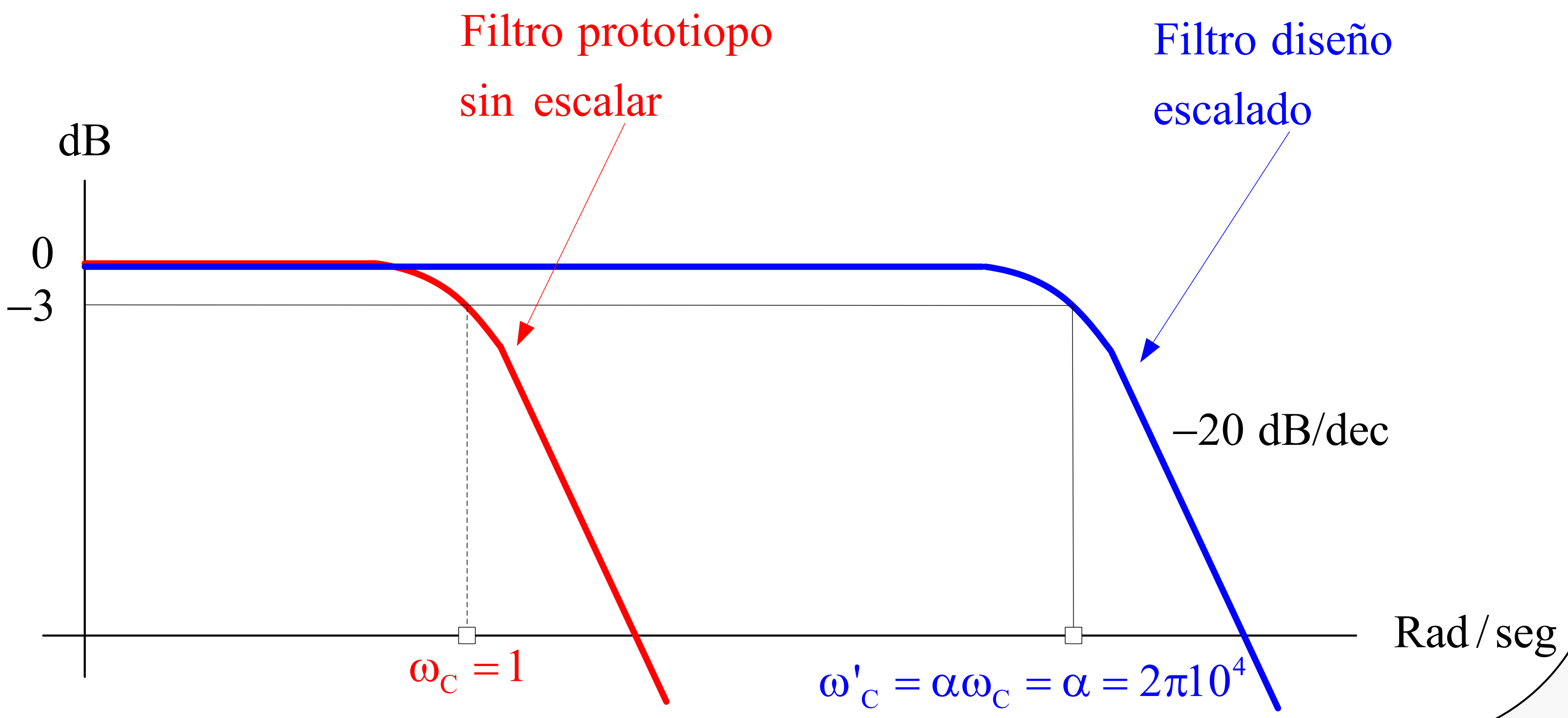
$$C\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \frac{1}{\frac{s}{\alpha}C} = \frac{1}{s\left(\frac{C}{\alpha}\right)}$$

$$R\left(\frac{s}{\alpha}\right) = R$$

Realizar un escalado en frecuencia **α** sobre los componentes de un filtro consiste en dividir las capacidades por **α** sin modificar las resistencias.

Ejercicio 2.

Diseñar un filtro activo paso bajo de primer orden que tenga un ancho de banda (**frecuencia de cruce**) de 10 K Hz.



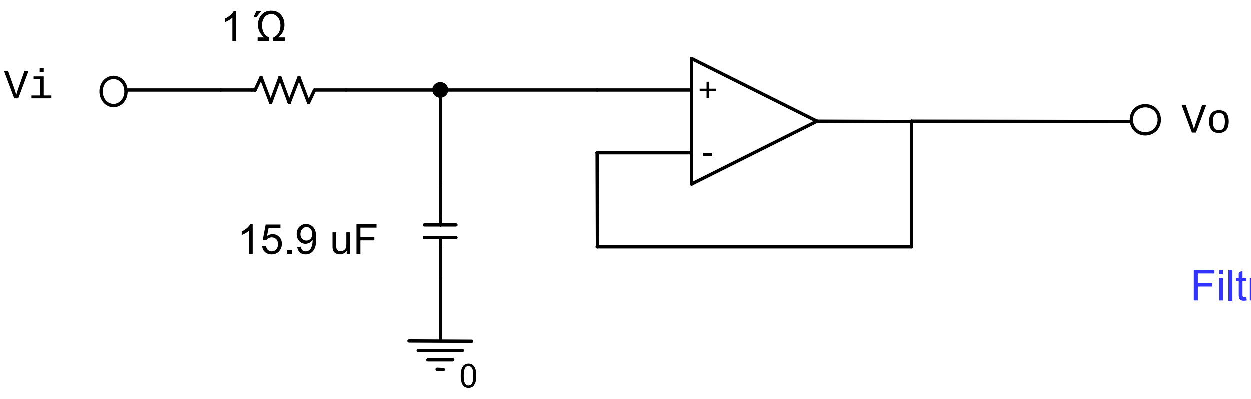
La frecuencia a -3 dB del filtro diseñado es:

$$\omega'_C = \alpha = 2\pi f_C = 2\pi 10^4 \ \text{rad/seg.}$$

Realizando un escalado en frecuencia sobre los componentes del filtro prototipo obtenemos los valores de los componentes del filtro diseño:

$$R' = 1\ \Omega$$

$$C' = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\pi f_C} = \frac{1}{2\pi 10^4} = 1{,}59 \times 10^{-5}\ \text{F} = 15{,}9\ \text{uF}$$



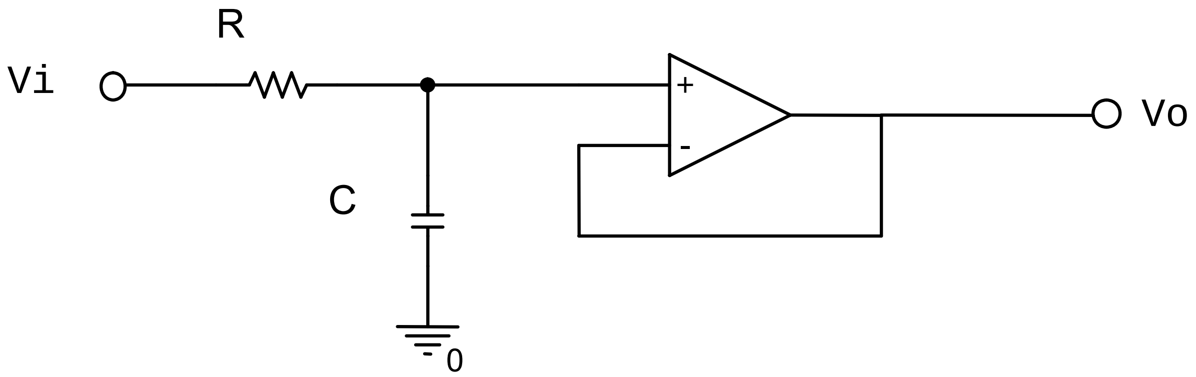
Filtro diseñado.

La resistencia del filtro de 1 Ω es de valor muy pequeña y es necesario elevarla. Ello se consigue con el escalado en impedancia.

c) Escalado de impedancia sobre el circuito del filtro.

El escalado de impedancia de un circuito consiste en reemplazar en un filtro R por βR y C por C/β siendo $\beta > 0$ el factor de escalado de impedancia. El escalado de impedancia no modifica la respuesta en frecuencia del filtro.

Ejercicio 3.



