

DECISIONES MAYORITARIAS CON UMBRAL DE APOYO. ANÁLISIS DE LA COHERENCIA COLECTIVA

José Luis García Lapresta¹ Bonifacio Llamazares² Patrizia Pérez Asurmendi³

¹ PRESAD Research Group, Universidad de Valladolid, lapresta@eco.uva.es

² PRESAD Research Group, Universidad de Valladolid, boni@eco.uva.es

³ PRESAD Research Group, SEED Research Group, Universidad Rey Juan Carlos, patrizia.perez@urjc.es

Resumen

En este trabajo se analiza la conexión entre la racionalidad individual y colectiva en el ámbito de las mayorías con umbral de apoyo. Estas reglas de decisión permiten a los votantes graduar sus preferencias entre las alternativas, y declaran ganadora una alternativa sobre otra si la intensidad colectiva de preferencia es superior en un umbral previamente fijado. Los resultados proporcionados determinan los umbrales de apoyo que impiden la aparición de inconsistencias para tres casos de transitividad en las preferencias individuales.

Palabras Clave: Preferencias recíprocas, Mayoría simple, Mayorías por diferencia de votos, Mayorías con umbral de apoyo, Paradoja del voto, Aciclicidad.

1 INTRODUCCIÓN

Dadas dos alternativas, la regla de votación de la *mayoría simple* declara ganadora a una alternativa con el único requisito de que tenga más votos que la otra. Así, puede ocurrir que una alternativa resulte vencedora con muy poco apoyo si hay gran abstención. Con objeto de evitar este aspecto indeseable, han sido consideradas en la literatura otro tipo de mayorías que requieren mayor apoyo para declarar vencedora a una alternativa (véanse, por ejemplo, Fishburn [2, chapter 6], Ferejohn y Grether [1], Saari [6, pp. 122-123], García-Lapresta y Llamazares [3] y Llamazares [5]).

En García-Lapresta y Llamazares [3] se introducen las *mayorías por diferencia de votos*, las cuales declaran ganadora a una alternativa cuando el número de votos conseguido es mayor que el de la otra más un um-

bral previamente fijado. Dichas mayorías oscilan entre la mayoría simple y la unanimidad y, en consecuencia, pueden utilizarse en diferentes contextos, con tan solo ajustar el umbral al nivel deseado. La caracterización axiomática de este tipo de mayorías dada por Llamazares [5] en el ámbito de la Teoría de la Elección Social refuerza claramente su interés, debido a sus buenas propiedades.

Cuando se utilizan las reglas de votación por mayoría simple, absoluta, cualificadas, por diferencia de votos, etc. fuera de su escenario habitual de dos alternativas, y se amplía a tres o más, surge el problema de la posible aparición de inconsistencias. El ejemplo más conocido de inconsistencia es el de la *paradoja del voto*, denunciado por Condorcet en 1781. Dicha paradoja aparece, por ejemplo, cuando tres votantes ordenan tres alternativas de la siguiente forma: $x \succ y \succ z$, $y \succ z \succ x$, $z \succ x \succ y$. Entonces, al aplicar la reglas de votación de la mayoría simple o de la mayoría absoluta surge un ciclo: x vence a y , y vence a z , pero z también vence a x .

En García-Lapresta y Llamazares [4] se extienden las mayorías por diferencia de votos al escenario en el que los votantes declaran la intensidad de sus preferencias entre las alternativas. En este caso el umbral de apoyo pasa a ser un número real entre 0 y el número de votantes. Así, a la flexibilidad que supone permitir a los votantes graduar sus preferencias se une la posibilidad de fijar umbrales de apoyo en un espectro continuo. La caracterización axiomática de este tipo de mayorías dada en [4] pone de manifiesto sus buenas propiedades desde la perspectiva de la Teoría de la Elección Social. De nuevo, al extender el uso de este tipo de mayorías a más de dos alternativas surge el problema de las inconsistencias en las preferencias colectivas. A esto hay que añadir que las mayorías con umbral de apoyo pueden generar inconsistencias cuando hay únicamente dos votantes, algo que no sucede en las mayorías simple, absoluta, cualificadas ni por diferencia de votos.

