Grado de parentesco entre predicados *

Itziar García-Honrado[1] **Enric Trillas**[1] **Sergio Guadarrama**[1]

[1] European Centre for Soft Computing
Mieres (Asturias), España.
{itziar.garcia, enric.trillas, sergio.guadarrama}@softcomputing.es

Resumen

Basándose en las ideas de L. Wittgenstein sobre el parecido de familia (en alemán *Familienähnlichkeit* y en inglés *Family Resemblance*), se presenta una nueva formalización matemática del parentesco entre predicados y sus usos, asignando a cada uso de un predicado un conjunto borroso. Para ello, se define el conjunto de los 'parientes' de cierto uso de un predicado, y se calculan los grados de parecido con sus parientes. Además, si entre dos conjunto borrosos que no sean parientes hay un grado de parecido alto, se definen los parientes de segundo orden y un grado de parentesco de segundo orden.

Palabras Clave: Predicado, Parecido de familia, Grado de parentesco, Indistinguibilidad.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo se inspira en [5] el trabajo previo, que constituye un primer acercamiento a la formalización del concepto de parecido de familia, 'familienähnlichkeit', también 'family resemblance', de Wittgenstein.

Wittgenstein es el iniciador de la conocida filosofía del lenguaje; en [7], recogió el carácter dinámico de las palabras y el lenguaje a través de los llamados juegos del lenguaje. Las palabras sufren modificaciones con el tiempo, motivadas por su uso en contextos distintos o por hacer referencia a nuevos elementos, como ejemplo, la palabra 'indio', que en un principio designaba exclusivamente a los nativos de India, pero que tras el descubrimiento de América pasó a designar también a los americanos nativos.

En [4], se ve cómo un uso concreto de un predicado, puede representarse por medio de un conjunto borroso. Así que se intentará estudiar la relación de parentesco entre los conjuntos borrosos que puedan representar distintos usos de un mismo predicado, partiendo de un conjunto borroso que represente un uso concreto del predicado y que se tomará como patrón. Se definirá el conjunto de los parientes de ese patrón, y el grado de parentesco de los parientes con él. Más adelante, se extenderá el conjunto de parientes a parientes de segundo orden y se definirá también un grado de parentesco de segundo orden.

2. FAMILIAS DE CONJUNTOS BORROSOS CON PARENTESCO

Sobre un universo de discurso X, un predicado P ordena los elementos de X, si se puede decir que 'x es menos P que y', ($x \leq_P y$), con $x, y \in X$. Posteriormente, se puede construir un conjunto borroso, μ_P, que represente un uso del predicado, capturando dicho orden en la forma, 'si $x \leq_P y$, entonces $\mu_P(x) \leq \mu_P(y)$' (para más detalles ver [4]); es decir, que μ_P pueda considerarse un 'grado' para el predicado.
Para un predicado P se pueden construir diferentes grados, siempre que cada grado capture el orden que el predicado induce sobre el universo de discurso; por ejemplo el uso del predicado en diferentes contextos motivará una modificación en el grado (véase Figura 1).

Así pues, el predicado $P = alto$, definido en un universo de personas introduce un orden, gracias a la característica numérica 'altura'; 'una persona x es menos alta que otra y', si $altura(x) \leq altura(y)$, pero el grado en que se considera que una persona es alta depende del contexto. Por ejemplo no se considera que alguien

*Este trabajo ha sido financiado por la Fundación para el Progreso del Soft Computing (Asturias, España), y CICYT (España) bajo el proyecto TIN2008-06890-C02-01.

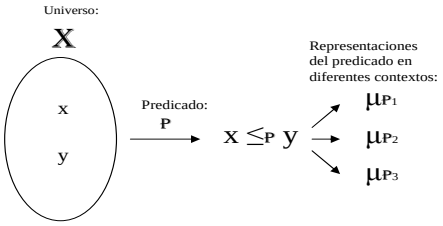

Figura 1: Representación de un mismo predicado en distintos contextos

de 1.70 metros tenga el mismo grado de alto en el contexto de una escuela de primaria, o en el contexto de un equipo de baloncesto profesional.

