

Interpretación de las soluciones de $X \triangleleft R = X$ como bloques de tolerancia borrosa y su relación con el análisis de conceptos borrosos.

Cristina Alcalde¹ Ana Burusco² Ramón Fuentes-González²

¹ Departamento de Matemática Aplicada. Universidad del País Vasco.
Escuela Universitaria Politécnica. Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastián, Spain.
c.alcalde@ehu.es

² Departamento de Automática y Computación. Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía, 31006 Pamplona, Spain.
{burusco, rfuentes}@unavarra.es

Resumen

Utilizando una relación borrosa $R \in [0, 1]^{E \times E}$ reflexiva y simétrica, se caracterizan ciertos subconjuntos borrosos $B \in [0, 1]^E$, demostrando que juegan el papel de los subconjuntos ordinarios llamados *bloques* en el contexto de relaciones de tolerancia nítidas. Finalmente, se prueba que estos nuevos bloques borrosos B pueden determinarse mediante parte del retículo de Conceptos borrosos asociado al contexto $([0, 1], E, E, R)$.

Palabras Clave: Análisis de Conceptos Formales, Análisis de Conceptos Borrosos, Relación borrosa, Tolerancia borrosa.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, dada una tolerancia borrosa $R \in [0, 1]^{E \times E}$ sobre un referencial cualquiera E , (finito o no), demostramos que existe una familia distinguida $\mathcal{T} \neq \emptyset$ de subconjuntos borrosos $B \in [0, 1]^E$ llamados *bloques de tolerancia borrosa* que constituye un cubrimiento del referencial: $E = \bigvee_{B \in \mathcal{T}} B$. Probamos

además que esos bloques son las soluciones de la ecuación relacional borrosa $X \triangleleft R = X$ donde $\triangleleft$ es la composición “triángulo” asociada a una implicación residuada. Finalmente, relacionamos el cálculo de los bloques borrosos B con el cálculo de conceptos borrosos ([7], [1], [3], [13], [14]) asociados al contexto $([0, 1], E, E, R)$ en el que los conjuntos de objetos y atributos son iguales al referencial E .

1.1. BLOQUES ASOCIADOS A TOLERANCIAS

En la teoría de relaciones binarias nítidas, dados un referencial $E \neq \emptyset$ y una *tolerancia* R en E , (es decir, una relación nítida $R \subseteq E \times E$ reflexiva y simétrica), se asocia al par (E, R) la siguiente familia $\mathcal{SE}_R$ de subconjuntos nítidos de E :

$$\mathcal{SE}_R = \{A \in \wp(E) / A \times A \subseteq R\}$$

Los subconjuntos A de $\mathcal{SE}_R$ reciben el nombre de *pre-bloques* [2] del sistema algebraico (E, R) y este par es un *espacio de tolerancia* [9].

El conjunto $\mathcal{SE}_R$ de pre-bloques es no vacío, ya que tanto el subconjunto vacío $\emptyset$ como los subconjuntos unitarios $\{x\}$ de E , son pre-bloques de (E, R) .

El par $(\mathcal{SE}_R, \subseteq)$ es un subconjunto ordenado del retículo $(\wp(E), \subseteq)$. Se puede demostrar [2] que, para cualquier E (finito o no) y para cualquier tolerancia R en E , el conjunto ordenado $(\mathcal{SE}_R, \subseteq)$ es inductivo, por lo que su subconjunto de maximales es no vacío. Sea $\mathcal{BE}_R = \{B \in \mathcal{SE}_R / B \text{ es maximal en } (\mathcal{SE}_R, \subseteq)\}$ ese subconjunto. Si un pre-bloque $A \in \mathcal{SE}_R$ no es maximal diremos que es *pre-bloque propio*. Cada uno de los maximales $B \in \mathcal{BE}_R$ recibe el nombre de *bloque* [2] del espacio de tolerancia (E, R) . El conjunto de bloques $\mathcal{BE}_R$ constituye un cubrimiento de E , es decir, $E = \bigcup_{B \in \mathcal{BE}_R} B$ (Figura 1).

Si R es además transitiva, es decir, R es una equivalencia en E , entonces el conjunto $\mathcal{BE}_R$ de bloques coincide con el conjunto de clases de equivalencia de (E, R) . En este caso, el cubrimiento de E resulta ser una partición del mismo.