Las mayorías con umbral de apoyo definen una relación de preferencia colectiva ordinaria a partir de las intensidades de preferencia individuales. El objetivo de este trabajo consiste en determinar el grado de consistencia en las preferencias colectivas en función de la consistencia de las preferencias individuales. En el marco de las intensidades de preferencia individuales se han considerado tres modelos representativos de racionalidad basados en la transitividad. Para la consistencia colectiva se han tenido en cuenta únicamente dos modelos de racionalidad: la triple-aciclicidad, que evita la aparición de ciclos entre tres alternativas, y la aciclicidad, que impide cualquier tipo de ciclos.

El trabajo se organiza como sigue. La sección 2 está dedicada a introducir los conceptos básicos, la sección 3 contiene los resultados para el caso en el que solo hay dos individuos, la sección 4 analiza el caso en el que hay tres individuos y, por último, la sección 5 muestra el trabajo futuro a realizar.

2 PRELIMINARES

Consideraremos m agentes que muestran la intensidad de sus preferencias sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ mediante relaciones de preferencia recíprocas $R^p : X \times X \rightarrow [0, 1]$, $p = 1, \dots, m$; es decir, $r_{ij}^p + r_{ji}^p = 1$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$, donde $r_{ij}^p = R^p(x_i, x_j)$. Con $\mathcal{R}(X)$ se denota el conjunto de relaciones de preferencia recíprocas sobre X .

Un *perfil* es un vector $(R_1, \dots, R_m)$ que contiene las relaciones recíprocas individuales. El conjunto de perfiles vendrá denotado por $\mathcal{R}^m(X)$.

Una *relación de preferencia ordinaria* sobre X es una relación binaria asimétrica P sobre X : si $x_i P x_j$, entonces no ocurre $x_j P x_i$. Con $\mathcal{P}(X)$ denotaremos el conjunto de relaciones de preferencia ordinarias sobre X . $P \in \mathcal{P}(X)$ es *acíclica* si para cualesquiera $x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in X$ se verifica que si ocurre $x_{i_1} P x_{i_2}, \dots, x_{i_{r-1}} P x_{i_r}$, entonces no ocurre $x_{i_r} P x_{i_1}$. $P \in \mathcal{P}(X)$ es *triple-acíclica* si para cualesquiera $x_i, x_j, x_l \in X$ se verifica que si ocurre $x_i P x_j$ y $x_j P x_l$, entonces no ocurre $x_l P x_i$. Obviamente, toda relación de preferencia acíclica es triple-acíclica. Por otra parte, para $n = 3$ los conceptos de aciclicidad y triple-aciclicidad coinciden.

2.1 Consistencia en preferencias recíprocas

Definición 1. Un operador monótono es una función continua $g : [0.5, 1]^2 \rightarrow [0.5, 1]$ que satisface las siguientes propiedades:

1. *Monotonía.* $g(a, b) \geq g(a', b')$ para cualesquiera $(a, b), (a', b') \in [0.5, 1]^2$ tales que $a \geq a'$ y $b \geq b'$.

2. *Simetría.* $g(a, b) = g(b, a)$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$.

Definición 2. Sean $R \in \mathcal{R}(X)$ y g un operador monótono. R es g -transitiva si para cualesquiera $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ se verifica

$$r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jl} > 0.5 \Rightarrow r_{il} > 0.5 \text{ y } r_{il} \geq g(r_{ij}, r_{jl}).$$

Denotaremos por T_g al conjunto de relaciones de preferencia recíprocas g -transitivas; es decir,

$$T_g = \{R \in \mathcal{R}(X) \mid R \text{ es } g\text{-transitiva}\}.$$

Es importante destacar que si f y g son dos operadores monótonos, R es g -transitiva y $g(a, b) \geq f(a, b)$ para todo $(a, b) \in [0.5, 1]^2$, entonces R es f -transitiva; es decir, $T_g \subseteq T_f$.

En este trabajo se considerarán tres operadores monótonos: los correspondientes a la función constante 0.5, al mínimo y al máximo:

1. R es *0.5-transitiva* si R es g -transitiva, con $g(a, b) = 0.5$ para todo $(a, b) \in [0.5, 1]^2$:

$$r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jl} > 0.5 \Rightarrow r_{il} > 0.5$$

para cualesquiera $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$.