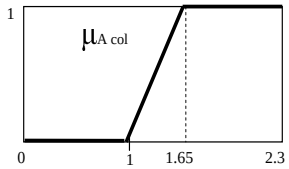

Figura 2: En una escuela

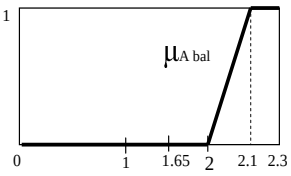

Figura 3: En un equipo de baloncesto

El ejemplo muestra que el conjunto borroso que representa el predicado alto en un equipo de baloncesto, sufre una modificación con respecto a la representación del predicado alto en una escuela, en este caso porque las alturas de un colegio son más heterogéneas y casi sin alumnos con altura superior a 1.70; sin embargo, en un equipo de baloncesto casi todos los jugadores tendrán una altura superior a 1.90 e inferior a 2.10. No obstante, las dos funciones muestran cierto parecido, por lo menos en cuanto a su forma.

Los elementos que verifican el uso del predicado P con grado uno, son los *prototipos* de ese uso P, y se denota por $S(\mu_P)$ a su conjunto, $S(\mu_P) = \{x \in X; \mu(x) = 1\}$. Por analogía, los *anti-prototipos* serán los elementos que no verifican el predicado,que lo hacen con grado cero y se denotará su conjunto $Z(\mu_P) = \{x \in X; \mu(x) = 0\}$.

La relación de parentesco se define entre conjuntos borrosos μ, σ tales que $S(\mu) \neq \emptyset$, $Z(\mu) \neq \emptyset$, $S(\sigma) \neq \emptyset$ y $Z(\sigma) \neq \emptyset$, como sucede con las funciones de las figuras 2 y 3. Estos conjuntos borrosos se llaman *conjuntos borrosos completamente normalizados.*

Observación 2.1 *En lo que sigue, se supondrá que todos los grados, $\mu_P^i (i \in I)$, de un mismo predicado P definido en en el universo de discurso X, compartirán algunos prototipos y anti-prototipos. Esto es, $\bigcap_{i \in I} Z(\mu_P^i) \neq \emptyset$ y $\bigcap_{i \in I} S(\mu_P^i) \neq \emptyset$.*

En lo sucesivo, manejaremos un conjunto, $F^*(X)$, de algunos conjuntos borrosos completamente normalizados, con $X \subset R$, al que pertenecerá el patrón de su familia, y sus parientes que se definirán más alante.

Si tenemos un conjunto borroso no normalizado con máximo y mínimo, podemos transformarlo en uno completamente normalizado, bajo la transformación lineal

$$\mu^* = \frac{\mu - \text{mín}(\mu)}{\text{máx}(\mu) - \text{mín}(\mu)}.$$

Cabe considerar que dos conjuntos borrosos representan un mismo predicado si su comportamiento sigue ciertas conductas, como que compartan prototipos y anti-prototipos, y que crezcan o decrezcan a la vez (para que el conjunto borroso capture el orden que induce el predicado en el conjunto). Basándonos en esto se define la relación de parentesco([5]), como,

Definición 2.2 *Sea $X \subset R$ el universo de discurso, se define la relación de parentesco ('family resemblance') entre dos conjuntos borrosos μ, σ en $[0,1]^X$, $\boldsymbol{fr} \subset [0,1]^X \times [0,1]^X$, por $(\mu, \sigma) \in \boldsymbol{fr}$ si y sólo si,*

1. *$Z(\mu) \cap Z(\sigma) \neq \emptyset$, $S(\mu) \cap S(\sigma) \neq \emptyset$*
2. *μ es creciente en $A \subset X$ si y sólo si σ es creciente en A.*
3. *μ es decreciente en $A \subset X$ si y sólo si σ es decreciente en A.*

Observación 2.3 *Se considerará que un conjunto borroso $\mu \in [0,1]^X$ es creciente en $A \subset X$ si para cualquier $x, y \in A$ tales que $x \leq y$, se verifica que $\mu(x) \leq \mu(y)$.*
Análogamente se considerará que $\mu \in [0,1]^X$ es decreciente en $A \subset X$ si para cualquier $x, y \in A$ tales que $x \leq y$, se verifica que $\mu(y) \leq \mu(x)$.