Dado el circuito de la figura anterior, comprobar que un escalado en impedancia no modifica la respuesta en frecuencia del filtro.

$$A_{vf}(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R}=\frac{1}{(1+sRC)}=\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\omega_C}\right)}$$

$$\omega_C=\frac{1}{RC}$$

Realizando el escalado en impedancia:

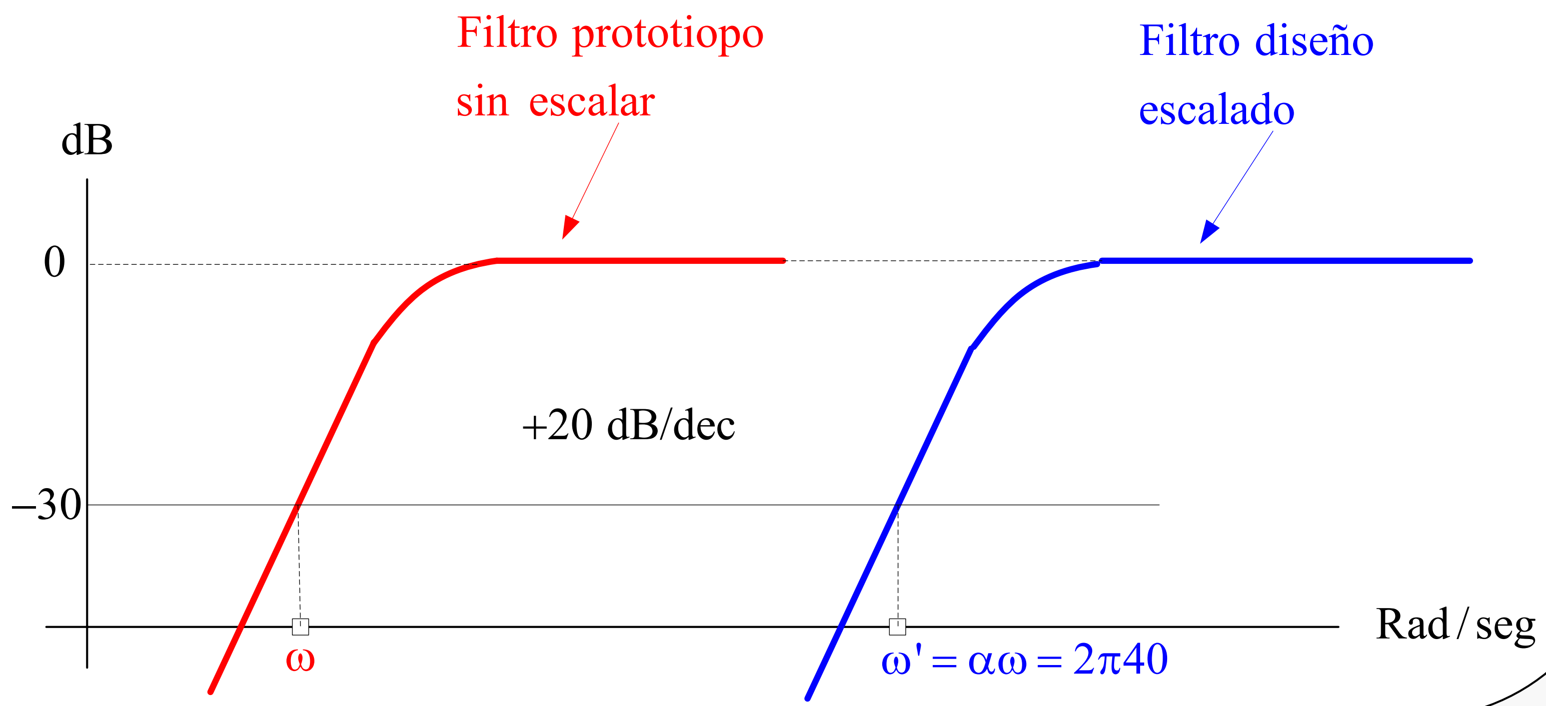
$$A'_{vf}(s)=\frac{\frac{1}{s\frac{C}{\beta}}}{\frac{1}{s\frac{C}{\beta}}+\beta R}=\frac{1}{\left(1+s\beta R\frac{C}{\beta}\right)}=\frac{1}{(1+sRC)}=\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\omega_C}\right)}$$

Se obtiene la misma función de transferencia, luego el filtro no cambia.

Lo normal es realizar primeramente un escalado en frecuencia y después realizar une escalado en impedancia.

Ejercicio 4.

Diseñar un filtro activo paso alto de primer orden con una ganancia en alta frecuencia de 0 dB y una atenuación de 30 dB (**una ganancia de – 30 dB**) a 40 Hz. Utilizar condensadores de 5 nF



Necesitamos conocer $\alpha = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2\pi 40}{\omega}$ pero desconocemos el valor de la **ω** del filtro prototipo.

Sabemos que la función de transferencia del filtro prototipo paso alto de primer orden es:

$$A_{vf}(s) = \frac{s}{1+s}$$

Sustituyendo s = jω obtenemos.

$$A_{vf}(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$$

Cuyo módulo en decibelios es:

$$\left|A_{vf}(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\right) = -30$$

Operando:

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \log^{-1}\left(\frac{-30}{20}\right) = 0.03162$$

$$\frac{\omega^2}{1+\omega^2} = 10^{-3} \Rightarrow \omega^2 = 10^{-3}\left(1+\omega^2\right) \Rightarrow 10^3\omega^2 = 1+\omega^2 \Rightarrow 999\omega^2 = 1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{999}} = 0.03164$$

Substituyendo ω:

$$\alpha = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2\pi 40}{0.03164} = 7943.69$$

Los valores de los componentes del filtro diseñado son:

$$R' = 1\Omega$$

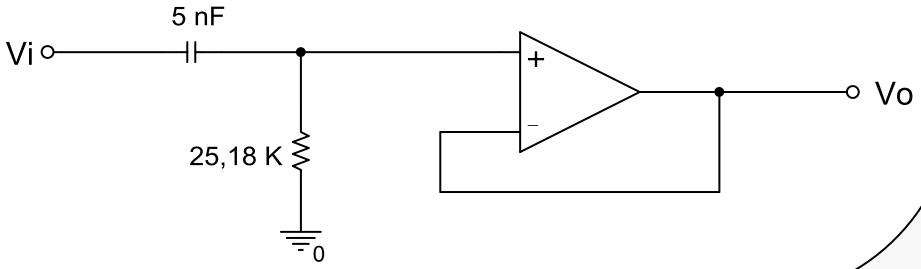
$$C' = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{7943.69} = 0.0001259F = 125.9\mu F$$

Realizamos un escalado en impedancia con C = 5x10^{-9} F:

$$C = \frac{C'}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C'}{C} = \frac{125.9\times 10^{-6}}{5\times 10^{-9}} = 25.18\times 10^{3}$$

$$R = \beta R' = 25.18\times 10^{3} \times 1\ \Omega = 25.18\ K$$

Dibujamos el esquema del filtro:



El denominador de su función de transferencia es un polinomio de segundo orden.

a) La función de transferencia de un filtro prototipo paso bajo de segundo orden es:

$$A_{vf}(s) = \frac{K}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

Dividimos por la ganancia K para normalizar la función de transferencia:

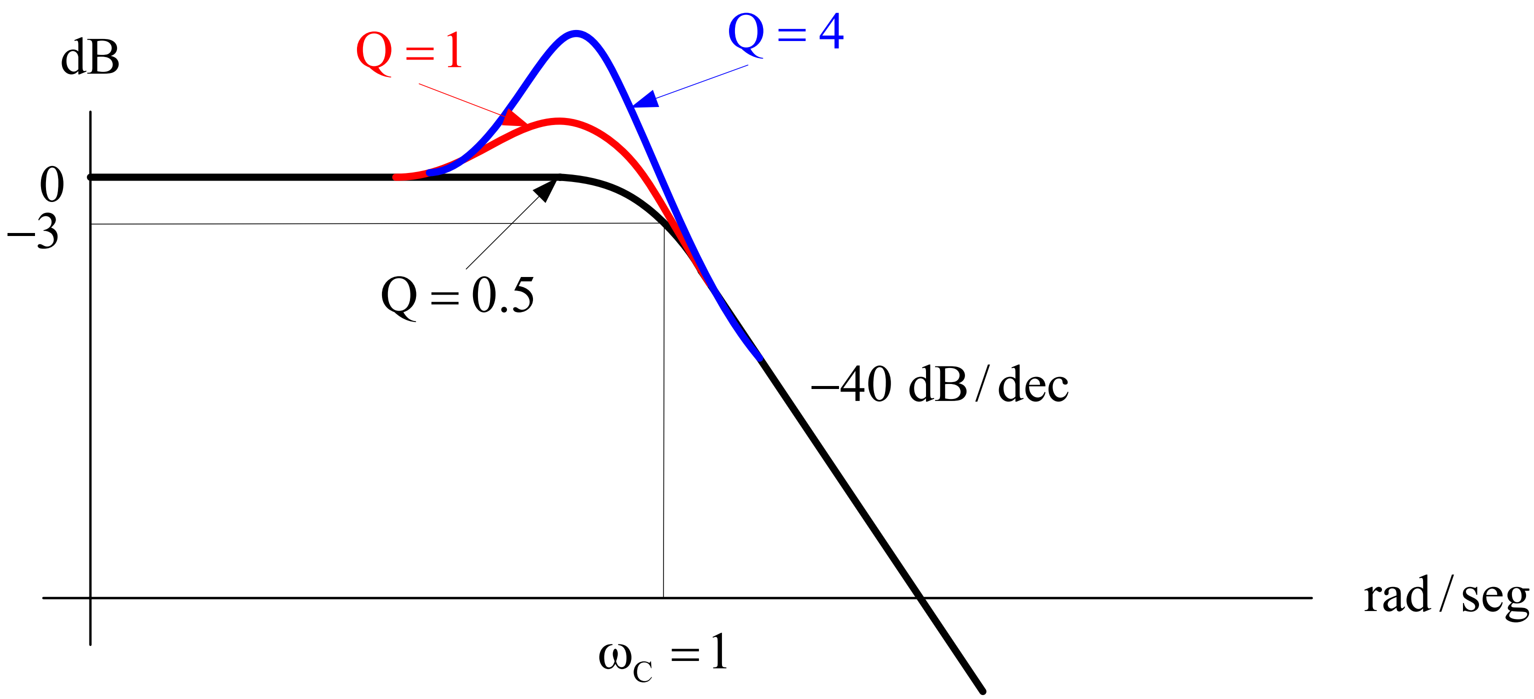
$$A_{vf(N)}(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