1.2. RETÍCULO DE CONCEPTOS FORMALES

Desde una perspectiva distinta, se puede considerar el espacio de tolerancia (E, R) mencionado en la sección

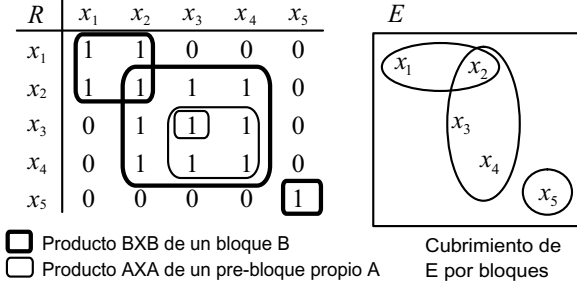


Figura 1: Cubrimiento por bloques.

anterior como el contexto (E, E, R) en el que coinciden los conjuntos de *objetos* y de *atributos* y en el que la relación de *incidencia* es la tolerancia R .

En este caso, el *retículo de conceptos formales* $(\mathcal{L}(E, E, R), \leq)$ ([16], [11]), está formado por el conjunto $\mathcal{L}(E, E, R)$ de pares de subconjuntos $(A, B) \in \wp(E) \times \wp(E)$ tales que $A_1 = B$ y $B_2 = A$, siendo $A_1 = \{y / xRy \ \forall x \in A\}$ y $B_2 = \{x / xRy \ \forall y \in B\}$. Si (A, B) es uno de esos conceptos, entonces A es su *extensión* (subconjunto de objetos) y B es su *intensión* (subconjunto de atributos).

El orden $\leq$ del retículo $(\mathcal{L}(E, E, R), \leq)$ viene dado por

$$(A, B) \leq (C, D) \iff A \subseteq C$$

o lo que es equivalente, $B \supseteq D$.

Se demuestra que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $(A, B) \in \mathcal{L}(E, E, R)$ sí y solo si $A \times B \subseteq R$ es un “*rectángulo maximal*” de la tolerancia R . (Figura 2).

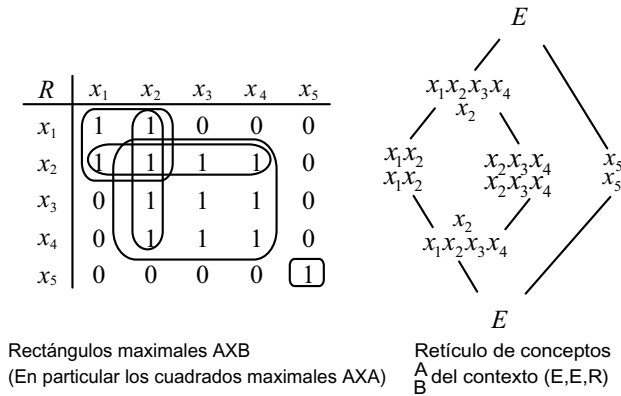


Figura 2: Rectángulos maximales y conceptos formales

1.3. TOLERANCIAS BORROSAS

En este trabajo estudiamos espacios de tolerancia (E, R) en los que R es una *tolerancia borrosa* [15], [8],

también llamada *compatibilidad borrosa* [12]. Es decir, R es una aplicación $R : E \times E \rightarrow [0, 1]$ tal que $R(x, x) = 1 \ \forall x \in E$ y $R(x, y) = R(y, x) \ \forall (x, y) \in E \times E$.

En lo que sigue, la expresión R^{op} representa la relación opuesta de R tal que $R^{op}(x, y) = R(y, x) \ \forall (x, y) \in E \times E$.

Los elementos que utilizamos en el trabajo para obtener los bloques asociados a una de esas tolerancias borrosas R , son los siguientes:

- (i) Una t -norma $\otimes$ en $[0, 1]$ continua a la izquierda, es decir, $\alpha \otimes \sup M = \sup(\alpha \otimes M) \ \forall \alpha \in [0, 1] \ \forall M \subseteq [0, 1]$.
- (ii) La implicación residuada $\rightsquigarrow$ asociada a esa t -norma: $\alpha \rightsquigarrow \beta = \sup\{\gamma / \alpha \otimes \gamma \leq \beta\} \ \forall (\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$.
- (iii) Un referencial ordinario E tal que $|E| \geq 2$.
- (iv) El operador “ $\otimes$ -producto” entre subconjuntos borrosos $\tilde{\times} : [0, 1]^E \times [0, 1]^E \rightarrow [0, 1]^E$ asociado a la t -norma $\otimes$, definido, $\forall A \in [0, 1]^E, \ \forall B \in [0, 1]^E$ y $\forall (x, y) \in E \times E$, por:

$$(A \tilde{\times} B)(x, y) = A(x) \otimes B(y)$$

- (v) El operador “ $\rightsquigarrow$ -triángulo” entre subconjuntos borrosos $\triangleleft : [0, 1]^E \times [0, 1]^E \rightarrow [0, 1]^E$ asociado a la implicación $\rightsquigarrow$, definido, $\forall A \in [0, 1]^E, \ \forall R \in [0, 1]^E$ y $\forall y \in E$, por:

$$(A \triangleleft R)(y) = \inf\{A(x) \rightsquigarrow R(x, y) / x \in E\}$$

Definición 1. Llamaremos $\otimes$ -rectángulo en $E \times E$ a una relación borrosa $Q \in [0, 1]^{E \times E}$ que pueda representarse como $\otimes$ -producto $A \tilde{\times} B$ de subconjuntos borrosos de E . Si se verifica que $A = B$, diremos que $Q = A \tilde{\times} A$ es un $\otimes$ -cuadrado.

2. SOLUCIONES DE $X \triangleleft R = X$

En esta sección, se dan algunas propiedades del operador producto $\tilde{\times}$ y se prueba que el operador $\triangleleft$ es residuo de aquél. Posteriormente, se demuestra que dada una tolerancia borrosa R , la ecuación $X \triangleleft R = X$ tiene siempre solución y que cada solución es un subconjunto borroso con cierto carácter de maximal.

Proposición 1. Se verifica:

- (i) $(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \tilde{\times} B = \bigvee_{A \in \mathcal{F}} (A \tilde{\times} B) \ \forall \mathcal{F} \subseteq [0, 1]^E$,
 $A \tilde{\times} (\bigvee_{B \in \mathcal{G}} B) = \bigvee_{B \in \mathcal{G}} (A \tilde{\times} B) \ \forall \mathcal{G} \subseteq [0, 1]^E$
- (ii) $(A \tilde{\times} B)^{op} = B \tilde{\times} A \ \forall A, B \in [0, 1]^E$ y, en consecuencia, todo $\otimes$ -cuadrado $A \tilde{\times} A$ es una relación borrosa simétrica: $(A \tilde{\times} A)^{op} = A \tilde{\times} A$.

$$(iii) ((A \tilde{\times} B) \leq R) \Leftrightarrow (B \leq (A \triangleleft R)) \Leftrightarrow (A \leq (B \triangleleft R^{op})).$$

Demostración.

El apartado (i) es consecuencia inmediata de la conmutatividad y del carácter de continua a la izquierda que posee la t -norma $\otimes$. El apartado (ii) es inmediato a partir de la definición de $\tilde{\times}$ y de la conmutatividad de la t -norma $\otimes$. (iii) Supongamos que $A \tilde{\times} B \leq R$. Entonces, para todo x y para todo y en E , se verifica $A(x) \otimes B(y) \leq R(x, y)$. Sea y un elemento cualquiera de E y hagamos que x recorra E . Teniendo en cuenta que la implicación $\rightsquigarrow$ es el residuo de la t -norma $\otimes$, obtenemos que, para todo x , se verifica:

$$B(y) \leq (A(x) \rightsquigarrow R(x, y)),$$

luego

$$B(y) \leq \inf_{x \in E} (A(x) \rightsquigarrow R(x, y)) = (A \triangleleft R)(y).$$

Y ésto ocurre para cualquier y , en consecuencia,

$$B \leq (A \triangleleft R).$$

Supongamos ahora que se cumple esta última desigualdad entre borrosos, entonces

$$B(y) \leq (A(x) \rightsquigarrow R(x, y)) \quad \forall x, y \in E,$$

luego

$$A(x) \otimes B(y) \leq R(x, y) \quad \forall (x, y) \in E \times E.$$

Es decir:

$$A \tilde{\times} B \leq R.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el operador op es isótono, junto con el resultado del apartado (ii) y lo que acabamos de demostrar, tenemos que

$$(A \tilde{\times} B) \leq R \Leftrightarrow ((A \tilde{\times} B)^{op} \leq R^{op}) \Leftrightarrow (B \tilde{\times} A \leq R^{op}) \Leftrightarrow (A \leq (B \triangleleft R^{op})).$$