Esta relación es una relación reflexiva y simétrica, pero no transitiva, como ocurre con algunas relaciones de familia entre personas. Si se considera que alguien es un familiar de otro si y sólo si hay lazos sanguíneos: "Juan es familia de su madrez "Juan y su primo por parte de padre son familia", sin embargo "el primo de Juan y la madre de Juan"no tendrían lazos sanguíneos y, por tanto, bajo esta relación no serían considerados familiares.

Veamos gráficamente que la relación **fr** no es transitiva. En la figura 4, se tiene que $(\mu, \delta) \in \mathbf{fr}$, $(\sigma, \delta) \in \mathbf{fr}$, pero $(\mu, \sigma) \notin \mathbf{fr}$, ya que μ y σ no comparten prototipos.

Siguiendo con el predicado "alto", de las figuras 2 y 3 se aprecia que ambos predicados mantienen relación

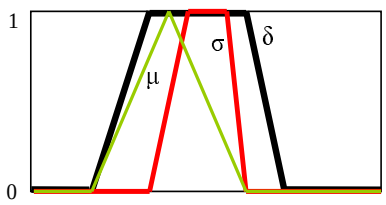

Figura 4:

de parentesco. Se verifica que, $Z(\mu_{A\ col}) \cap Z(\mu_{A\ bal}) = [0,1] \neq \emptyset$, $S(\mu_{A\ col}) \cap S(\mu_{A\ bal}) = [2{,}10, 2{,}30] \neq \emptyset$ y además verifican las condiciones de monotonía.

Se definirá la familia de un predicado representado por el conjunto borroso μ dentro de un conjunto de conjuntos borrosos previamente seleccionado $F(X)^*$, como $[\mu] = \{\sigma \in F^*(X); (\mu, \sigma) \in \mathbf{fr}\}$. Estas familias no forman una partición del conjunto $F(X)^*$, ya que no son disjuntas dos a dos.

2.1. SINÓNIMOS

Una forma particular de sinonimia de predicados, que se recoge en [5], es la siguiente,

Definición 2.4 *Dos predicados P y P^* definidos sobre $X \subset R$ y representados por los conjuntos borrosos μ_P y μ_{P^*} respectivamente, son sinónimos si existe una aplicación biyectiva $u : X \to X$, tal que*

1. $\mu_{P^*} = \mu_P \circ u^{-1}$
2. *Si $x \leq y$, entonces $u(x) \leq u(y)$*
3. $u^{-1}(Z(\mu_P)) \subset Z(\mu_P)$
4. $u^{-1}(S(\mu_P)) \subset S(\mu_P)$

Por tanto para todo $\mu_P \in F^*(X)$, $X \subset R$, se tiene que $(\mu_P, \mu_{P^*}) = (\mu_P, \mu_P \circ u^{-1}) \in \mathbf{fr}$.

Los dos usos del predicado 'alto', $\mu_{A\ col}$ y $\mu_{A\ bal}$ presentados en las figuras 2 y 3, además de tener parecido de familia pueden considerarse sinónimos, ya que existe una biyección u, tal que $\mu_{A\ col} = \mu_{A\ bal} \circ u^{-1}$.

2.2. PREDICADO EN DISTINTOS UNIVERSOS DE DISCURSO

En esta sección se estudiarán los cambios que sufren los predicados al utilizarse en dos universos de discurso distintos, X e Y.

Por ejemplo, el predicado 'simpático' suele definirse sobre personas, pero podría migrar y utilizarse sobre los objetos o animales y así decir que cierto objeto o animal es simpático.