Resolviendo el polinomio denominador:

$$s = \frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} = \frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1-4Q^2}{Q^2}}}{2} = -\frac{1}{2Q} \pm j\frac{1}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$4Q^2 - 1 \geq 0$ $\quad$ $Q \geq 0.5$ $\quad$ Q es un factor de diseño.

La respuesta en frecuencia de un filtro prototipo paso bajo de segundo orden es:



- ► A medida que aumenta el factor Q aparece un pico de amplitud creciente en la respuesta en frecuencia del filtro de segundo orden.

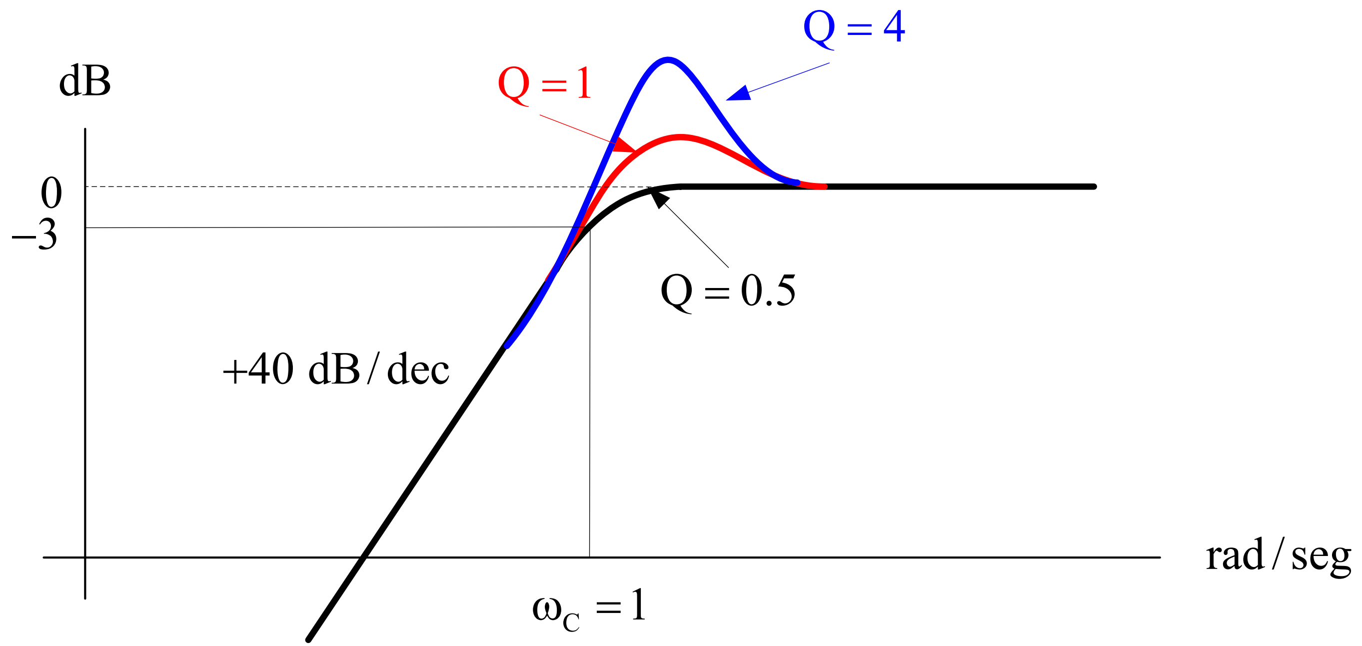
- ► La respuesta en frecuencia de un filtro de segundo orden se aproxima más a la de un filtro ideal que la respuesta de un filtro de primer orden.

a) Función de transferencia de un filtro prototipo paso alto de segundo orden:

La obtenemos a partir de la función de transferencia del filtro prototipo paso bajo de segundo orden realizando la transformación RC-CR (Sustituyendo **s** por **1/s**).

$$A_{vf(N)}(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s^2}\right) + \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{s}\right) + 1} \Rightarrow A_{vf(N)}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

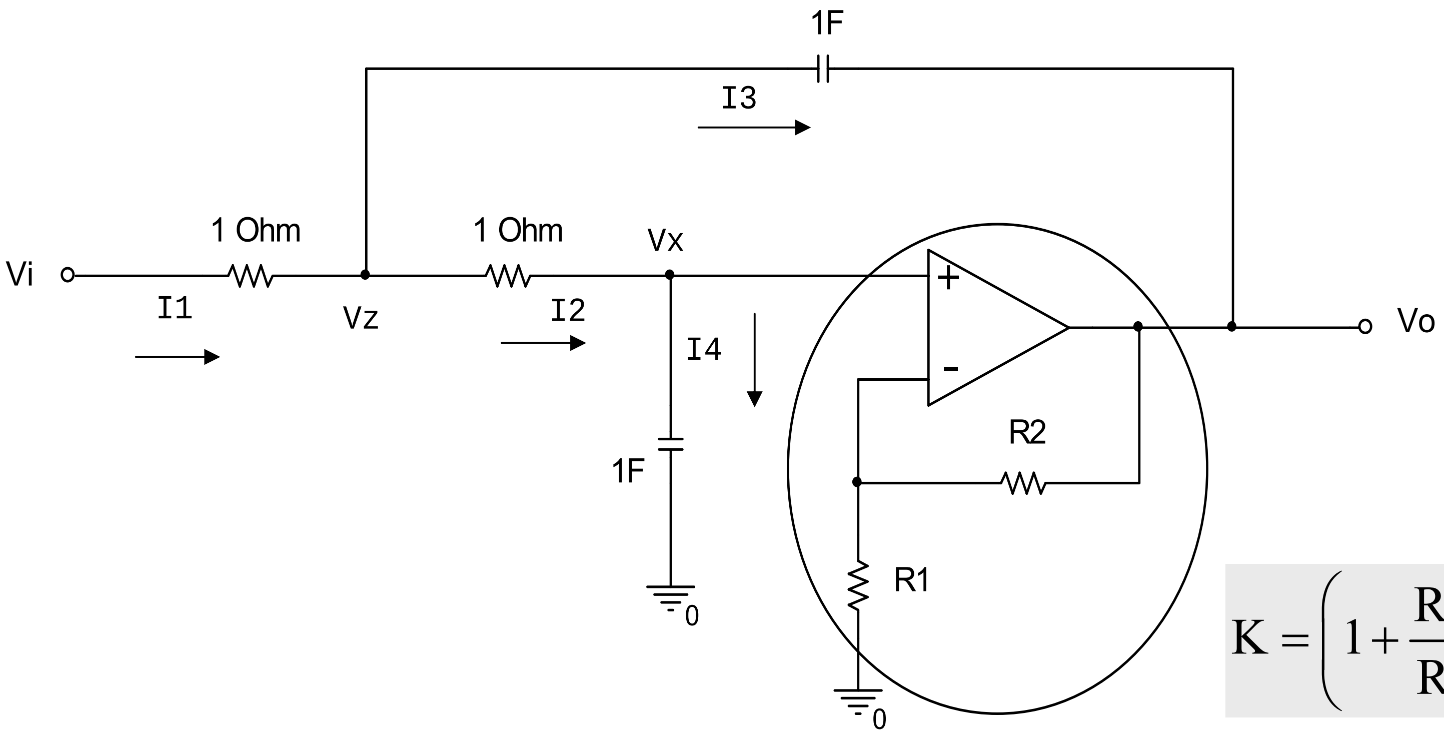
La respuesta en frecuencia de un filtro prototipo paso alto de segundo orden es:



Los Filtros Sallen-Key son circuitos que proporcionan la función de transferencia de los filtros de segundo orden.