2. R es *min-transitiva* si R es g -transitiva, con $g(a, b) = \min\{a, b\}$ para todo $(a, b) \in [0.5, 1]^2$:

$$r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jl} > 0.5 \Rightarrow r_{il} \geq \min\{r_{ij}, r_{jl}\}$$

para cualesquiera $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$.

3. R es *max-transitiva* si R es g -transitiva, con $g(a, b) = \max\{a, b\}$ para todo $(a, b) \in [0.5, 1]^2$:

$$r_{ij} > 0.5 \text{ y } r_{jl} > 0.5 \Rightarrow r_{il} \geq \max\{r_{ij}, r_{jl}\}$$

para cualesquiera $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$.

Los conjuntos de relaciones de preferencia recíprocas 0.5-transitivas, min-transitivas y max-transitivas se denotarán por $T_{0.5}$, $T_{\min}$ y $T_{\max}$, respectivamente.

Puesto que $\max\{a, b\} \geq \min\{a, b\} \geq 0.5$ para cualesquiera $a, b \in [0.5, 1]$, se tiene $T_{\max} \subseteq T_{\min} \subseteq T_{0.5}$.

Además, las relaciones de preferencia recíprocas min-transitivas (y, por tanto, las max-transitivas) cumplen la siguiente propiedad.

Lema 1. Si $R \in T_{\min}$, entonces $r_{ij} + r_{jl} + r_{li} \leq 2$ para cualesquiera $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $r_{ij} + r_{jl} + r_{li} > 2$. De aquí se deduce que dos de los tres sumandos son mayores que 0.5 (si lo fueran los tres la relación no sería min-transitiva). Supongamos $r_{ij}, r_{jl} > 0.5$. Entonces $r_{il} \geq \min\{r_{ij}, r_{jl}\}$ o, equivalentemente, $r_{li} \leq \max\{r_{ji}, r_{lj}\} = \max\{1 - r_{ij}, 1 - r_{jl}\}$. Por tanto,

$$r_{ij} + r_{jl} + r_{li} \leq r_{ij} + r_{jl} + \max\{1 - r_{ij}, 1 - r_{jl}\} \leq 2,$$

lo cual contradice $r_{ij} + r_{jl} + r_{li} > 2$. Los otros dos casos posibles, $r_{ij}, r_{li} > 0.5$ y $r_{jl}, r_{li} > 0.5$, también llevan a contradicción cuando se realiza un análisis similar al efectuado para el caso $r_{ij}, r_{jl} > 0.5$. ■

2.2 Mayorías con umbral de apoyo

Las mayorías con umbral de apoyo fueron introducidas y caracterizadas axiomáticamente en el ámbito de la Teoría de la Elección Social por García-Lapresta y Llamazares [4]. Constituyen una extensión de las mayorías por diferencia de votos (García-Lapresta y Llamazares [3], Llamazares [5]) al permitir que los votantes puedan mostrar la intensidad de sus preferencias entre las alternativas y que los umbrales de apoyo varíen en un espectro continuo.

Definición 3. Sean $k \in [0, m)$ y $D \subseteq \mathcal{R}^m(X)$. La mayoría con umbral de apoyo k , F_k , es la aplicación $F_k : D \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $F_k(R^1, \dots, R^m) = P_k$, donde

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow \sum_{p=1}^m r_{ij}^p > \sum_{p=1}^m r_{ji}^p + k.$$

Resulta inmediato comprobar que la mayoría F_k puede definirse mediante la media aritmética de las intensidades de preferencia individuales:

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m r_{ij}^p > 0.5 + \frac{k}{2m}.$$

La relación de indiferencia asociada a P_k viene definida por

$$x_i I_k x_j \Leftrightarrow \left| \sum_{p=1}^m r_{ij}^p - \sum_{p=1}^m r_{ji}^p \right| \leq k,$$

o, equivalentemente,

$$x_i I_k x_j \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m r_{ij}^p - 0.5 \right| \leq \frac{k}{2m}.$$

3 Aciclicidad con dos individuos

En la mayoría simple, cuando solo intervienen dos votantes cuyas preferencias son transitivas, las preferencias colectivas son también transitivas y, por tanto, no aparece la paradoja del voto. Sin embargo, en las mayorías con umbral de apoyo sí puede darse este fenómeno indeseable. Sin duda, es un precio a pagar por disponer de mayor flexibilidad.