Definición 2.5 *Se dice que el uso de un predicado P definido sobre el universo X (representado por $\mu \in [0,1]^X$) **migra** al predicado Q en el universo Y (representado por $\sigma \in [0,1]^Y$) cuando existan una función biyectiva $\varphi : X \to Y$ y una función monótona $F : [0,1] \to [0,1]$ verificando,*

1. *Si $x \leq_P y$, entonces $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$, para $x, y \in X$*
2. $\varphi^{-1}(Z(\sigma)) \subset Z(\mu)$
3. $\varphi^{-1}(S(\sigma)) \subset S(\mu)$
4. $F(0) = 0$ *y* $F(1) = 1$
5. $\sigma = F \circ \mu \circ \varphi^{-1}$

De la definición se deduce que $(\mu, \sigma \circ \varphi) \in \mathbf{fr}$ y $(\sigma, \mu \circ \varphi^{-1}) \in \mathbf{fr}$.

Ejemplo 2.6 *Sea el predicado P =bajo, definido sobre el conjunto de personas con altura en centímetros dentro del intervalo $[0, 200]$ y representado por el conjunto borroso $\mu_b(x) = 1 - \frac{x}{200}$. Sean $\varphi : [0, 200] \to [0, 1]$, definida por $\varphi(x) = \frac{x}{200}$ y $F = id$. Es:*

$$F \circ \mu_b \circ \varphi^{-1}(y) = \mu_b(200y) = 1 - y, \quad \text{para } y \in [0,1].$$

La función obtenida es el conjunto borroso que representa el predicado pequeño en el intervalo $[0, 1]$.

Si se utilizase $F(x) = x^2$, se obtendría $F \circ \mu_b \circ \varphi^{-1}(y) = (1-y)^2 = y^2 - 2y + 1$, un uso diferente del predicado pequeño en $[0, 1]$.

3. INDISTINGUIBILIDAD PARA MEDIR EL GRADO DE PARENTESCO ENTRE CONJUNTOS BORROSOS

En esta sección, se representará el grado de parentesco entre dos conjuntos borrosos, por medio de una indistinguibiliadad [6, 1]. Es decir, una función $I : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]$ verificando:

- Reflexividad $I(\mu, \mu) = 1$
- Simetría $I(\mu, \sigma) = I(\sigma, \mu)$
- T-transitividad, con una t-norma continua T: $T(I(\mu, \sigma), I(\sigma, \lambda)) \leq I(\mu, \lambda)$, para cuales quiera μ, σ, λ en $F^*(X)$.

Hasta ahora, sólo se ha considerado que dos conjuntos borrosos están relacionados de forma nítida si pertenecen a la relación **fr**. Dentro del conjunto de predicados que mantienen la relación **fr**, se definirá una indistinguibilidad para calcular el grado parentesco.

Para construir prod-indistinguibilidades se utilizará el teorema de Ovchinnikov (véase [3]): Cualquier prod-indistinguibiliad en $F^*(X)$ se puede representar por,

$$E(\mu,\sigma) = \underset{f\in F}{Inf}\left(\frac{f(\mu)}{f(\sigma)}, \frac{f(\sigma)}{f(\mu)}\right),$$

con F una familia de funciones $f : F^*(X) \to R^+ - \{0\}$.

Como se hizo en [5], se construirá una prod-indistinguibilidad para los conjuntos borrosos en $F(X)$ que sean integrables.

Sean $f_1(\mu) = \int_X \mu(x)dx$, $f_2(\mu) = \int_X (X - Z(\mu))$. Entonces se define,

$$Ovch(\mu,\sigma) = \text{mín}\left(\frac{f_1(\mu)}{f_1(\sigma)}, \frac{f_1(\sigma)}{f_1(\mu)}, \frac{f_2(\mu)}{f_2(\sigma)}, \frac{f_2(\sigma)}{f_2(\mu)}\right),$$

para $\mu, \sigma \in F^*(X)$ integrables.