A) Filtro prototipo Sallen-Key paso bajo.

Arquitectura del filtro prototipo Sallen-Key paso bajo de segundo orden



$$K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$Vi - Vz = Vz - Vx + sVz - sVo \quad \Rightarrow \quad Vi = (s+2)Vz - Vx - sVo$$

$$I_2 = I_4$$

$$Vz - Vx = sVx \quad \Rightarrow \quad Vz = (s+1)Vx$$

Sustituyendo:

$$Vi = (s+2)(s+1)Vx - Vx - sVo$$

$$Vi = (s^2 + 3s + 2)Vx - Vx - sVo = (s^2 + 3s + 1)Vx - sVo$$

La ganancia del amplificador no inversor del filtro es:

$$K = \frac{V_0}{V_X} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad \Rightarrow \quad V_X = \frac{1}{K} V_0$$

Sustituyendo:

$$Vi=\left(s^2+3s+1\right)\frac{Vo}{K}-sVo$$

$$KVi=\left(s^2+3s+1\right)Vo-sKVo=\left[s^2+\left(3-K\right)s+1\right]Vo$$

Función de transferencia del filtro prototipo paso bajo Sallen_Key:

$$Avf(s)=\frac{Vo}{Vi}=\frac{K}{s^2+\left(3-K\right)s+1}$$

$$A_{vf(N)}(s)=\frac{1}{s^2+\left(3-K\right)s+1}$$

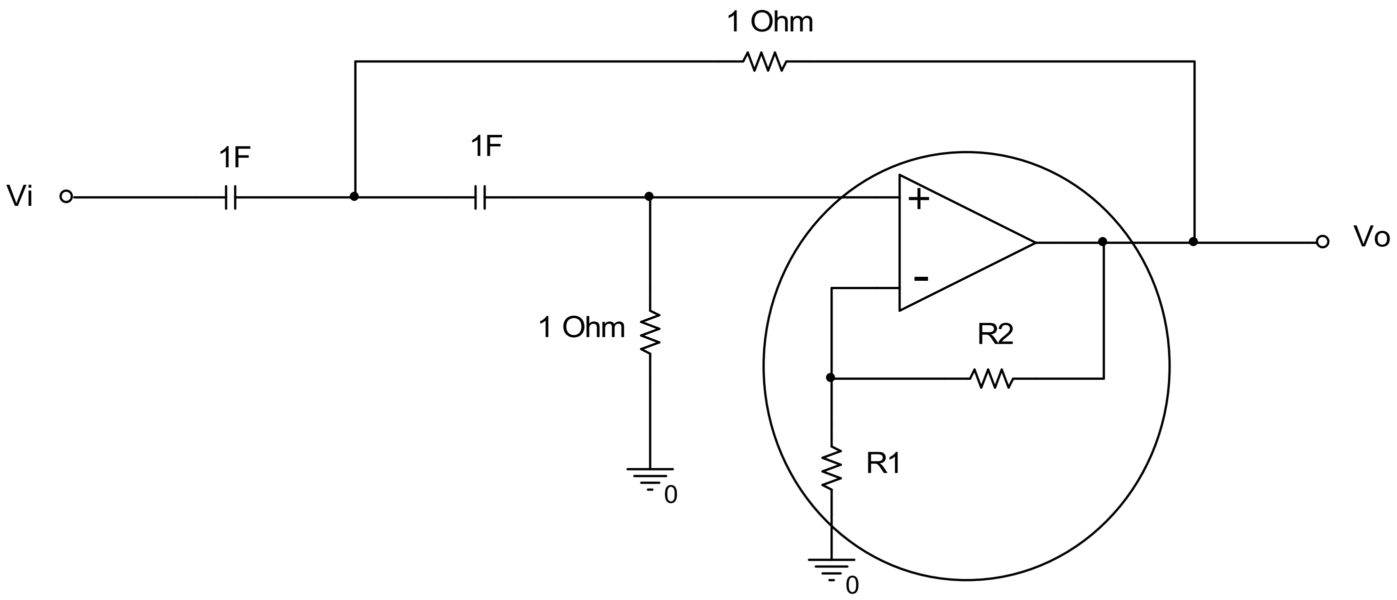
Siendo:

$$\left(3-K\right)=\frac{1}{Q}$$

$$K=\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

B) Filtro prototipo Sallen-Key paso alto.

Para obtener el circuito y la función de transferencia del filtro prototipo Sallen-Key paso alto aplicamos la transformación RC-CR al filtro prototipo Sallen-Key paso bajo :

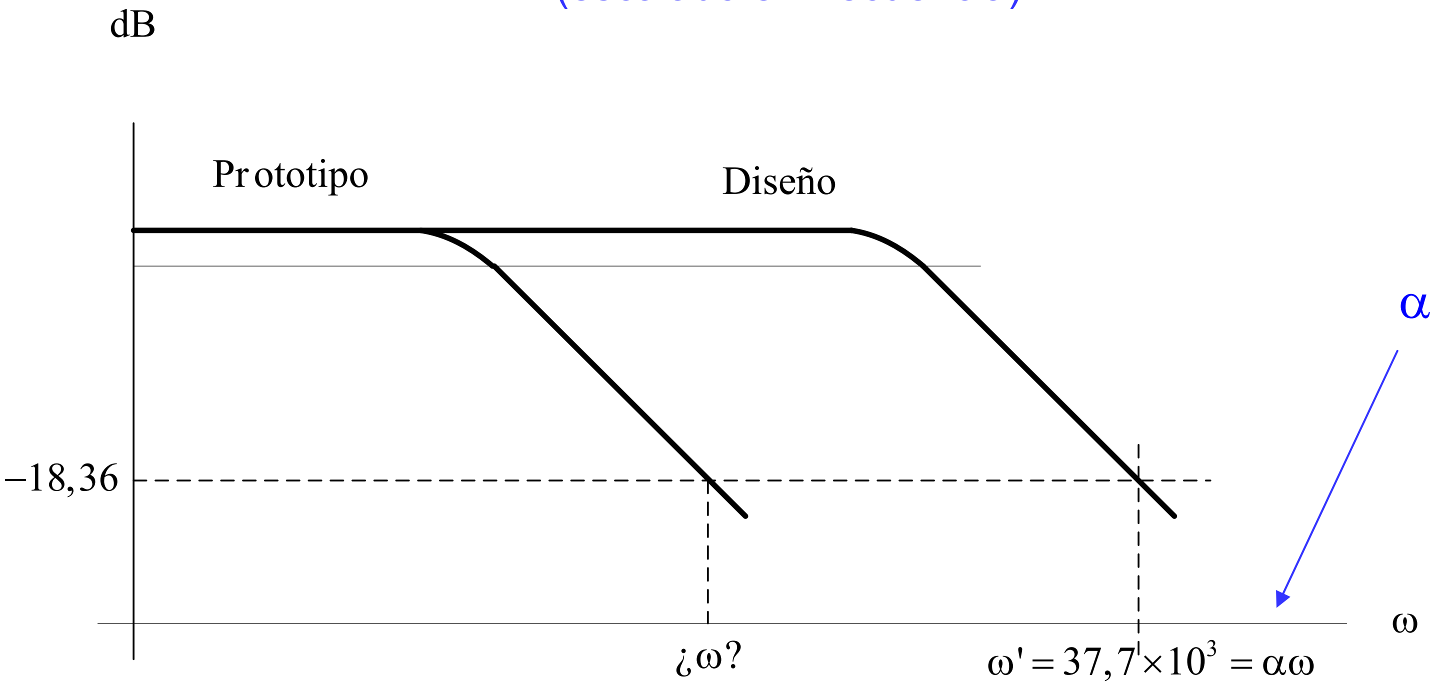


$$A_{vf(N)}(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + (3-K)\frac{1}{s} + 1} = \frac{s^2}{s^2 + (3-K) + 1}$$

Ejercicio 5.

Diseñar un filtro Sallen-Key paso bajo con un parámetro de diseño $Q=\sqrt{2}$ y que tenga una ganancia de – 18.36 dB (una atenuación de 18,36 dB) a la frecuencia de $37{,}7\text{x}10^3$ rad/seg. Usar todas las capacidades del filtro igual a 2 nF.