En el primer resultado se proporcionan condiciones necesarias para que las relaciones de preferencia colectivas asociadas a las mayorías con umbral de apoyo sean acíclicas cuando las relaciones de preferencia recíprocas de los dos individuos son 0.5-transitivas, min-transitivas y max-transitivas.

Proposición 1. Si $m = 2$ y $F_k : D \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es tal que P_k es acíclica para todo $(R^1, R^2) \in D \subseteq \mathcal{R}^2(X)$, entonces

1. $k \in [1, 2)$ para $D = T_{0.5}^2$.
2. $k \in [\frac{2}{3}, 2)$ para $D = T_{\min}^2$.
3. $k \in [0.5, 2)$ para $D = T_{\max}^2$.

DEMOSTRACIÓN

1. Demostraremos que si $k < 1$, entonces P_k no es acíclica. Consideremos dos individuos con las siguientes relaciones de preferencia recíprocas:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & \frac{3-k}{4} & \dots \\ 0 & 0.5 & 1 & \dots \\ \frac{1+k}{4} & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & \frac{1+k}{4} & 0 & \dots \\ \frac{3-k}{4} & 0.5 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

donde los elementos de las matrices no dados explícitamente valen 0.5. Resulta inmediato comprobar que $R^1, R^2 \in T_{0.5}$. Puesto que

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2},$$

se tiene $x_1 P_k x_2$, $x_2 P_k x_3$ y $x_3 P_k x_1$. Por tanto, P_k no es acíclica.

2. Demostraremos que si $k < \frac{2}{3}$, entonces P_k no es acíclica. Consideremos dos individuos con las siguientes relaciones de preferencia recíprocas:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & \frac{2}{3} & \dots \\ 0 & 0.5 & \frac{2}{3} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{2}{3} & 0.5 & \frac{2}{3} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{3} & 0.5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

donde los elementos de las matrices no dados explícitamente valen 0.5. Resulta inmediato comprobar que $R^1, R^2 \in T_{\min}$. Puesto que

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2},$$

se tiene $x_1 P_k x_2$, $x_2 P_k x_3$ y $x_3 P_k x_1$. Por tanto, P_k no es acíclica.

3. Demostraremos que si $k < 0.5$, entonces P_k no es acíclica. Consideremos dos individuos con las siguientes relaciones de preferencia recíprocas:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.75 & 0.75 & \cdots \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 & \cdots \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & \cdots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & \cdots \\ 1 & 0.5 & 0.5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

donde los elementos de las matrices no dados explícitamente valen 0.5. Resulta inmediato comprobar que $R^1, R^2 \in T_{\max}$. Puesto que

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2},$$

se tiene $x_1 P_k x_2$, $x_2 P_k x_3$ y $x_3 P_k x_1$. Por tanto, P_k no es acíclica. ■

Las condiciones necesarias de la proposición anterior son también suficientes si se sustituye aciclicidad por triple-aciclicidad, tal como se demuestra en los siguientes resultados.

Proposición 2. Para $m = 2$ y $F_k : T_{0.5}^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$, si $k \in [1, 2)$, entonces P_k es triple-acíclica para todo $(R^1, R^2) \in T_{0.5}^2$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que P_k no es triple-acíclica. Entonces, existen $R^1, R^2 \in T_{0.5}$, $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_i P_k x_j$, $x_j P_k x_l$ y $x_l P_k x_i$. Por tanto,

$$r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.5,$$

$$r_{jl}^1 + r_{jl}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.5,$$

$$r_{li}^1 + r_{li}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.5.$$

De las condiciones anteriores se deduce $r_{ij}^1 > 0.5$, $r_{jl}^1 > 0.5$ y $r_{li}^1 > 0.5$. Como $R^1 \in T_{0.5}$, se tiene $r_{il}^1 > 0.5$, lo cual contradice $r_{li}^1 > 0.5$. ■