Así mismo, se construirá otra prod-indistinguibilidad, para comparar los elementos con un conjunto borroso $\mu \in F(X)^*$ integrable, **patrón** de la familia $[\mu]$. Se define la función, $f_\mu : F^*(X) \to R^+ - \{0\}$, $f_\mu(\alpha) = \frac{\int_X \text{mín}(\mu,\alpha)}{\int_X \text{máx}(\mu,\alpha)}$ y la prod-indistinguibilidad I_μ, como $I_\mu(\alpha,\beta) = min\left(\frac{f_\mu(\alpha)}{f_\mu(\beta)}, \frac{f_\mu(\beta)}{f_\mu(\alpha)}\right)$, para $\alpha, \beta \in F^*$ integrables.

En particular, $I_\mu(\mu,\sigma) = \text{mín}\left(\left(\frac{\int_X \text{mín}(\mu,\sigma)}{\int_X \text{máx}(\mu,\sigma)}\right)^{-1}, \frac{\int_X \text{mín}(\mu,\sigma)}{\int_X \text{máx}(\mu,\sigma)}\right) = \frac{\int_X \text{mín}(\mu,\sigma)}{\int_X \text{máx}(\mu,\sigma)}$.

Se utilizará esta prod-indistinguibilidad para calcular el grado de parentesco de sus parientes con μ y también con conjuntos borrosos que no sean parientes. Es decir, se calculará $I_\mu(\mu,\sigma)$, para todo $\sigma \in F^*(X)$ integrable.

Combinando ambas prod-indistinguibilidades se define el *Grado de Parentesco* entre los conjuntos borrosos de la familia $[\mu]$, como

$$GP_\mu(\alpha,\beta) = \text{mín}(Ovch(\alpha,\beta), I_\mu(\alpha,\beta)),$$

para $\alpha, \beta \in F(X)^*$ integrables. Gracias al teorema de Ovchinnikov, se obtiene de nuevo que GP_μ una prod-indistinguibilidad.

Si se calcula ese grado de parentesco del patrón con sus parientes,

$$GP_\mu(\mu,\sigma) = \text{mín}\left(Ovch(\mu,\sigma), \frac{\int \text{mín}(\mu,\sigma)}{\int \text{máx}(\mu,\sigma)}\right),$$

para $\sigma \in [\mu]$ integrable.

Ejemplo 3.1 *Tomado el conjunto borroso μ como patrón (representado en la figura 5), se calcula el grado de parentesco con sus parientes, μ_1 y μ_2 (representados respectivamente en las figuras 6 y 7),*

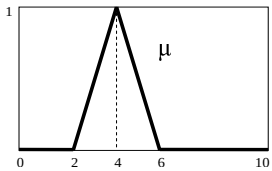

Figura 5:

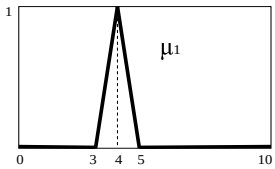

Figura 6:

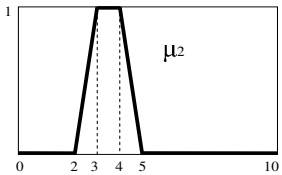

Figura 7:

$GP_\mu(\mu,\mu_1) = \text{mín}(Ovch(\mu,\mu_1), I_\mu(\mu,\mu_1)) = \text{mín}(\text{mín}(\frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}), \frac{2}{4}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

$GP_\mu(\mu,\mu_2) = \text{mín}(Ovch(\mu,\mu_2), I_\mu(\mu,\mu_2)) = \text{mín}(\text{mín}(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}), \frac{1{,}5}{2{,}5}) = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$.