Respuesta en frecuencia del filtro prototipo y del filtro diseño (escalado en frecuencia)



$$\alpha = \frac{37{,}7\times10^3}{\omega}$$

Para hallar el factor de escalado en frecuencia α necesitamos conocer el valor de la frecuencia ω del filtro prototipo para la cual la ganancia vale – 18.36 dB. La función de transferencia compleja del filtro prototipo es:

$$Avf(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1} = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)s + 1}$$

Función de transferencia en alta frecuencia del filtro prototipo:

$$Avf(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1} = \frac{1}{\left(1-\omega^2\right) + j\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

El módulo, en dB, de la función de transferencia en alta frecuencia del filtro prototipo:

$$\left|Avf(j\omega)\right|_{dB} = -18.36 = -20\log\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}}$$

Operando:

$$\log^{-1}\left[\frac{-18.36}{-20}\right]=8.279=\sqrt{1+\omega^4-2\omega^2+0.5\omega^2}$$

$$68.55=\omega^4-1.5\omega^2+1$$

$$\omega^4-1.5\omega^2-67.55=0$$

$$\omega^2=\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+274.19}}{2}=\frac{1.5\pm 16.62}{2}\cong 9.06$$

$$\omega=\sqrt{9.06}=3\ \text{rad/seg}$$

Sustituyendo ω en α:

$$\alpha=\frac{37.7\times 10^3}{3}=12.566\times 10^3\ \text{rad/seg}$$

Los valores de los componentes del filtro diseñado son:

$$R' = 1\ \Omega$$

$$C' = \frac{1}{12.566 \times 10^{3}} = 79.58 \times 10^{-6}\ \text{F}$$

Para reducir la capacidad desde 79.58x10^{-6} F hasta 2 x10^{-9} F se deberá realizar un escalado en impedancia con un factor de escalado:

$$C = \frac{C'}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C'}{C} = \frac{79{,}58 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-9}} = 39{,}79 \times 10^{3}$$

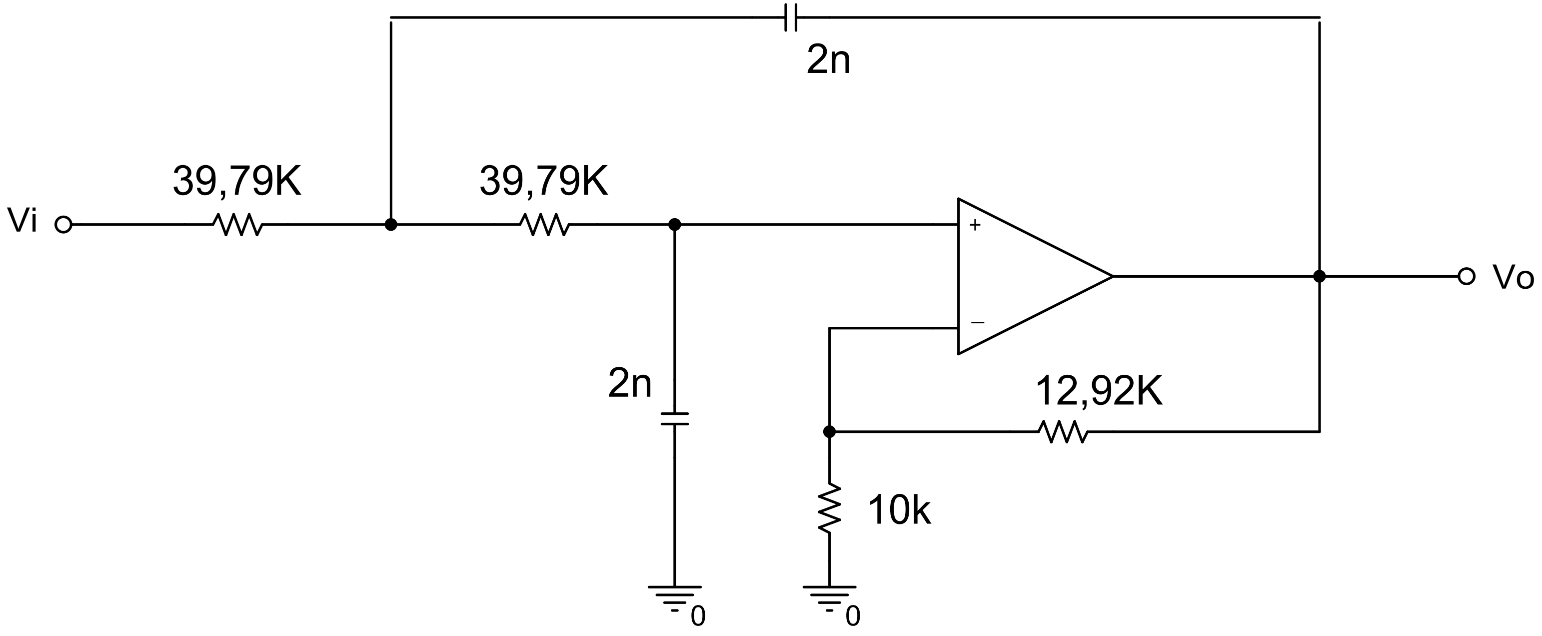
$$R = \beta R' = 39{,}79 \times 10^{3}\ \Omega = 39{,}79\text{K}$$

Por otro lado en el filtro Sallen-Key:

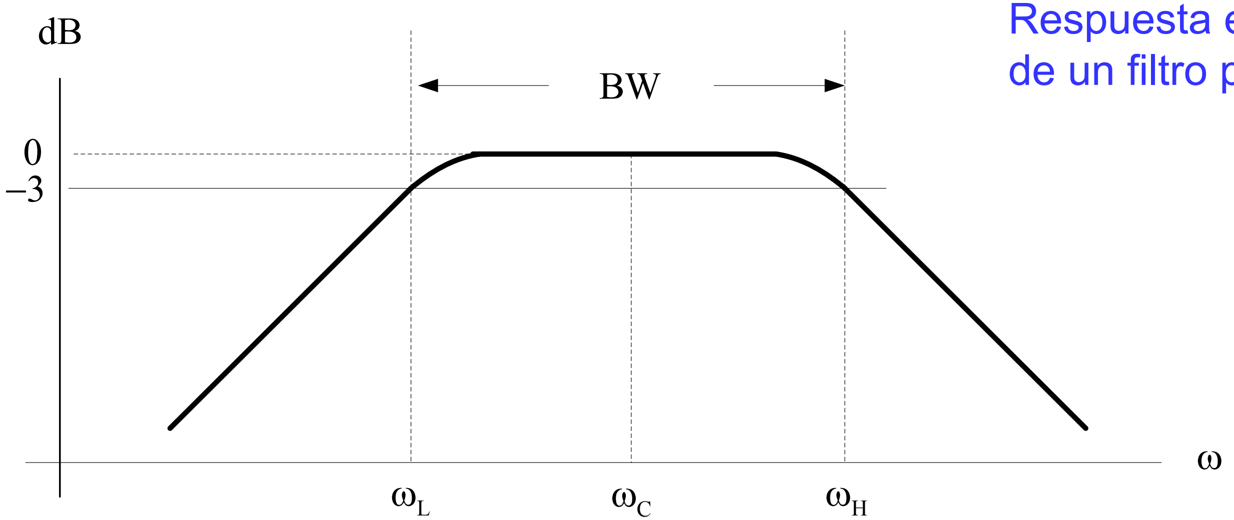
$$3 - K = \frac{1}{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad \Rightarrow \quad 3 - 0.707 = 2.292 = K = 1 + \frac{R2}{R1}$$

$$R2 = 1.292R1$$

Elegimos R_1 = 10 K y R_2 = 12,92 K.



a) Filtros pasa banda.



Respuesta en frecuencia de un filtro pasa banda:

Parámetros:

ω_L = frecuencia de cruce inferior.

ω_H = frecuencia de cruce superior.

$\omega_C = \sqrt{\omega_H \omega_L}$ = frecuencia central.

BW = $(\omega_H - \omega_L)$ = ancho de banda.

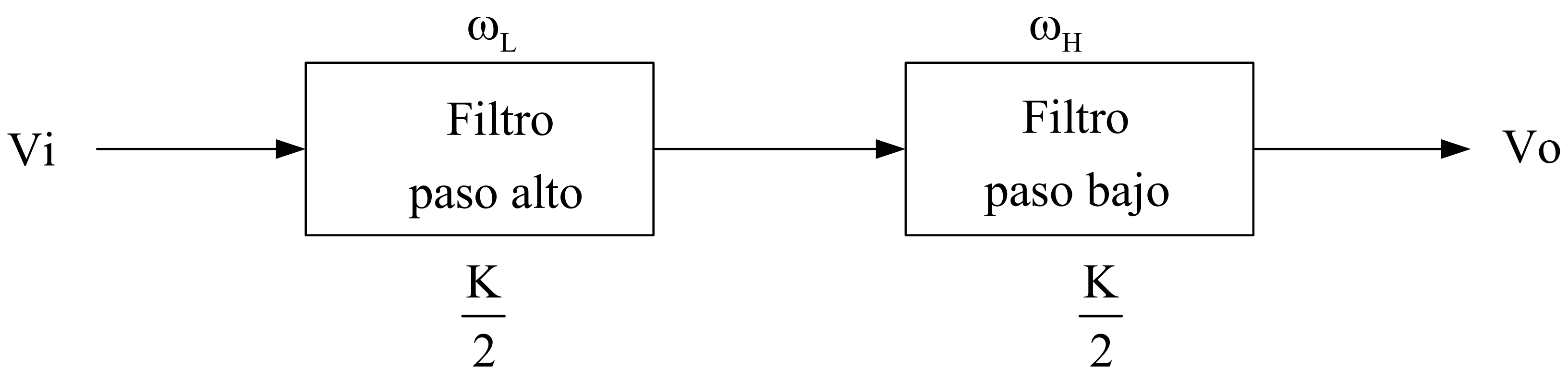
$$Q' = \frac{\omega_C}{BW} = \text{factor de calidad.}$$

Cuanto mayor sea Q', más selectivo será el filtro o más estrecho será su ancho de banda BW.