Proposición 3. Para $m = 2$ y $F_k : T_{\min}^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$, si $k \in [\frac{2}{3}, 2)$, entonces P_k es triple-acíclica para todo $(R^1, R^2) \in T_{\min}^2$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que P_k no es triple-acíclica. Entonces, existen $R^1, R^2 \in T_{\min}$, $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_i P_k x_j$, $x_j P_k x_l$ y $x_l P_k x_i$; es decir,

$$r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq \frac{4}{3},$$

$$r_{jl}^1 + r_{jl}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq \frac{4}{3},$$

$$r_{li}^1 + r_{li}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq \frac{4}{3}.$$

Por tanto, $r_{ij}^1 + r_{ij}^2 + r_{jl}^1 + r_{jl}^2 + r_{li}^1 + r_{li}^2 > 4$, lo cual es absurdo pues $R^1, R^2 \in T_{\min}$ y, por el Lema 1, $r_{ij}^1 + r_{jl}^1 + r_{li}^1 + r_{ij}^2 + r_{jl}^2 + r_{li}^2 \leq 2 + 2 = 4$. ■

Proposición 4. Para $m = 2$ y $F_k : T_{\max}^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$, si $k \in [0.5, 2)$, entonces P_k es triple-acíclica para todo $(R^1, R^2) \in T_{\max}^2$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que P_k no es triple-acíclica. Entonces, existen $R^1, R^2 \in T_{\max}$, $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_i P_k x_j$, $x_j P_k x_l$ y $x_l P_k x_i$. Por tanto,

$$r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.25,$$

$$r_{jl}^1 + r_{jl}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.25,$$

$$r_{li}^1 + r_{li}^2 > 1 + \frac{k}{2} \geq 1.25.$$

Es importante destacar que la última condición es equivalente a $r_{il}^1 + r_{il}^2 < 0.75$. Vamos a distinguir tres casos en función del número de individuos a los que se puede aplicar la max-transitividad sobre los pares de alternativas (x_i, x_j) y (x_j, x_l) ; es decir, dependiendo del cardinal del siguiente conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in \{1, 2\} \mid \min\{r_{ij}^p, r_{jl}^p\} > 0.5 \right\}.$$

1. Si $\#\mathcal{P}=2$, entonces $r_{il}^p \geq \max\{r_{ij}^p, r_{jl}^p\}$ para todo $p \in \{1, 2\}$. Por tanto, $r_{il}^1 + r_{il}^2 \geq r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1.25$, lo cual contradice $r_{il}^1 + r_{il}^2 < 0.75$.

2. Si $\#P=1$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $P = \{1\}$. Por la max-transitividad se cumple $r_{il}^1 \geq \max\{r_{ij}^1, r_{jl}^1\} > 0.5$. Como $r_{il}^1 + r_{il}^2 < 0.75$, se tiene $r_{il}^2 < 0.25$ y $\max\{r_{ij}^1, r_{jl}^1\} < 0.75 - r_{il}^2$. Distinguimos dos casos:

- Si $r_{ij}^2 \leq 0.5$, entonces $0.75 - r_{il}^2 > r_{ij}^1 > 1.25 - r_{ij}^2$; es decir, $r_{ij}^2 - r_{il}^2 > 0.5$, lo cual es absurdo pues $r_{ij}^2, r_{il}^2 \in [0, 0.5]$.
- Si $r_{ij}^2 > 0.5$, entonces, dado que $P = \{1\}$, se tiene $r_{jl}^2 \leq 0.5$. En este caso, $0.75 - r_{il}^2 > r_{jl}^1 > 1.25 - r_{jl}^2$; es decir, $r_{jl}^2 - r_{il}^2 > 0.5$, lo cual es absurdo pues $r_{jl}^2, r_{il}^2 \in [0, 0.5]$.

3. Si $\#P=0$, como $r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1.25$ y $r_{jl}^1 + r_{jl}^2 > 1.25$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_{ij}^1 > 0.5$, $r_{jl}^1 \leq 0.5$, $r_{ij}^2 \leq 0.5$ y $r_{jl}^2 > 0.5$. Dado que $r_{li}^1 + r_{li}^2 > 1.25$, distinguimos tres casos:

- Si $r_{li}^1 > 0.5$ y $r_{li}^2 > 0.5$, entonces, como $R^1, R^2 \in T_{\max}$, se tiene $r_{lj}^1 \geq \max\{r_{li}^1, r_{ij}^1\}$ y $r_{ji}^2 \geq \max\{r_{jl}^2, r_{li}^2\}$. La primera condición es equivalente a $r_{jl}^1 \leq \min\{r_{ji}^1, r_{il}^1\}$. Por tanto,

$$r_{ji}^1 + r_{ji}^2 \geq r_{jl}^1 + r_{jl}^2 > 1.25,$$

lo cual es absurdo, pues $r_{ij}^1 + r_{ij}^2 > 1.25$.

- Si $r_{li}^1 > 0.5$ y $r_{li}^2 \leq 0.5$, entonces, como $R^1 \in T_{\max}$, se tiene $r_{lj}^1 \geq \max\{r_{li}^1, r_{ij}^1\}$, lo cual es equivalente a $r_{jl}^1 \leq \min\{r_{ji}^1, r_{il}^1\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} r_{jl}^2 - r_{il}^2 &\geq (r_{jl}^1 + r_{jl}^2) - (r_{il}^1 + r_{il}^2) \\ &> 1.25 - 0.75 = 0.5, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues $r_{ij}^2, r_{il}^2 \in [0.5, 1]$.

- Si $r_{li}^1 \leq 0.5$, entonces, dado que $r_{li}^1 + r_{li}^2 > 1.25$, se tiene $r_{li}^2 > 0.75$. Como $R^2 \in T_{\max}$, entonces $r_{ji}^2 \geq \max\{r_{jl}^2, r_{li}^2\}$, lo cual es equivalente a $r_{il}^2 \leq \min\{r_{jl}^2, r_{li}^2\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} r_{ij}^1 - r_{il}^1 &\geq (r_{ij}^1 + r_{ij}^2) - (r_{il}^1 + r_{il}^2) \\ &> 1.25 - 0.75 = 0.5, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues $r_{ij}^1, r_{il}^1 \in [0.5, 1]$. ■

4 Aciclicidad con tres individuos

Al igual que en la sección anterior, en primer lugar se proporcionan condiciones necesarias para que las relaciones de preferencia colectivas asociadas a las mayorías con umbral de apoyo sean acíclicas.

Proposición 5. Si $m = 3$ y $F_k : D \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es tal que P_k es acíclica para todo $(R^1, R^2, R^3) \in D \subseteq R^3(X)$, entonces

1. $k \in [2, 3)$ para $D = T_{0.5}^3$.

2. $k \in [1, 3)$ para $D = T_{\min}^3$ o $D = T_{\max}^3$.

DEMOSTRACIÓN

1. Demostraremos que si $k < 2$, entonces P_k no es acíclica. Consideremos tres individuos con las siguientes relaciones de preferencia recíprocas:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & \frac{5-k}{6} & \dots \\ 0 & 0.5 & 1 & \dots \\ \frac{1+k}{6} & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0.5 & \frac{1+k}{6} & \dots \\ 1 & \frac{5-k}{6} & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0.5 & \frac{1+k}{6} & 0 & \dots \\ \frac{5-k}{6} & 0.5 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

donde los elementos de las matrices no dados explícitamente valen 0.5. Resulta inmediato comprobar $R^1, R^2, R^3 \in T_{0.5}$. Puesto que

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^1 + r_{ij}^2 + r_{ij}^3 > 1.5 + \frac{k}{2},$$

se tiene $x_1 P_k x_2$, $x_2 P_k x_3$ y $x_3 P_k x_1$. Por tanto, P_k no es acíclica.

2. Demostraremos que si $k < 1$, entonces P_k no es acíclica. Consideremos tres individuos con las siguientes relaciones de preferencia recíprocas:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0.5 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0.5 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.5 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

donde los elementos de las matrices no dados explícitamente valen 0.5. Resulta inmediato comprobar $R^1, R^2, R^3 \in T_{\max} \subseteq T_{\min}$. Puesto que

$$x_i P_k x_j \Leftrightarrow r_{ij}^1 + r_{ij}^2 + r_{ij}^3 > 1.5 + \frac{k}{2},$$

se tiene $x_1 P_k x_2$, $x_2 P_k x_3$ y $x_3 P_k x_1$. Por tanto, P_k no es acíclica. ■

Las condiciones necesarias de la proposición anterior son también suficientes si se sustituye aciclicidad por triple-aciclicidad, tal como se demuestra en los siguientes resultados.

Proposición 6. Para $m = 3$ y $F_k : T_{0.5}^3 \rightarrow \mathcal{P}(X)$, si $k \in [2, 3)$, entonces P_k es triple-acíclica para todo $(R^1, R^2, R^3) \in T_{0.5}^3$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que P_k no es triple-acíclica. Entonces, existen $R^1, R^2, R^3 \in T_{0.5}$, $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_i P_k x_j$, $x_j P_k x_l$ y $x_l P_k x_i$. Por tanto,

$$r_{ij}^1 + r_{ij}^2 + r_{ij}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2.5,$$

$$r_{jl}^1 + r_{jl}^2 + r_{jl}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2.5,$$

$$r_{li}^1 + r_{li}^2 + r_{li}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2.5.$$

De las condiciones anteriores se deduce $r_{ij}^1 > 0.5$, $r_{jl}^1 > 0.5$ y $r_{li}^1 > 0.5$. Como $R^1 \in T_{0.5}$, se tiene $r_{il}^1 > 0.5$, lo cual contradice $r_{li}^1 > 0.5$. ■

Proposición 7. Para $m = 3$ y $F_k : T_{\min}^3 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ o $F_k : T_{\max}^3 \rightarrow \mathcal{P}(X)$, si $k \in [1, 3)$, entonces P_k es triple-acíclica para todo $(R^1, R^2, R^3) \in T_{\min}^3$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $F_k : T_{\min}^3 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ (el caso $F_k : T_{\max}^3 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ se demuestra de forma análoga). Supongamos, por reducción al absurdo, que P_k no es triple-acíclica. Entonces, existen $R^1, R^2, R^3 \in T_{\min}$, $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_i P_k x_j$, $x_j P_k x_l$ y $x_l P_k x_i$; es decir,

$$r_{ij}^1 + r_{ij}^2 + r_{ij}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2,$$

$$r_{jl}^1 + r_{jl}^2 + r_{jl}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2,$$

$$r_{li}^1 + r_{li}^2 + r_{li}^3 > 1.5 + \frac{k}{2} \geq 2.$$

Por tanto,

$$\sum_{p=1}^3 r_{ij}^p + \sum_{p=1}^3 r_{jl}^p + \sum_{p=1}^3 r_{li}^p > 6,$$

lo cual es absurdo pues $R^1, R^2, R^3 \in T_{\min}$ y, por el Lema 1,

$$\sum_{p=1}^3 (r_{ij}^p + r_{jl}^p + r_{li}^p) \leq 2 + 2 + 2 = 6. \quad \blacksquare$$

A la vista de los resultados obtenidos, cuanto mayor sea el nivel de coherencia en las preferencias individuales, más bajo es el umbral que garantiza la coherencia en la preferencia colectiva.

5 Trabajo futuro

En el presente trabajo se ha considerado únicamente la presencia de dos o tres votantes. Queda pendiente, por tanto, la tarea de analizar el problema cuando hay un número mayor de individuos. Por otra parte, solo se han analizado dos condiciones básicas de racionalidad colectiva: la triple-aciclicidad y la aciclicidad. En el futuro se analizará cuándo se puede garantizar la transitividad de las preferencias colectivas al aplicar las mayorías con umbral de apoyo.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación del Ministerio de Ciencia e Innovación (proyectos ECO2009-07332 y ECO2009-12836), de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (proyecto VA092A08) y de FEDER.

Referencias

- [1] J.A. Ferejohn, D.M. Grether. "On a class of rational social decisions procedures". *Journal of Economic Theory* 8, pp. 471-482, 1974.
- [2] P.C. Fishburn. *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [3] J.L. García-Lapresta, B. Llamazares. "Majority decisions based on difference of votes". *Journal of Mathematical Economics* 35, pp. 463-481, 2001.
- [4] J.L. García-Lapresta, B. Llamazares. "Preference intensities and majority decisions based on difference of support between alternatives". *Group Decision and Negotiation*, en prensa, doi 10.1007/s10726-009-9156-z.
- [5] B. Llamazares. "The forgotten decision rules: Majority rules based on difference of votes". *Mathematical Social Sciences* 51, pp. 311-326, 2006.
- [6] D.G. Saari. "Consistency of decision processes". *Annals of Operations Research* 23, pp. 103-137, 1990.