□

La primera equivalencia del apartado (iii):

$$(A \tilde{\times} B) \leq R \Leftrightarrow B \leq (A \triangleleft R),$$

demuestra que el operador $\triangleleft$ es el residuo [5] del operador $\tilde{\times}$. En consecuencia, se cumplen las siguientes propiedades de la teoría de residuos:

Proposición 2. (Véase [5]). Los operadores $\triangleleft$ y $\tilde{\times}$ son tales que:

$$A \triangleleft R = \bigvee \{W \in [0, 1]^E / (A \tilde{\times} W) \leq R\}$$

$$A \tilde{\times} B = \bigwedge \{Q \in [0, 1]^E / (A \triangleleft Q) \geq B\}$$

$$A \triangleleft (\bigwedge_{R \in \mathcal{F}} R) = \bigwedge_{R \in \mathcal{F}} (A \triangleleft R) \quad \forall \mathcal{F} \subseteq [0, 1]^E$$

$$A_1 \leq A_2 \implies (A_1 \triangleleft R) \geq (A_2 \triangleleft R) \quad \forall R$$

También, de ese mismo apartado (iii) de la Proposición 1, se deduce el siguiente resultado que utilizaremos más adelante en este trabajo.

Corolario 1. Se verifican las equivalencias:

$$(A \tilde{\times} A) \leq R \Leftrightarrow (A \leq (A \triangleleft R)) \Leftrightarrow (A \leq (A \triangleleft R^{op})).$$

Es conocido [3], que la aplicación residuada $\rightsquigarrow$ es tal que para todo $M \subseteq [0, 1]$ y para todo $\beta \in [0, 1]$ verifica $\sup M \rightsquigarrow \beta = \inf(M \rightsquigarrow \beta)$. No está demostrado que se cumpla una igualdad análoga para el operador $\triangleleft$.

En general, para cualquier R , sólo se puede asegurar la desigualdad: $(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R \leq \bigwedge_{A \in \mathcal{F}} (A \triangleleft R)$.

En la siguiente proposición demostramos que para las relaciones borrosas simétricas sí se verifica la igualdad.

Proposición 3. Si $R = R^{op}$ entonces

$$(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R = \bigwedge_{A \in \mathcal{F}} (A \triangleleft R) \quad \forall \mathcal{F} \subseteq [0, 1]^E.$$

Demostración.

Si $\mathcal{F} = \emptyset$ la primera de las expresiones separadas por la igualdad equivale a

$$(\bigvee_{[0,1]^E} \emptyset) \triangleleft R = (\emptyset \triangleleft R) = E \times E,$$

y la segunda a $(\bigwedge_{[0,1]^E} \emptyset) = E \times E$. Supongamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, se verifica la implicación:

$$\begin{aligned} A \leq (\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \quad \forall A \in \mathcal{F} &\implies \\ &\implies (A \triangleleft R) \geq (\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R \quad \forall A \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

que muestra que $(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R$ es un minorante del subconjunto $\{(A \triangleleft R) / A \in \mathcal{F}\}$. Sea H otro minorante, es decir:

$$H \leq (A \triangleleft R) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Según hemos demostrado en la Proposición 1, esta expresión es equivalente a $A \leq (H \triangleleft R^{op}) \quad \forall A \in \mathcal{F}$, y que, al ser $R = R^{op}$, se puede escribir:

$$A \leq (H \triangleleft R) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

lo que a su vez es equivalente a

$$(H \tilde{\times} A) \leq R \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

De este resultado deducimos que $\bigvee_{A \in \mathcal{F}} (H \tilde{\times} A) \leq R$, luego $(H \tilde{\times} \bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \leq R$. Aplicando el opuesto op , tenemos

$$(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \tilde{\times} H \leq R^{op} = R,$$

que, finalmente, equivale a $H \leq (\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R$. Y esto prueba que $(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R$ es el mayor de los minorantes. Es decir, que

$$(\bigvee_{A \in \mathcal{F}} A) \triangleleft R = \bigwedge_{A \in \mathcal{F}} (A \triangleleft R).$$

□

Estudiamos a continuación dos clases $\mathcal{H}$ y $\mathcal{T}$ de subconjuntos borrosos caracterizados por la relación R y el operador $\triangleleft$. Esos subconjuntos servirán como base de las definiciones de bloques que aparecen más adelante en este trabajo.

Consideremos el subconjunto ordinario $\mathcal{H} \subset [0, 1]^E$ formado por los subconjuntos borrosos $A \in [0, 1]^E$ tales que $A \leq (A \triangleleft R)$:

$$\mathcal{H} = \{A \in [0, 1]^E / A \leq (A \triangleleft R)\}$$

Y el subconjunto ordinario $\mathcal{T} \subset \mathcal{H}$ de los subconjuntos borrosos $B \in [0, 1]^E$ tales que $B = (B \triangleleft R)$:

$$\mathcal{T} = \{B \in [0, 1]^E / B = (B \triangleleft R)\}$$

Este último $\mathcal{T}$ puede ser vacío, pero $\mathcal{H} \neq \emptyset$, pues es evidente que $\emptyset \in \mathcal{H}$. Además, el conjunto de los “puntos borrosos” $\mathcal{S} = \{x_\alpha / x \in E, \alpha \neq 0\}$ tales que $x_\alpha(x) = \alpha$ y $x_\alpha(y) = 0$ si $y \neq x$, está contenido en $\mathcal{H}$, ya que $(x_\alpha \triangleleft R)(y) = \alpha \rightsquigarrow R(x, y)$, y como $R(x, x) = 1$, se obtiene:

$$x_\alpha \leq (x_\alpha \triangleleft R) \quad \forall x \in E \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Proposición 4. (i) El subconjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{H}, \leq)$ es un semiideal de $([0, 1]^E, \leq)$.

(ii) Si $R = R^{op}$, el semiideal $(\mathcal{H}, \leq)$ es inductivo y en consecuencia, por el axioma de Zorn [10]: el subconjunto $MAXIMAL(\mathcal{H})$ de elementos maximales de $(\mathcal{H}, \leq)$ es no vacío.

(iii) El conjunto $\mathcal{T}$ es un subconjunto de $MAXIMAL(\mathcal{H})$.

Demostración.

(i) Sea $A \in \mathcal{H}$ y sea $D \leq A$. Entonces se verifica que $(D \triangleleft R) \geq (A \triangleleft R) \geq A \geq D$, lo que prueba que $D \in \mathcal{H}$. (ii) Sea $(\mathcal{C}, \leq)$ una cadena incluida en $(\mathcal{H}, \leq)$. Hay que demostrar que $\mathcal{C}$ está acotada en $\mathcal{H}$. En primer lugar, demostremos que si C y D son elementos de la cadena $\mathcal{C}$ entonces $C \leq (D \triangleleft R)$. En efecto, si $C \leq D$ entonces $C \leq D \leq (D \triangleleft R)$. Si $D \leq C$ entonces $D \leq C \leq (C \triangleleft R) \leq (D \triangleleft R)$. De este resultado se deduce que

$$\bigvee \mathcal{C} \leq (D \triangleleft R) \quad \forall D \in \mathcal{C},$$

es decir, $\bigvee \mathcal{C} \leq \bigwedge_{D \in \mathcal{C}} (D \triangleleft R)$. Finalmente, como $R = R^{op}$, por la Proposición 3, se verifica

$$\bigwedge_{D \in \mathcal{C}} (D \triangleleft R) = (\bigvee \mathcal{C}) \triangleleft R,$$

luego obtenemos que $\bigvee \mathcal{C} \leq (\bigvee \mathcal{C}) \triangleleft R$, que prueba que $\bigvee \mathcal{C} \in \mathcal{H}$ y que, evidentemente, es un mayorante de $\mathcal{C}$. Esto demuestra que $(\mathcal{H}, \leq)$ es inductivo y, en consecuencia, $MAXIMAL(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ según el lema de Zorn [10]. (iii) Si $\mathcal{T} = \emptyset$, evidente. Supongamos que $B \in \mathcal{T}$ y sea $A \in \mathcal{H}$ tal que $B \leq A$, entonces, de $A \geq B = (B \triangleleft R) \geq ((A \triangleleft R) \geq A)$ se deduce que $A = B$. Es decir, $B \in MAXIMAL(\mathcal{H})$. □

Si R es una tolerancia borrosa en E , la inclusión $\mathcal{T} \subseteq MAXIMAL(\mathcal{H})$ se convierte en igualdad:

Proposición 5. Si R es tolerancia borrosa, entonces $\mathcal{T} = MAXIMAL(\mathcal{H})$ y, en consecuencia, $\mathcal{T} \neq \emptyset$.