La familia de parientes de μ, $[\mu] = \{\sigma \in F(X)^*; (\mu,\sigma) \in \mathbf{fr}\} = \{\mu, \mu_1, \mu_2\}$, y los grados de parentesco de cada elemento de la familia con el patrón, se pueden representar con el conjunto borroso discreto, $[\mu]^*$. En el ejemplo 3.1, se obtendría $[\mu]^* = 0{,}5/\mu_1 + 0{,}6/\mu_2 + 1/\mu$, es decir un conjunto borroso discreto formado a su vez por conjuntos borrosos que pertenecen con cierto grado, $[\mu]^* \in [0,1]^{[0,1]^X}$.

El patrón, μ, de la familia, será el prototipo de $[\mu]^*$, por pertenecer con grado 1.

Se puede calcular también el grado de parentesco de μ con otros conjuntos difusos en $F(X)^*$ integrables, aunque no sean parientes de μ.

Ejemplo 3.2 *En este ejemplo se calculará el grado de parentesco de dos conjuntos borrosos que no están relacionados por* ***fr****,*

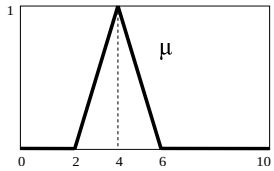

Figura 8:

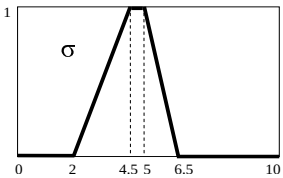

Figura 9:

$GP_\mu(\mu,\sigma) = \text{mín}(Ovch(\mu,\sigma), I_\mu(\mu,\sigma)) = \text{mín}(\text{mín}(\frac{2}{2{,}25}, \frac{2{,}25}{2}, \frac{4}{4{,}5}, \frac{4{,}5}{4}), \frac{1{,}7770}{2{,}7230}) = \frac{1{,}7770}{2{,}7230} = 0{,}6526.$

Consideramos que el grado de parentesco es alto (por ser mayor de 0.5), aunque no sean parientes.

3.1. PARIENTES DE SEGUNDO ORDEN

En el ejemplo 3.2, se ve que dos conjuntos borrosos que no son de la misma familia, tienen sin embargo un alto grado de parentesco. Esto nos conduce a pensar que se podría crear una familia de parientes de segundo orden más grande de conjuntos borrosos relacionados.

Para tal fin, se calculará el grado de solapamiento ([2]) entre ambos conjuntos de parientes.

Se define la grado de solapamiento de dos conjuntos borrosos discretos $A = a_1/x_1 + ... + a_n/x_n$, y $B = b_1/y_1 + ... + b_m/y_m$, por la fórmula:

$$Solap(A,B) = \frac{|A \cap B|}{\text{mín}(|A|,|B|)},$$

tomando la cardinalidad borrosa $|A| = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_i$. El solapamiento entre dos conjuntos verifica las propiedades reflexiva y simétrica, pero no la transitiva.

Si el solapamiento es alto (lo consideraremos alto si es superior a 0.5) se podrían considerar los parientes de segundo orden, y se llamará conjunto de parientes de segundo orden a la unión de los dos conjuntos de parientes $[\mu,\sigma] = [\mu] \cup [\sigma]$.

Sea $F^*(X)$ el conjunto de todos los conjuntos borrosos de la figura 10. Tomando como patrón μ y sabiendo que σ tiene un alto grado de parentesco con μ (calculado en el ejemplo 3.2), se obtiene la familia de parientes de μ, $[\mu] = \{\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$, y la de σ, $[\sigma] = \{\sigma, \sigma_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$

Se calculan todos los grados de parecido $GP_\mu(\mu,\alpha)$ y $GP_\sigma(\mu,\beta)$, con $\alpha \in [\mu]$ y $\beta \in [\sigma]$:

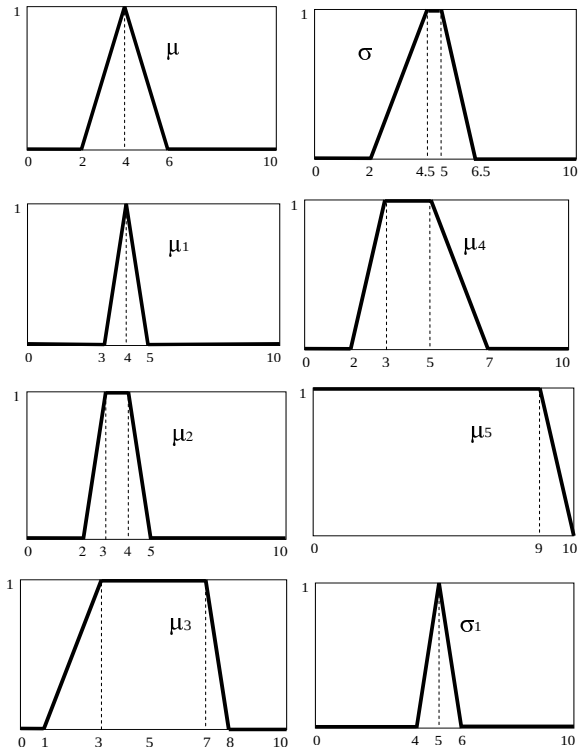

Figura 10: $F^*(X)$

- $GP_\mu(\mu,\mu) = 1$
- $GP_\mu(\mu,\mu_1) = 0{,}5$
- $GP_\mu(\mu,\mu_2) = 0{,}6$
- $GP_\mu(\mu,\mu_3) = 0{,}3636$
- $GP_\mu(\mu,\mu_4) = 0{,}5714$
- $GP_\mu(\mu,\mu_5) = 0{,}2094$
- $GP_\sigma(\sigma,\sigma) = 1$
- $GP_\sigma(\sigma,\mu_3) = 0{,}2727$
- $GP_\sigma(\sigma,\mu_4) = 0{,}4286$
- $GP_\sigma(\sigma,\mu_5) = 0{,}1571$
- $GP_\sigma(\sigma,\sigma_1) = 0{,}4$

Con estos cálculos se puede representar las familias como,

- $[\mu]^* = 0{,}5/\mu_1 + 0{,}6/\mu_2 + 0{,}3636/\mu_3 + 0{,}5714/\mu_4 + 0{,}2094/\mu_5 + 1/\mu$,
- $[\sigma]^* = 0{,}2727/\mu_3 + 0{,}4286/\mu_4 + 0{,}1571/\mu_5 + 0{,}4/\sigma_1 + 1/\sigma$,

y se tienen las cardinalidades,

- $|[\mu]^*| = 2{,}2444$, $|[\sigma]^*| = 1{,}5584$,
- $|([\mu] \cap [\sigma])^*| = |\text{mín}(0{,}3636, 0{,}2727)/\mu_3 + \text{mín}(0{,}5714, 0{,}4286)/\mu_4 + \text{mín}(0{,}2094, 0{,}1571)/\mu_5| = 0{,}8584$.

Por lo tanto, $Solap([\mu]^*, [\sigma]^*) = \frac{|A \cap B|}{\text{mín}(|A|,|B|)} = \frac{0{,}8584}{1{,}2584} = 0{,}6821$.

Se puede considerar este solapamiento alto; por tanto cabe obtener el siguiente conjunto de parientes de segundo orden,

$$[\mu, \sigma] = \{\mu, \sigma, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \sigma_1\}.$$

3.2. GRADO DE PARENTESCO DE SEGUNDO ORDEN

Partiendo ahora de los grados de parentesco con μ y con σ de dos conjuntos borrosos, se definirá el *Grado de Parentesco de segundo orden*,

$$GP^2_{\mu,\sigma}(\alpha, \beta) = \text{máx}(GP_\mu(\alpha, \beta), GP_\sigma(\alpha, \beta)),$$

para todo $\alpha, \beta \in [\mu, \sigma]$.

Ejemplo 3.3 *Calculemos el grado de parentesco de segundo grado dentro del conjunto $[\mu, \sigma]$, de los conjuntos μ_1, σ_1 de la Figura 10 pertenecientes a familias distintas de parientes, $\mu_1 \in [\mu]$ y $\sigma_1 \in [\sigma]$.*

$GP^2_{\mu,\sigma}(\mu_1, \sigma_1) = \text{máx}(GP_\mu(\mu_1, \sigma_1),\ GP_\sigma(\mu_1, \sigma_1)) = \text{máx}(0{,}5696, 0{,}9314) = 0{,}9314$.

El grado obtenido es muy alto, ya que σ_1 no es más que una traslación de μ_1.

Veamos como se comporta este grado,

- Si $Ovch(\alpha, \beta) \leq I_\mu(\alpha, \beta)$ó $I_\sigma(\alpha, \beta)$, se obtiene $GP^2_{\mu,\sigma}(\alpha, \beta) = Ovch(\alpha, \beta)$
- En otro caso,
  - si $I_\mu(\alpha, \beta) \leq I_\sigma(\alpha, \beta)$, se obtiene $GP^2_{\mu,\sigma}(\alpha, \beta) = I_\sigma(\alpha, \beta)$.
  - si $I_\sigma(\alpha, \beta) \leq I_\mu(\alpha, \beta)$, se obtiene $GP^2_{\mu,\sigma}(\alpha, \beta) = I_\mu(\alpha, \beta)$.

Es decir, si los conjuntos no se parecen mucho entre sí, su grado de parentesco de segundo orden no será muy alto.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta un modelo que relaciona distintas representaciones de los predicados en el lenguaje. En primer lugar, dado un uso de un predicado por un conjunto borroso, que llamamos patrón, se calculan los parientes de este conjunto borroso, que pueden ser sinónimos del patrón, migraciones a otro universo de discurso, o simplemente otros conjuntos borrosos que se comporten como el patrón (esto es que verifiquen con él la relación **fr**).

Posteriormente, se calcula un grado de parentesco entre el patrón y sus parientes. El grado de parentesco que se propone en este artículo es más conservador que el que se introduce en [5], pues es menor, y además se define mediante una *Prod*-indistinguibilidad, por lo que permite una mayor interacción de los conjuntos borrosos involucrados que en el grado propuesto en [5] conseguido a través de una W-indistinguibilidad. Si se encuentra un conjunto borroso con grado de parentesco alto y que no pertenece a la familia del patrón, se comprueba si entre las familias del patrón y de este conjunto borroso, hay un solapamiento alto. Si así fuese, se obtienen los parientes de segundo orden, que son la unión de las familias del patrón y de dicho conjunto borroso. Finalmente, se define grado de parentesco de segundo orden en esta nueva familia extendida.

Referencias

[1] L. Valverde E. Trillas. An inquiry into indistinguishability operators. *Aspects of Vagueness. H.J. Skala, S. Termini, E. Trillas (Eds.). Reidel*, págs. 231–256, 1984.

[2] S. Guadarrama and M. Garrido. Concept-Analyzer: A tool for analyzing fuzzy concepts. En *Proceedings of IPMU*, págs. 1084–1089, 2008.

[3] S.V. Ovchinnikov. Representation of transitive fuzzy relations. *Aspects of Vagueness. H.J. Skala, S. Termini, E. Trillas (Eds.). Reidel*, págs. 105–118, 1984.

[4] E. Trillas. On a model for the meaning of predicates. A naïve approach to the genesis of fuzzy sets. En Rudolf Seising, editor, *Fuzzy Sets Theory. Philosohpy and Criticism*, volumen 243, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, capítulo 9, págs. 175–205. Springer Verlag, 2009.

[5] E. Trillas, C. Moraga, and A. Sobrino. On 'family resemblances' with fuzzy sets. *Proceedings IFSA-EUSFLAT*, págs. 306–311, 2009.

[6] E. Trillas and L. Valverde. On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic. En D. Dubois, H. Prade, and R. R. Yager, editores, *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, págs. 97–104. Kaufmann, San Mateo, CA, 1993.

[7] L. Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Basil Blackwell, Oxford, Tercera Edición, 1981.