Existen dos tipos de filtros pasa banda, que se identifican mediante el factor de calidad:

- ► Filtro pasa banda de banda ancha (Q' ≤ 10).
- ► Filtro pasa banda de banda estrecha (Q' > 10).

Una solución para diseñar un filtro pasa banda de banda ancha consiste en utilizar dos filtros; un filtro paso alto con una frecuencia de cruce f_L en serie con un filtro paso bajo con una frecuencia de corte f_H.

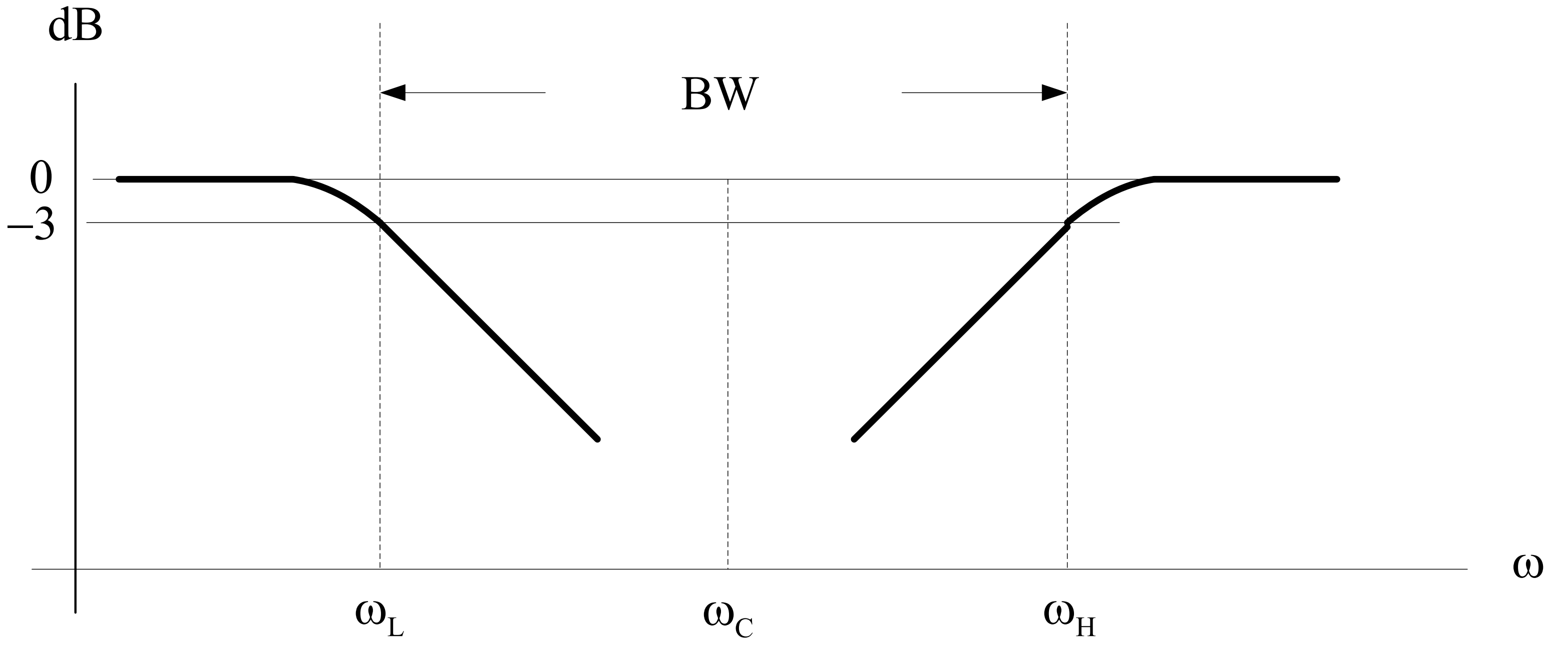


Estos filtros pueden ser de primer orden, de segundo orden o superior.

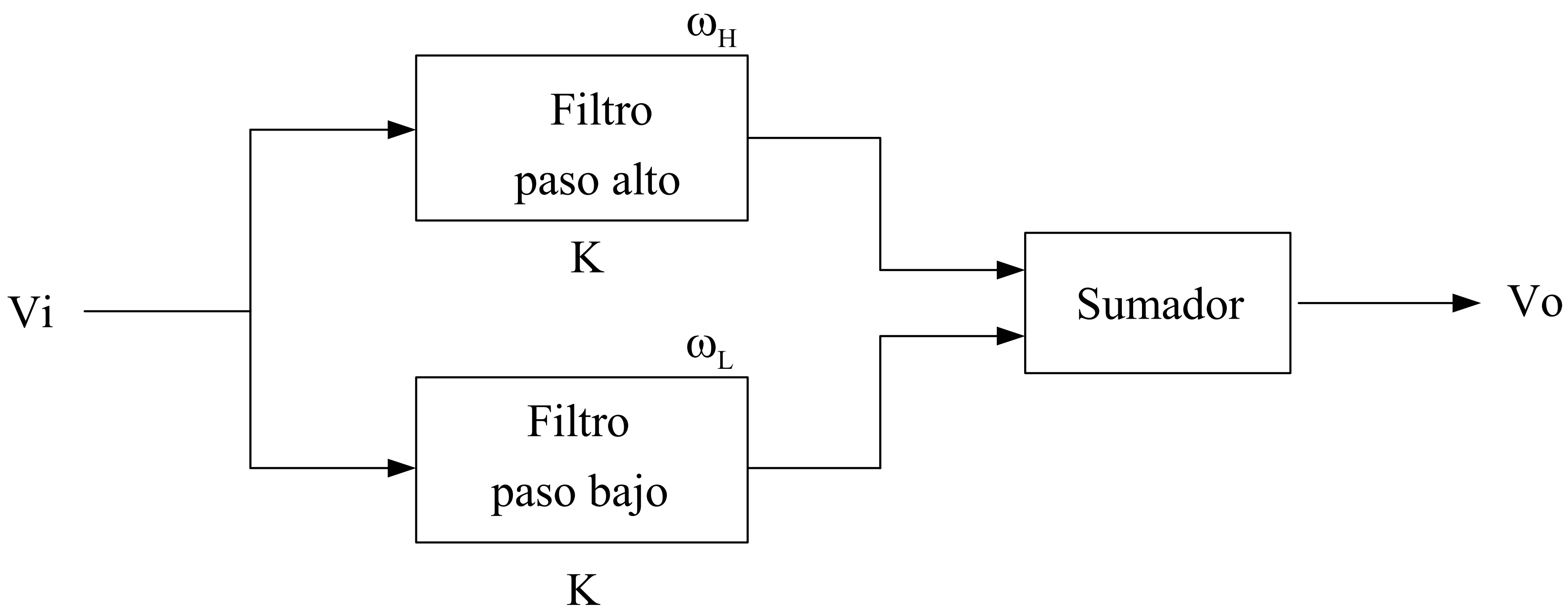
Nota: Los filtros pasa banda de banda estrecha hay que diseñarlos con circuitos específicos, y por tanto no los trataremos en este curso.

a) Filtros de banda eliminada.

Todo lo analizado para un filtro pasa banda es valido para un filtro de banda eliminada.



Un filtro de banda eliminada de banda ancha se puede diseñar colocando un filtro paso bajo con una frecuencia de cruce f_L en paralelo con un filtro paso alto con una frecuencia de corte f_H.



Ejercicio 6.

Diseñar un filtro pasa banda con frecuencias de cruce de 10 K Hz y 1 M Hz, con una ganancia en la banda de paso de K = 16, y con una pendiente en las bandas de rechazo de ± 20 dB/dec.