Demostración.

Sabemos que se verifica la inclusión $\mathcal{T} \subseteq MAXIMAL(\mathcal{H})$. Demostremos la inclusión en el otro sentido. Sea $A \in MAXIMAL(\mathcal{H})$. Entonces $A \leq (A \triangleleft R)$. Supongamos que $A < (A \triangleleft R)$. Entonces, existirá al menos un $w \in E$ tal que $A(w) < (A \triangleleft R)(w)$. Sea $A_w \in [0, 1]^E$ definido por $A_w(x) = A(x)$, si $x \neq w$, y $A_w(w) = (A \triangleleft R)(w)$. Se verifica: $A < A_w = A \vee w_{(A \triangleleft R)(w)}$, donde $w_{(A \triangleleft R)(w)}(x) = 0$ si $x \neq w$ y $w_{(A \triangleleft R)(w)}(w) = (A \triangleleft R)(w)$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_w \triangleleft R &= (A \vee w_{(A \triangleleft R)(w)}) \triangleleft R = \\ &= (A \triangleleft R) \wedge (w_{(A \triangleleft R)(w)} \triangleleft R). \end{aligned}$$

Demostremos que $A_w \leq A_w \triangleleft R$. Para $x \neq w$, teniendo en cuenta que $\alpha \leq (\alpha \rightsquigarrow \beta) \rightsquigarrow \beta$ que aparece demostrado en [3] y que $R(x, w) = R(w, x)$, se verifica:

$$\begin{aligned} (A_w \triangleleft R)(x) &= (A \triangleleft R)(x) \wedge (w_{(A \triangleleft R)(w)} \triangleleft R)(x) = \\ &= (A \triangleleft R)(x) \wedge ((A \triangleleft R)(w) \rightsquigarrow R(w, x)) = \\ &= (A \triangleleft R)(x) \wedge (\inf_z \{A(z) \rightsquigarrow R(z, w)\} \rightsquigarrow R(w, x)) \geq \\ &= (A \triangleleft R)(x) \wedge ((A(x) \rightsquigarrow R(x, w)) \rightsquigarrow R(w, x)) = \\ &= (A \triangleleft R)(x) \wedge ((A(x) \rightsquigarrow R(w, x)) \rightsquigarrow R(w, x)) \geq \\ &= (A \triangleleft R)(x) \wedge A(x) = A(x) = A_w(x). \end{aligned}$$

Para $x = w$, teniendo en cuenta que $R(w, w) = 1$:

$$\begin{aligned} (A_w \triangleleft R)(w) &= \inf_z \{A_w(z) \rightsquigarrow R(z, w)\} = \\ &= \inf_{z=w} \{A_w(z) \rightsquigarrow R(z, w)\} \wedge (A_w(w) \rightsquigarrow R(w, w)) = \\ &= \inf_{z=w} \{A(z) \rightsquigarrow R(z, w)\} \wedge 1 \geq \inf_z \{A(z) \rightsquigarrow R(z, w)\} = \\ &= (A \triangleleft R)(w) = A_w(w) \end{aligned}$$

Luego $A < A_w \leq (A_w \triangleleft R)$, es decir, $A < A_w \in \mathcal{H}$, lo que es absurdo, pues A es maximal de $\mathcal{H}$. En consecuencia, $A = A \triangleleft R$, que prueba que $A \in \mathcal{T}$. $\square$

Proposición 6. Si $A \in \mathcal{H}$ entonces $((A \triangleleft R) \triangleleft R) \in \mathcal{H}$.

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{H}$, es decir tal que $A \leq A \triangleleft R$. Hay que demostrar que también se verifica:

$$((A \triangleleft R) \triangleleft R) \leq (((A \triangleleft R) \triangleleft R) \triangleleft R).$$

En efecto, por ser $\triangleleft$ antitono en el primer argumento: $(A \leq A \triangleleft R) \implies ((A \triangleleft R) \geq (((A \triangleleft R) \triangleleft R))) \implies ((A \triangleleft R) \triangleleft R) \leq (((A \triangleleft R) \triangleleft R) \triangleleft R)$. $\square$

En general, la ecuación $X \triangleleft R = X$ no siempre tiene solución, como se puede comprobar con el siguiente ejemplo:

Sea $E = \{x, y\}$ y R , la relación borrosa de la tabla:

R	x	y
x	0,1	0,3
y	0,9	0

que no es una tolerancia.

Si se considera en $[0, 1]$ la implicación residuada de Lukasiewicz, se puede demostrar que la única solución de $X \triangleleft R = X$ es el subconjunto borroso A tal que $A(x) = 0,55$ y $A(y) = 0,5$. Sin embargo, se comprueba que con la implicación residuada de Gödel, la ecuación anterior no tiene solución.

De la proposición anterior y de la equivalencia $((A \tilde{\times} A) \leq R) \Leftrightarrow (A \leq (A \triangleleft R))$, se deduce el siguiente corolario que asegura la existencia de soluciones cuando R es reflexiva y simétrica.

Corolario 2. Si R es una tolerancia borrosa, la ecuación $X \triangleleft R = X$ tiene solución, y el conjunto de soluciones coincide con el conjunto de borrosos maximales $B \in [0, 1]^E$ tales que $B \tilde{\times} B$ es un “ $\otimes$ -cuadrado” incluido en la tolerancia borrosa R .

Los elementos de $\mathcal{T} = \{B / B = (B \triangleleft R)\}$ constituyen un cubrimiento de E :

Proposición 7. Si R es una tolerancia borrosa, entonces $E = \bigvee_{B \in \mathcal{T}} B$.

Demostración.

Se verifica: $E = \bigvee_{x \in E} x_1$.

Por otra parte, $x_1 \leq (x_1 \triangleleft R)$, ya que $(x_1 \triangleleft R)(y) = R(x, y)$ y $x_1(y) = 0 \leq R(x, y)$ si $y \neq x$ y $x_1(x) = 1 = R(x, x) = (x_1 \triangleleft R)(x)$.

En consecuencia, $((x_1 \triangleleft R) \triangleleft R) \in \mathcal{H}$, por lo que existirá un maximal $B \in \text{MAXIMAL}(\mathcal{H}) = \mathcal{T}$ tal que $x_1 \leq ((x_1 \triangleleft R) \triangleleft R) \leq B$, luego $E = \bigvee_{x \in E} x_1 \leq$

$$\bigvee_{B \in \mathcal{T}} B.$$

$\square$

3. DEFINICIÓN DE $\otimes$ -BLOQUES. CÁLCULO DE ÉSTOS UTILIZANDO LA TEORÍA DE CONCEPTOS BORROSOS

En [4], los autores definen las clases de tolerancia como subconjuntos borrosos B que son normales, ($B(x) = 1$ para algún $x \in E$), y maximales dentro de un cierto conjunto ordenado.

En esta sección, ampliamos las definiciones y los resultados de estos autores [4], ya que exigimos que esos subconjuntos borrosos B tengan el mismo carácter maximal, pero no han de ser necesariamente normales.

Por otra parte, (de acuerdo con la nomenclatura usual en espacios de tolerancias ordinarios [2]), utilizamos el nombre de bloque en lugar de clase para nombrar esos maximales, reservando el nombre de clase para los subconjuntos borrosos $[x]_R \in [0, 1]^E$ definidos por: $[x]_R(y) = R(x, y) \forall y \in E, \forall x \in E$ (Véase por ejemplo [12]).

Finalmente (al igual que se hace en [4]), mostramos su relación con la teoría de Análisis de Conceptos Borrosos ([6],[7], [3])

Consideremos el sistema algebraico (E, R) formado por un referencial con cardinal $|E| \geq 2$ y por una tolerancia borrosa $R \in [0, 1]^{E \times E}$.

Definición 2. Llamaremos $\otimes$ -prebloque A de (E, R) a todo subconjunto borroso $A \in [0, 1]^E$ tal que $A \tilde{\times} A \leq R$. Llamaremos $\otimes$ -bloque de (E, R) a todo maximal B del conjunto de $\otimes$ -prebloques.