La frecuencia central es: $$f_C = \sqrt{10^4 10^6} = 10^5 \text{ Hz}$$

El ancho de banda es: $$BW = 10^6 - 10^4 = 99 \times 10^4 \text{ Hz}$$

El factor de calidad es: $$Q' = \frac{10^5}{99 \times 10^4} = 0.101 < 10$$

Es un filtro de banda ancha y podemos diseñarlo con dos filtros, uno paso bajo y otro paso alto, colocados en serie.

Utilizaremos filtros de primer orden, con ganancia K = 4 cada uno. Por lo tanto:

$$4 = 1 + \frac{R2}{R1} \Rightarrow R2 = 3R1$$

Elegimos R1= 10 K y R2 = 30 K.

Para la sección de paso alto la frecuencia de cruce es 10^4 Hz, con lo cual:

$$\alpha_{PA} = 2\pi 10^4 \begin{cases} R'_{PA} = 1\ \Omega \\ C'_{PA} = \dfrac{1}{2\pi 10^4} = 15.915 \times 10^{-6}\ \mathrm{F} \end{cases}$$

Para la sección de paso bajo la frecuencia de cruce es 10^6 Hz,con lo cual:

$$\alpha = 2\pi 10^6 \begin{cases} R'_{PB} = 1\ \Omega \\ C'_{PB} = \dfrac{1}{2\pi 10^6} = 159{,}154 \times 10^{-9}\ \mathrm{F} \end{cases}$$

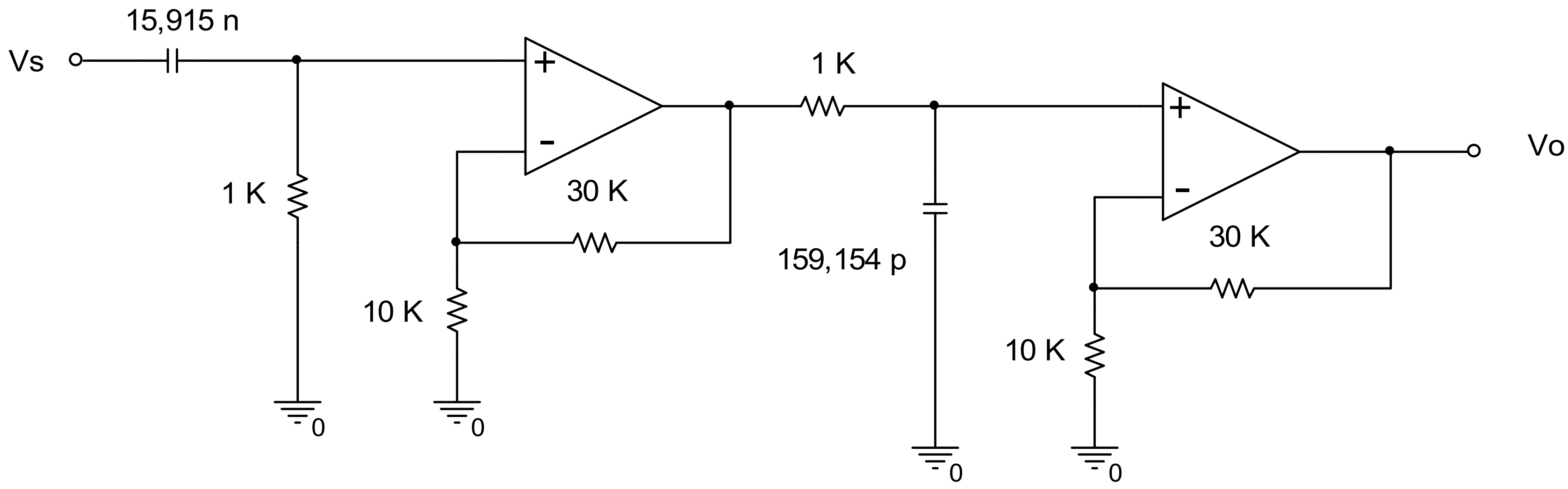
Elegimos $\beta = 10^3$.

$$R_{PA} = R_{PB} = 1 \times \beta = 10^3\ \Omega = 1\ \mathrm{K}$$

$$C_{PA} = \frac{C'_{PA}}{\beta} = \frac{15{,}915 \times 10^{-6}}{10^{3}} = 15{,}915 \times 10^{-9}\ \text{F} = 15{,}915\ \text{nF}$$

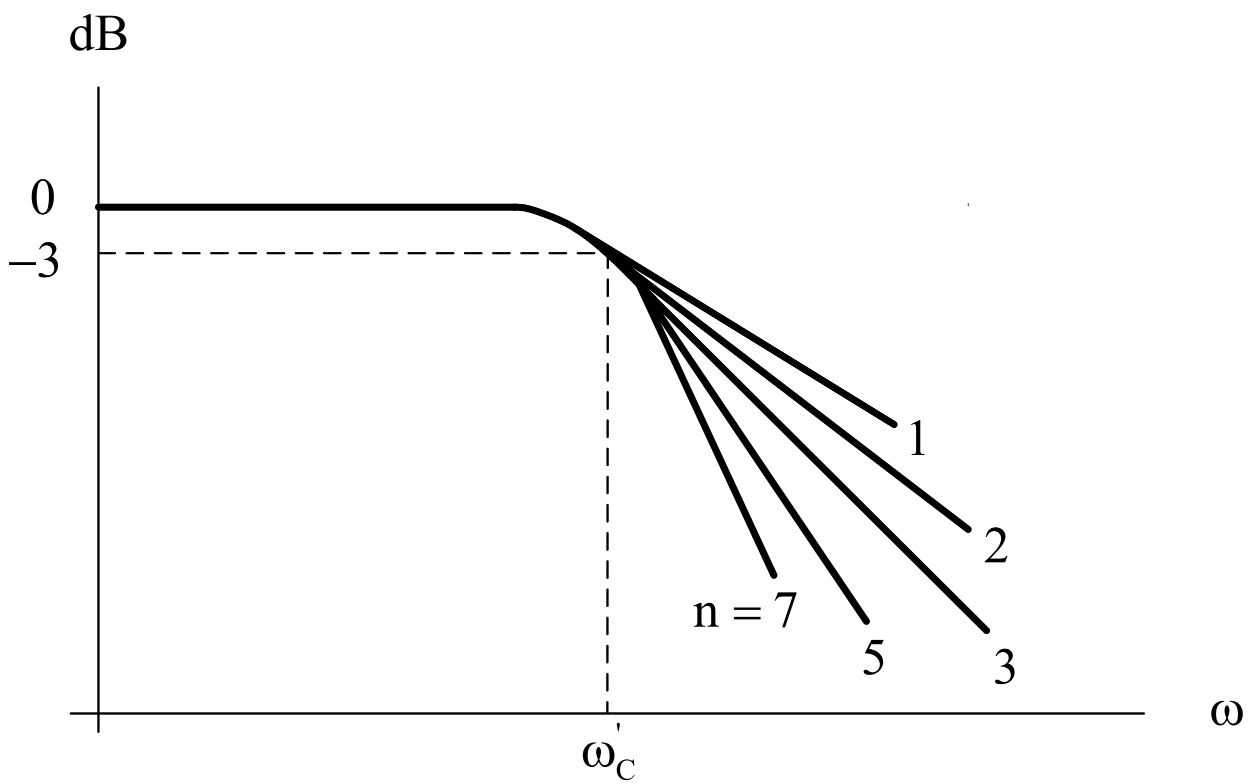
$$C_{PB} = \frac{C'_{PB}}{\beta} = \frac{159{,}154 \times 10^{-9}}{10^{3}} = 159{,}154 \times 10^{-12}\ \text{F} = 15{,}915\ \text{pF}$$

Filtro diseñado.



Para diseñar filtros de orden superior a dos, se utilizan filtros normalizados cuyas funciones de transferencia están compuestas a base de funciones de primer orden y de segundo orden.

En este curso solo analizaremos los filtros normalizados de Butterworth.



Respuesta en frecuencia de una familia de filtros normalizados Butterworth.

Características:

- ► No presentan rizado en la banda de paso.
- ► Todas las curvas pasan por el punto de coordenadas (ω'_C, -3 dB).
- ► A medida que aumenta el orden del filtro aumenta la pendiente de su respuesta en frecencia, y por tanto esta se aproxima más a la respuesta de un filtro ideal.

► La función de transferencia compleja de cualquier filtro Butterworth es:

$$Avf(s) = \frac{1}{D(s)}$$

► El polinomio denominador D(s) está tabulado en forma de polinomios de primer y segundo grado.