De los resultados expuestos en la sección anterior se desprenden estos otros :

1. Los $\otimes$ -bloques asociados a (E, R) serán todos los subconjuntos borrosos $B \in [0, 1]^E$ tales que $B = B \triangleleft R$.
2. Esta definición de $\otimes$ -bloque es coherente, ya que, como se ha demostrado en la sección anterior, está asegurada la existencia de esos maximales.
3. Se puede interpretar el cálculo de $\otimes$ -bloques como el del cálculo de “ $\otimes$ -cuadrados maximales”.
4. El referencial E es unión borrosa de los $\otimes$ -bloques:

$$E = \bigvee_{B \in \mathcal{T}} B$$

Veamos finalmente que con la Teoría de Conceptos Borrosos podemos abordar el cálculo de $\otimes$ -bloques. Para ello interpretamos el sistema (E, R) como el contexto borroso $([0, 1], E, E, R)$ en el que el referencial ordinario E representa tanto el conjunto de *objetos* como el de *atributos* [1] y en el que la relación de *incidencia* es la tolerancia borrosa $R \in [0, 1]^{E \times E}$.

En la teoría de conceptos borrosos, se puede demostrar que un concepto del contexto $([0, 1], E, E, R)$ es un par $(M, N) \in [0, 1]^E \times [0, 1]^E$ tal que $M = (M \triangleleft R) \triangleleft R^{op}$ y $N = M \triangleleft R$. Esta interpretación de los conceptos proporciona una conexión entre la teoría de conceptos borrosos y el cálculo de $\otimes$ -bloques en el caso en que se utilice una implicación residuada y una tolerancia borrosa, tal como se demuestra en la siguiente

Proposición 8. *Si R es una tolerancia borrosa en E , entonces los $\otimes$ -bloques B son las extensiones (o las intensiones) de los conceptos borrosos (B, B) cuyas dos componentes son iguales.*

Demostración.

Se verifica que $R = R^{op}$. Supongamos que B es un $\otimes$ -bloque. Entonces $B = B \triangleleft R$ y, en consecuencia, $B = B \triangleleft R = (B \triangleleft R) \triangleleft R = (B \triangleleft R) \triangleleft R^{op}$, que demuestra que (B, B) es un concepto del contexto $([0, 1], E, E, R)$. Por otra parte, si (M, M) es un concepto, entonces $M = M \triangleleft R$, es decir, M es un $\otimes$ -bloque. $\square$

Agradecimientos

Trabajo parcialmente soportado por el proyecto de investigación 2008/2301 del Gobierno de Navarra y por el Grupo de Investigación de la Universidad del País Vasco *Sistemas Inteligentes y Energía* (Proyecto GIU 07/45).

Referencias

- [1] C. Alcalde A. Burusco, R. Fuentes-González. Contextos con conjuntos de objetos y atributos iguales. *ESTYLF08*, (Mieres - Langreo), 2008.
- [2] W. Bartol, J. Miró, K. Pióro, F. Rosselló, On the coverings by tolerance classes, *Information Sciences* 166, Pág. 193-211, 2004
- [3] R. Bělohlávek. Fuzzy relational Systems. *IFSR International Series on Systems Science and Engineering*, No.20, 2002.
- [4] R. Bělohlávek, T. Funioková, Similarity and Fuzzy Tolerance Spaces, *J. Logic Computat*, Vol 14 No 6, Pág. 828-855, 2004
- [5] T.S. Blyth, M. F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon Press, 1972.
- [6] A. Burusco, R. Fuentes-González. The Study of the L-Fuzzy Concept Lattice. *Mathware and Computing*, 1, No.3, Pág.209-218, 1994.
- [7] A. Burusco, R. Fuentes-González. Construction of the L-Fuzzy Concept Lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 97, No.1, Pág.109-114, 1998.
- [8] M. Das, M.K. Chakraborty, T.K. Ghoshal. Fuzzy tolerance relation, fuzzy tolerance space and basis. *Fuzzy Sets and Systems*, 97, Pág.361-369, 1998.
- [9] P. Doherty, W. Lukaszewicz, A. Szalas. Tolerance spaces and approximative representational structures. *Lect. Notes in Computer Sciences*, 2821, Pág.475-489, 2003.
- [10] P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin. *Lecciones de álgebra moderna*. Ed. Reverté, 1965.
- [11] B. Ganter, R. Wille, *Formal Concept Analysis*, Springer Verlag, 1999.
- [12] G.J. Klir, B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Prentice Hall, 1995.
- [13] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. On multi-adjoint concept lattices: definition and representation theorem. *Lect. Notes in Artificial Intelligence*, 4390, Pág.197-209, 2007.
- [14] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2), Pág.130-144, 2009.
- [15] T.J. Ross. *Fuzzy Logic With Engineering Applications*. McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [16] R. Wille. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. *Ordered Sets*, Reidel, Dordrecht-Boston, Pág.445-470, 1982.