Se especifican a continuación una tabla que contiene polinomios Buttreworth normalizados hasta el orden 8.

n	Polinomio D(s)
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1{,}414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.765s+1)(s^2+1{,}848s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0{,}618s+1)(s^2+1{,}618s+1)$
6	$(s^2+0{,}518s+1)(s^2+1{,}414s+1)(s^2+1{,}932s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}445s+1)(s^2+1{,}247s+1)(s^2+1{,}802s+1)$
8	$(s^2+0{,}390s+1)(s^2+1{,}111s+1)(s^2+1{,}663s+1)(s^2+1{,}962s+1)$

Pasos para diseñar un filtro Butterworth:

- **Deducir el orden del filtro. (Si se obtiene un número decimal se aproxima al entero superior.)**
- **Utilizar la tabla anterior para diseñar el filtro a base de filtros de primer y segundo orden colocados en cascada.**

El orden del filtro se obtiene a partir del módulo de la ganancia del filtro:

a) El módulo de la ganancia de un filtro prototipo paso bajo Buterrworth es:

$$\left|Avf(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^{2n}}} \quad \Rightarrow \quad \left|Avf(j\omega)\right|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^{2n}}$$

Siendo:

n = el orden del filtro.

ω = la frecuencia correspondiente a la ganancia $|Avf(j\omega)|_{dB}$

Operando:

$$\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20} = \log\sqrt{1+\omega^{2n}} \quad \Rightarrow \quad \log^{-1}\left(\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20}\right) = \sqrt{1+\omega^{2n}}$$

$$\left[\log^{-1}\left(\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20}\right)\right]^2 = 1+\omega^{2n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log\left(\left[\log^{-1}\left(\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20}\right)\right]^2 - 1\right)}{2\log(\omega)}$$

b) El módulo de la ganancia de un filtro prototipo paso alto Buterrworth es:

$$\left|Avf(j\omega)\right|_{dB} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2n}}}$$

Se observa que la ecuación del módulo de la ganacia del filtro paso alto se diferencia de la de paso bajo en que en lugar de (ω) aparece

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

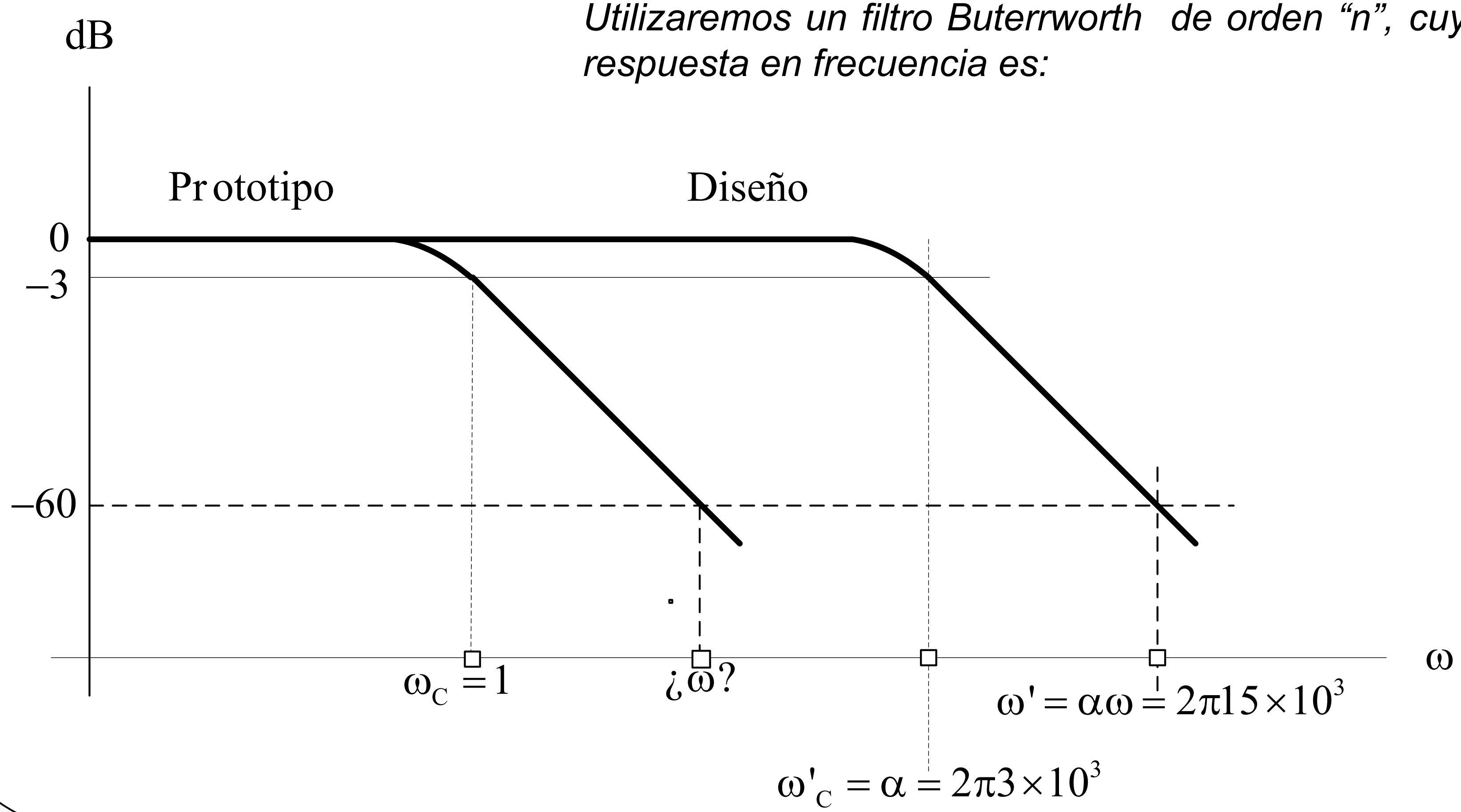
Por tanto, para el filtro prototipo paso alto Buterrworth:

$$n = \frac{\log\left(\left[\log^{-1}\left(\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20}\right)\right]^{2} - 1\right)}{2\log\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$

Ejercicio 6.

Diseñar un filtro activo paso bajo de orden n con un ancho de banda de 3 K Hz y una atenuación de al menos 60 dB a 15 K Hz.

Utilizaremos un filtro Buterrworth de orden "n", cuya respuesta en frecuencia es:



El primer paso es determinar el valor del orden del filtro prototipo, mediante la ecuación:

$$n = \frac{\log\left(\left[\log^{-1}\left(\frac{\left|Avf(j\omega)\right|_{dB}}{-20}\right)\right]^2 - 1\right)}{2\log(\omega)}$$

Para ello es necesario calcular el valor de la frecuencia ω del filtro prototipo para – 60 dB.

$$\omega = \frac{\omega'}{\alpha} = \frac{2\pi 15\times 10^3}{2\pi 3\times 10^3} = 5 \text{ rad/seg}$$

Sustituyendo valores:

$$n = \frac{\log\left(\left[\log^{-1}\left(\frac{-60}{-20}\right)\right]^2 - 1\right)}{2\log(5)} = \frac{\log\left(1000^2 - 1\right)}{1{,}39794} = \frac{5{,}99999}{1{,}39794} = 4{,}292$$

Elegimos n = 5

De la tabla anterior obtenemos el siguiente polinomio:

D(s)=(s+1)(s2+0,618s+1)(s2+1,618s+1)

Con lo que la función de transferencia del filtro es:

$$\mathrm{Avf}(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s^2 + 0.681s + 1} \times \frac{1}{s^2 + 1{,}618s + 1}$$

Esta función de transferencia la generaremos con tres filtros en serie, uno de primer orden y dos de segundo orden:

Cálculo de las capacidades y resistencias de los tres filtros:

$$R' = 1\ \Omega$$

$$C' = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\pi 3 \times 10^3} = 53{,}1 \times 10^6\ \mathrm{F}$$

Con un escalado de impedancia con β =10³:

$$R = \beta R' = 1\ K$$

$$C = \frac{C'}{\beta} = \frac{53{,}1\times 10^{-6}}{10^{3}} = 53.1\times 10^{-9}\ F = 53{,}1nF$$

Calculo de las resistencias de los amplificadores de dos los filtros de segundo orden:

$$3 - K^{*} = 0{,}618 \;\;\Rightarrow\;\; K^{*} = 2{,}382 = \left(1 + \frac{R_2^{*}}{R_1^{*}}\right) \;\;\Rightarrow\;\; R_2^{*} = 1{,}382 R_1^{*}$$

$$\text{Tomamos}:\;\; R_1^{*} = 10\ K \;\;\text{y}\;\; R_2^{*} = 13{,}82\ K$$

$$3 - K^{**} = 1{,}615 \;\;\Rightarrow\;\; K^{**} = 2{,}382 = \left(1 + \frac{R_2^{**}}{R_1^{**}}\right) \;\;\Rightarrow\;\; R_2^{**} = 0{,}328 R_1^{**}$$

$$\text{Tomamos}:\;\; R_1^{**} = 10\ K \;\;\text{y}\;\; R_2^{**} = 3{,}28\ K$$

El filtro diseñado es: