

TEMA 4: Análisis de sistemas

- 4.1.- Introducción.
- 4.2.- Efecto de los polos en el comportamiento.
- 4.3.- Estabilidad
- 4.4.- Señales de prueba, tipos de respuestas respuesta y comportamientos.
- 4.5.- Análisis de la respuesta transitoria de un sistema de primer orden.
- 4.6.- Análisis de la respuesta transitoria de un sistema de segundo orden.
- 4.7.- Respuesta en frecuencia
- 4.8.- Análisis de comportamientos

4.1 Introducción

4.2 Efecto de los polos en el comportamiento

Como se describió en el tema anterior, la función de transferencia que caracteriza un sistema puede ser descompuesta en fracciones parciales, donde el denominador de cada una de las fracciones es un monomio con el polo correspondiente:

$$G(s) = \frac{k(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot (s - z_3) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} = \frac{r_1}{(s - p_1)} + \frac{r_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{r_m}{(s - p_{m1})}$$

De esta forma, la respuesta del sistema a una señal determinada puede considerarse como la suma de las respuestas de cada uno de las fracciones obtenidas en la descomposición:

$$Y(s) = G(s) \cdot F(s) = \frac{r_1}{(s - p_1)} \cdot F(s) + \frac{r_2}{(s - p_2)} \cdot F(s) + \dots + \frac{r_m}{(s - p_{m1})} F(s)$$

Este hecho cobra un especial interés ya que solo pueden presentarse cinco tipos de polos o grupos de polos (ver Figura.-1.1: real negativos, real positivo, imaginarios

conjugados , complejos conjugados con parte real negativa y complejos conjugados con parte real negativa).

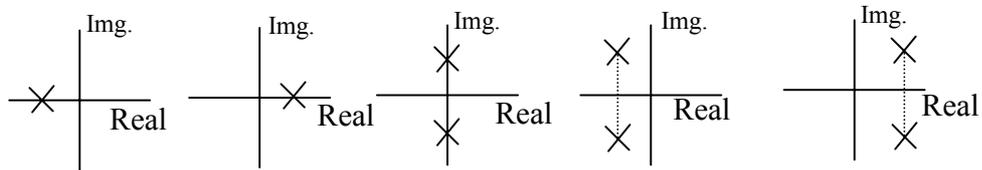


Figura.-1.1 Posibles grupos de polos que pueden presentarse

Por tanto, si previamente se ha hecho un estudio de la respuesta que presenta cada uno de estos cinco tipos de polos; dado un sistema y sus polos correspondientes, será muy sencillo estimar, sin realizar ningún tipo de simulación o cálculo, el comportamiento final del mismo.

A continuación se presentan el tipo de respuesta de cada uno de los tipos de polos a la señal escalón :

Polos Reales

Cuando la función de transferencia presenta polos reales, en la descomposición en fracciones aparecen términos en la forma:

$$\frac{r}{(s - p)}$$

con $p \in R$

Los dos casos posibles son $p > 0$ o $p < 0$;

En el caso de ser $p > 0$ (el polo es positivo), considerando como entrada la señal escalón se obtendrá una respuesta como la mostrada en la Figura.-1.2.

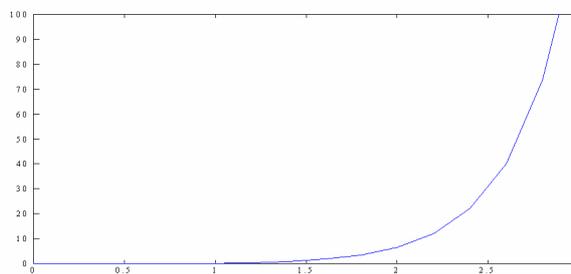


Figura.-1.2 Respuesta a la señal escalón para un polo real positivo

En el caso de ser $p < 0$ (el polo es negativo), la respuesta a la función escalón es la presentada en la Figura.-1.3.

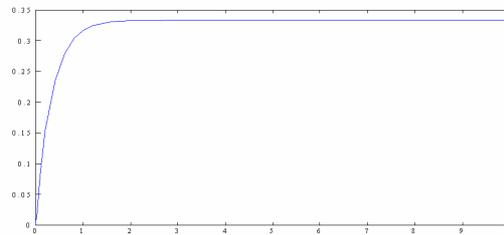


Figura.-1.3 Respuesta a la señal escalón para un polo real negativo

Los razonamientos matemáticos que justifican las respuestas obtenidas se presenta en las siguientes secciones. Por ahora, cabe resaltar que cuando aparecen polos reales negativos, el sistema presenta una tendencia a estabilizarse alrededor de un valor determinado, por tanto, de acuerdo a lo expuesto en los primeros temas, el sistema contendrá algún bucle de realimentación negativo. Por el contrario, si tiene polos reales positivos, el sistema presenta una tendencia al crecimiento exponencial, lo cual significa que contendrá algún bucle de realimentación positivo.

Polos Imaginarios conjugados

Cuando la función de transferencia presenta un par de polos imaginarios conjugados, en la descomposición en fracciones aparecen términos en la forma:

$$\frac{r}{(s - j\omega) + (s + j\omega)} \text{ con } \omega \in R$$

En este caso, para la señal escalón se obtendrá una respuesta como la mostrada en la Figura.-1.4.

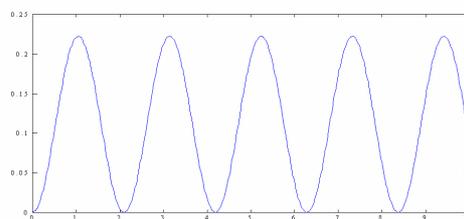


Figura.-1.4 Respuesta a la señal escalón para dos polos imaginarios conjugados

Como puede observarse se trata de una oscilación mantenida. Ya se verá más adelante que la frecuencia de dicha oscilación coincide con ω . Por tanto, cada vez que aparezcan una pareja de este tipo de polos el sistema presentará un comportamiento oscilatorio.

Polos complejos conjugados

Por último la función de transferencia puede presentar polos que tengan parte real e imaginaria. Aparecen también en parejas de conjugados en la forma:

$$\frac{r}{(s - p - j\omega) + (s - p + j\omega)} \text{ con } p \text{ y } \omega \in R$$

En este caso, el comportamiento del sistema será una combinación del efecto de parte real y de la parte imaginaria.

Cabe señalar dos casos. En el primero $p < 0$, la respuesta es como la que se muestra en la figura:

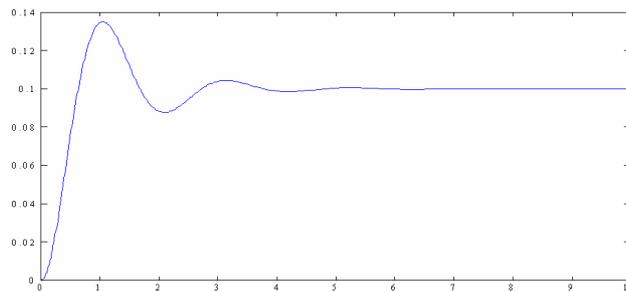


Figura.-1.5 Respuesta a la señal escalón para dos polo imaginarios con parte real positiva

Dado que el sistema presenta parte real negativa, tenderá a estabilizarse alrededor de un valor determinado, pero como el polo tiene parte imaginaria, dicha tendencia presentará un comportamiento oscilatorio. En consecuencia el sistema contendrá algún bucle de realimentación negativo que presenta comportamiento oscilatorio.

El segundo caso se presenta cuando $p > 0$, la respuesta es como la que se muestra en la figura:

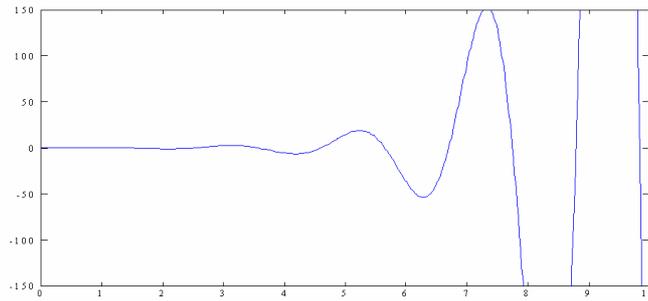


Figura.-1.6 Respuesta a la señal escalón para dos polo imaginarios con parte real negativa

En este caso, debido a la parte real positiva, el sistema presentará un bucle de realimentación positiva con comportamiento oscilatorio.

4.3 Estabilidad

4.3.1 Definición

Pueden encontrarse distintas definiciones que establecen el concepto de estabilidad. Dependiendo del modelo de representación utilizado (representación externa o interna) la definición se hará de un modo u otro. En cualquier caso, el resultado al caracterizar la estabilidad de un sistema debe ser equivalente para cualquiera de los criterios utilizados.

Cuando se utiliza un modelo de representación externa se suele utilizar el concepto de estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Definición

Un sistema inicialmente en reposo es estable si para cualquier señal de entrada acotada la respuesta del sistema es acotada.
--

Coincidiendo con los resultados presentados en la sección anterior, es posible afirmar que la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es que todos los polos de su Función de Transferencia tengan parte real negativa.

De esta forma , hallando las raíces de la Ecuación Característica se puede estudiar si el sistema es estable o no.

Si por el contrario, el sistema se analiza utilizando un modelo de estado, la estabilidad se caracteriza a partir del concepto de punto de equilibrio.

Definición

Sea la ecuación de estado $\dot{x} = g(x, f)$, se denomina estado de equilibrio x_e a la configuración que cumple: $\dot{x} = g(x_e, f) = 0 \quad \forall t$.

Obsérvese que la definición de punto de equilibrio se hace para sistemas autónomos, es decir, la función de entrada f y en consecuencia g no dependen explícitamente del tiempo. Por tanto, para determinar los punto de equilibrio de un sistema habrá que considerar las entradas constantes o, en todo caso, expresadas como función explícita del vector estado.

La forma de encontrar los puntos de equilibrio consiste en igualar el modelo de estado a cero y establecer que valores del vector estado satisfacen dicha ecuación. De forma genérica resolver este tipo de ecuaciones no es sencillo si se trata de sistemas no lineales. En estos casos suelen usarse métodos numéricos que permiten aproximar la solución o soluciones. Cuando se trata de sistemas lineales, está claro que el punto de equilibrio se obtiene de:

$$[A] \cdot X + [B] \cdot F = 0$$

Lo cual representa un sistema lineal de ecuaciones al que es posible aplicar las técnicas clásicas de resolución matricial. Esta claro pues que en un sistema L.T.I hay un solo estado de equilibrio si la matriz $[A]$ no es singular. Esta afirmación no es extensible a los sistemas no lineales, para los que puede darse el caso de existir, incluso, infinitos puntos de equilibrio. Este último hecho justifica la aparición de una extensa y rica colección de comportamientos cuando se consideran no linealidades, lo que contrasta con los sistemas lineales para los que es posible establecer un limitado número de comportamientos.

Es posible caracterizar la estabilidad a partir de los punto de equilibrio.

Definición

Se dice que un estado de equilibrio x_e es global y **asintóticamente estable**, si para un valor de la entrada constante o cero, toda solución converge asintóticamente hacia x_e al incrementar indefinidamente la variable tiempo (t).

En el caso de un sistema lineal es muy fácil caracterizar si el punto de equilibrio es estable o no:

Condición de estabilidad sistema lineal

Un estado de equilibrio de un sistema L.T.I es asintóticamente estable si los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa. (salvo cancelación interna de polos).

Los autovalores de la matriz [A] son las raíces de la ecuación:

$$\det (I \cdot s - A) = 0$$

Como se vio en el tema anterior, esta ecuación se corresponde con la ecuación característica del sistema, o lo que es lo mismo, la ecuación resultante de igualar a cero el denominador de la función de transferencia. Por tanto es inmediato establecer que los autovalores de la matriz [A] son los polos de la función de transferencia que representa el sistema; lo cual es lógico, pues de todo lo expresado hasta ahora se podía intuir que un sistema con un punto de equilibrio inestable presentará un comportamiento inestable según el criterio BIBO.

Los puntos de equilibrio estable suelen denominarse **atractores**, ya que las trayectorias del sistema en el espacio de estado suelen converger hacia dichos puntos tal y como si fueran atraídos por los mismos. Por el contrario, los puntos de equilibrio inestables suelen denominarse **repulsores** ya que las trayectorias en el espacio de estados suelen alejarse de ellos, tal y como si fueran repelidos por dichos puntos.

4.3.2 Test de estabilidad

La forma más sencilla de determinar la estabilidad de un sistema es pues estudiando las raíces de su ecuación característica. Desde Matlab esto representa una tarea muy sencilla:

Ejemplo:

Sea la ecuación característica : $s^3 + 4 \cdot s^2 + 100 \cdot s + 500$ encontrar sus raíces.

Con el comando: `Pol = [1 4 100 500]` introducimos el polinomio.

Las raíces se encuentran con: `root(pol)`

la respuesta del sistema:

`ans = 0.4060 +10.1854i`

`0.4060 -10.1854i`

`-4.8120`

También es fácil conocer los polos del sistema si este viene representado por un modelo de estado, basta con encontrar los autovalores de la matriz [A].

Ejemplo:

Sea el sistema cuya matriz de transición [A] es de la forma:

$$[A]= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

encontrar los polos del sistema.

`A=[1 0 0;2 -3 0;0 1 -1]`; Los polos son los autovalores de la matriz, que se calculan con el comando: `eig(A)`, la respuesta del sistema es:

`ans =`

`-1`

`-3`

`1`

A continuación se presenta un conocido algoritmo que permite determinar si un polinomio presenta polos con parte real positiva. Es conocido con el nombre de Criterio de Routh-Hurwitz.

CRITERIO DE ROUTH-HURWITZ

Se trata de un procedimiento algebraico para determinar si un polinomio tiene algún cero en el semiplano derecho, lo que implicaría la inestabilidad del sistema.

De forma general se supone el polinomio :

$$B_0s^m + B_1s^{m-1} + B_2s^{m-2} + \dots + B_m = 0 \quad \text{Con } B_{m+1} \neq 0$$

El Criterio establece:

- 1- Si un coeficiente es negativo o cero cuando al menos uno de los otros coeficientes es positivo entonces existe una raíz en el semiplano derecho o es imaginaria. En dicho caso el sistema es inestable y el algoritmo acaba aquí.

- 2- Si todos los coeficientes están presentes, son reales y positivos entonces se sigue así:

2.1- Se ordenan coeficientes de la siguiente manera

$$\begin{array}{c|cccc} s^m & B_0 & B_2 & B_4 & B_6 \dots \\ s^{m-1} & B_1 & B_3 & B_5 & B_7 \dots \end{array}$$

2.- Se obtienen luego filas adicionales de coeficientes

$$\begin{array}{c|cccc} s^m & B_0 & B_2 & B_4 & B_6 \\ s^{m-1} & B_1 & B_3 & B_5 & B_7 & \text{Donde} \\ \hline s^{m-2} & U_1 & U_2 & U_3 & \dots \\ s^{m-3} & V_1 & V_2 & \dots & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s & Y_1 & & & \\ s^0 & Z_1 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{B_1 B_2 - B_0 B_3}{B_1} & V_1 &= \frac{U_1 B_3 - B_1 U_2}{U_1} \\ U_2 &= \frac{B_1 B_4 - B_0 B_5}{B_1} & V_2 &= \frac{U_1 B_5 - B_1 U_3}{U_1} \\ U_3 &= \frac{B_1 B_6 - B_0 B_7}{B_1} \end{aligned}$$

Los cálculos se continúan en cada fila hasta que se produzca algún coeficiente igual a cero. Todas las filas se calculan siguiendo el mismo procedimiento, cuando sea necesario, se añade un cero al final de una fila. El conjunto completo de los coeficientes es triangular.

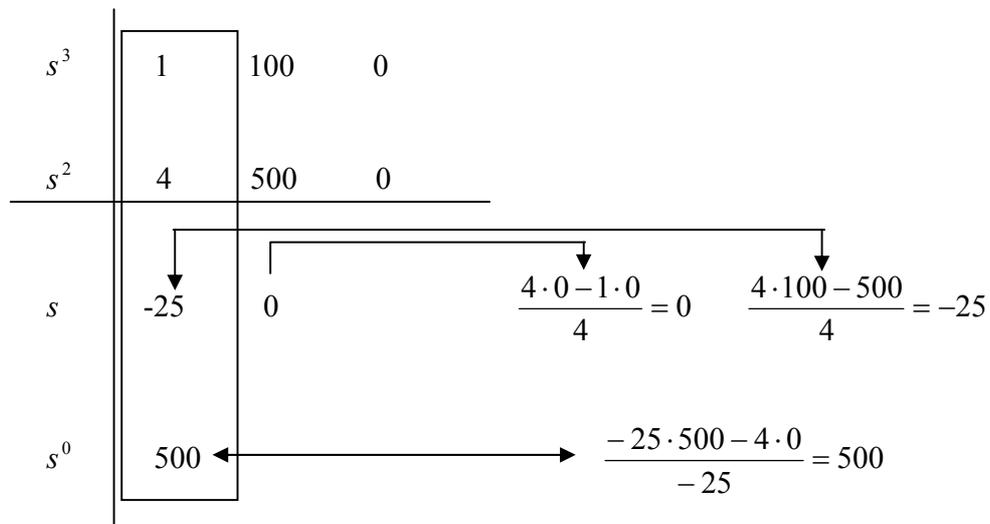
La estabilidad se evalúa observando la primera columna:

- Si todos los coeficientes de la primera columna tienen el mismo signo, el sistema es estable.
- Si se producen n cambios de signo, entonces, existen n raíces en el semiplano derecho.
- Si aparece una fila entera de ceros indica que existen raíces en el eje imaginario o en el de signo opuesto en el eje real.
- Si en alguna fila el primer término es cero mientras que las demás no, se por un valor ε arbitrario, se continúa el algoritmo según el procedimiento habitual y luego se evalúan todos los términos para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ejemplo:

Sea la ecuación característica $s^3 + 4s^2 + 100s + 500 = 0$

La aplicación del algoritmo da como resultado:



- 1º- El sistema es inestable (no todos los coeficientes tienen el mismo signo).
- 2º- Tiene dos raíces en el semiplano derecho (Observar que hay dos cambios de signo, de positivo a negativo y de negativo a positivo)

Ejemplo:

Sea la ecuación característica $s^3 + 10s^2 + 16s + 160 = 0$

La aplicación del algoritmo produce:

$$\begin{array}{l|ll}
 s^3 & 1 & 16 \\
 s^2 & 10 & 160 \\
 s^1 & 0 & 0
 \end{array}$$

El sistema presentará pues o un comportamiento oscilatorio o inestable.

Para determinar si las raíces son conjugadas imaginarias o presentan parte real positiva se utiliza un polinomio auxiliar formado por los coeficientes de la última fila no nulos (Polinomio Auxiliar $F(s) = 10s^2 + 160 = 0$)

A continuación se sustituyen los coeficientes de la fila nula por los coeficientes obtenidos al derivar dicho respecto a s ($\frac{dF(s)}{ds} = 20s$) y se continúa el algoritmo según el procedimiento habitual.

$$\begin{array}{l|ll}
 s^3 & 1 & 16 \\
 s^2 & 10 & 160 \\
 s^1 & 20 & 0 \\
 s^0 & 160 & 0
 \end{array}$$

Según lo anterior el sistema no presenta raíces con parte real positiva, por lo tanto presenta un par de raíces imaginarias conjugadas. En efecto, basta con utilizar matlab para obtener las raíces : Raíces : -10 ; -4j; +4j

Ejemplo:

Sea la ecuación característica $s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$

La primera fila presenta un cero en su primer elemento. Este se sustituye por ϵ y se continúa el algoritmo en su forma habitual.

$$\begin{array}{l|lll}
 s^5 & 1 & 4 & 2 \\
 s^4 & 1 & 4 & 1 \\
 s^3 & 0 & 1 & 0
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l|ll}
 s^5 & 1 & 4 \quad 2 \\
 s^4 & 1 & 4 \quad 1 \\
 s^3 & \epsilon & 1 \quad 0 \\
 s^2 & \frac{4\epsilon - 1}{\epsilon} & 1 \quad 0 \\
 s^1 & \frac{-\epsilon^2 + 4\epsilon - 1}{4\epsilon - 1} & 0 \quad 0 \\
 s^0 & 1 & 0 \quad 0
 \end{array}$$

Para $\epsilon \rightarrow 0$ la primera columna es :

$$1 \quad 1 \quad -\infty \quad 1 \quad 1$$

Hay dos cambios de signo, por lo tanto hay dos raíces con parte real positiva. De hecho, Si se resuelve el problema con matlab se comprueba que las raíces son:

$$\begin{aligned}
 &0.0365 + 1.8708i ; 0.0365 - 1.8708i ; \\
 &-0.7981; -0.1374 + 0.5822i ; -0.1374 - 0.5822i
 \end{aligned}$$

El algoritmo de Routh-Hurwitz con frecuencia se utiliza para evaluar la influencia de un parámetro sobre la estabilidad del sistema.

Ejemplo:

Evaluar los valores de k para los que la ecuación característica $s^3 + 2s^2 + s + k = 0$ presenta polos estables.

Aplicando el algoritmo:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & k \\ \hline s^1 & \frac{2-k}{2} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

Si el sistema es estable no debe haber cambios en la primera columna. Para el caso de la tercera fila: $\frac{2-k}{2} > 0 \rightarrow k < 2$. Para el caso de la cuarta fila: $k > 0$.

Por tanto, el sistema es estable para: $0 < k < 2$

4.4 Señales de prueba, tipos de respuestas y comportamientos.

La señal de entrada a un Sistema Dinámico no suele conocerse por anticipado. Además, en la mayoría de las situaciones la entrada no puede expresarse analíticamente. Sin embargo se puede disponer de señales de prueba típicas que permitan analizar el comportamiento del sistema. Las señales típicas de prueba fueron introducidas en el capítulo anterior: función escalón, función rampa, función impulso, función senoidal. Dependiendo del sistema o situación a analizar se usa con preferencia un tipo u otro de señal:

- Sistemas con entradas de choque → Función impulso
- Perturbaciones Súbitas y prolongadas en el tiempo → Función escalón
- Entradas crecientes con el tiempo → Función rampa
- Sistemas con entradas oscilatorias → Función senoidal

Usando estas señales es posible sistematizar el análisis de los sistemas.

En términos estrictos, el **comportamiento** de un sistema viene dado por las trayectorias de sus variables de estado en el espacio de estado. Es decir, en un espacio de dimensión igual al número de variables de estado, se dibujan las sucesivas configuraciones que va presentando el sistema. Esta gráfica determina una curva que representa el comportamiento del sistema. Su estudio cobra especial interés cuando se están utilizando técnicas de representación interna (ver Figura.-1.7).

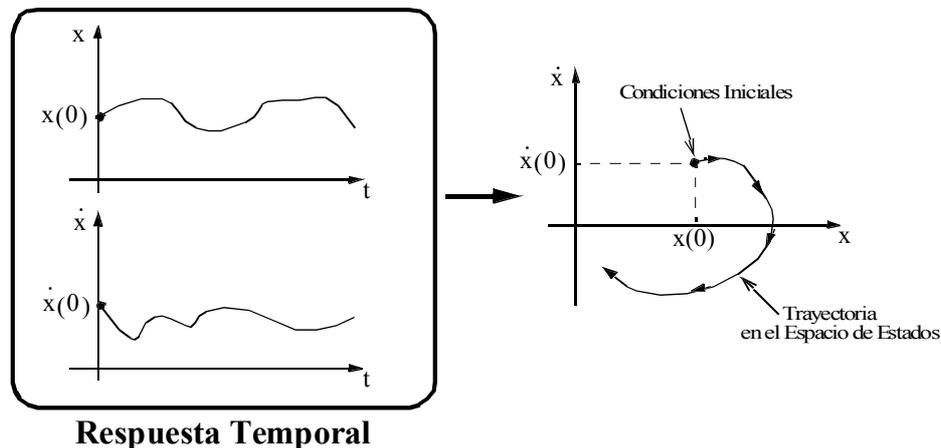


Figura.-1.7 Relación entre la respuesta temporal y la trayectoria de estado

Por otra parte, la evolución temporal seguida por cada una de las salidas de un sistema reciben el nombre de **respuesta temporal** (ver Figura.-1.7). Como se describió en el tema anterior, la respuesta temporal puede dividirse en dos partes **Respuesta estacionaria** y **Respuesta transitoria**. La estimación del valor final alcanzado por la respuesta estacionaria de un sistema lineal estable puede realizarse aplicando el Teorema del valor final (para el caso de utilizar un modelo de representación externa) o bien determinando el punto de equilibrio (cuando se hace uso de un modelo de estado).

Los sistemas lineales estables pueden presentar tres tipos de comportamientos o de respuesta temporal:

Oscilatorio: La evolución de las variables de estado y la respuesta temporal consisten en oscilaciones que no decrecen con el tiempo. Ejemplo: el movimiento de un muelle sin fricción.

Subamortiguado: La evolución de las magnitudes fundamentales del sistema realizan una serie de oscilaciones de amplitud decreciente antes de alcanzar el estado estacionario. Ejemplo: muelle con amortiguación.

Sobreamortiguado: Se alcanza el régimen estacionario sin oscilaciones.

4.5 Análisis de la respuesta transitoria de un sistema de primer orden.

Se utilizará como ejemplo de sistema de primer orden un sistema formado por un termómetro que esta a una temperatura ambiente θ_a y se le sumerge en un baño con temperatura $\theta_a + \theta_b$ (ver figura).

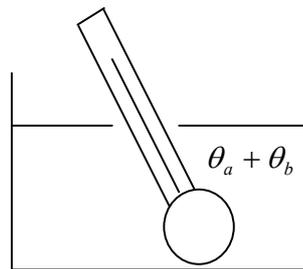


Figura.-1.8 Sistema térmico

Considérese que el sistema está linealizado (ver apartado 2.4 en el tema 2) en torno a la temperatura ambiente θ_a y que la diferencia instantánea de la temperatura respecto al ambiente es $\theta(t)$ así que en $t = 0$ $\theta(0) = 0$.

En general, los valores de los parámetros térmicos de un sistema se encuentran distribuidos a lo largo de las sustancias. Para un análisis preciso hay que recurrir a modelos de parámetros distribuidos. No obstante, para simplificar el análisis, se supondrá que es posible representar las características térmicas del sistema mediante un modelo de parámetros concentrados. Se considera que el sistema termómetro-líquido está caracterizado por una resistencia térmica R (medida en grados por vatio) que se opone

al flujo de calor w_i (medido en julios por segundo), y el termómetro está caracterizado por su capacidad térmica C (medida en julios por grado) que indica la energía calorífica necesaria para que el termómetro aumente su temperatura un grado.

Por tanto, ya que la temperatura alcanzada por el termómetro depende de la energía calorífica acumulada y ésta, a su vez, varía con el flujo de calor entrante w_i , es posible escribir: $C \frac{d\theta}{dt} = w_i$. Además, el flujo de energía calorífica depende de la diferencia de

temperatura entre el termómetro y el líquido, es decir: $w_i = \frac{\theta_i - \theta}{R}$. En consecuencia es posible escribir la siguiente ecuación diferencial:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b$$

la cual representa un sistema de primer orden. Está claro que el modelo de estado coincide con esta misma ecuación. La función de transferencia es:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_b(s)} = \frac{1}{RC \cdot s + 1}$$

4.5.1 Respuesta a la señal escalón

Considérese el caso en que la temperatura del baño se mantiene constante o sea $\theta_b = cte$ y el termómetro se deja sumergido en el líquido a partir de $t = 0$. La constante de tiempo τ del sistema se define como $\tau = RC$.

Se trata de encontrar la respuesta cuando la señal de entrada responde a la señal

$$\text{escalón: } \theta_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < 0 \\ \theta_b & \text{Si } t \geq 0 \end{cases}$$

Como $\theta(0) = 0$ solo hay que considerar la respuesta forzada

$$\Theta(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1} \Theta_b(s)$$

Dado que $\theta_b(t) = \theta_b u(t)$ se trata de una Función Escalón : $\Theta_b(s) = \frac{\theta_b}{s}$

Por tanto

$$\Theta(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1} \frac{\theta_b}{s} = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] \theta_b \rightarrow \text{Expansión en Fracciones Simples.}$$

Haciendo la Transformada Inversa de Laplace:

$$\theta(t) = \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \theta_b \quad t \geq 0$$

Se comprueba que en $t = 0$ $\theta(0) = (1 - e^0) \theta_b = 0$

y el valor final para $t = \infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t/\tau}) \theta_b = \theta_b$

El valor en equilibrio se alcanza cuando $\frac{d\theta}{dt} = 0$ por lo tanto sustituyendo en la ecuación diferencial $\theta_e = \theta_b$. Lo cual coincide con el resultado de aplicar el teorema del valor final.

La gráfica que representa el resultado obtenido es la siguiente

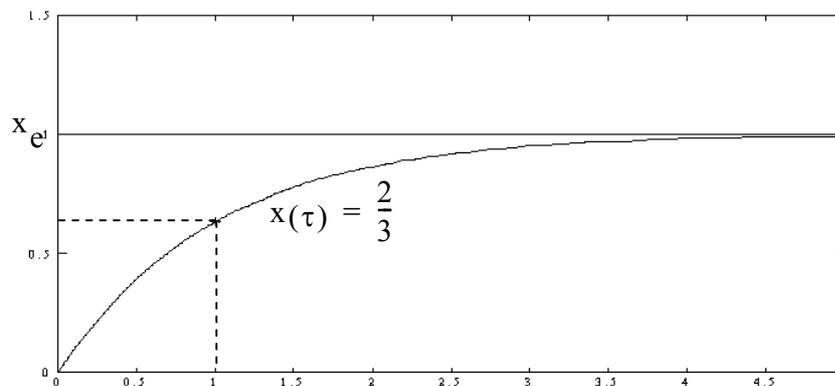


Figura.-1.9 Respuesta a la señal escalón de un sistema de primer orden con C.I. nulas

Una de las características más importantes es que para $t = \tau$ $\theta(\tau) = 0,632\theta_b$; o sea se alcanza el 63,2 % de la temperatura final.

Si el sistema hubiese tenido condiciones iniciales no nulas $\theta(0)$ habría que haber considerado el cálculo de la respuesta libre:

$$\Theta_L(s) = \frac{\theta(0)}{\tau \cdot s + 1} \rightarrow \theta_L(t) = \theta(0) \cdot e^{-t}$$

Ahora la respuesta del sistema adopta una representación como se ve en la Figura.-1.10. Observe cómo dependiendo de si las condiciones iniciales están por encima o por debajo del punto de equilibrio, la respuesta obtenida es creciente o decreciente.

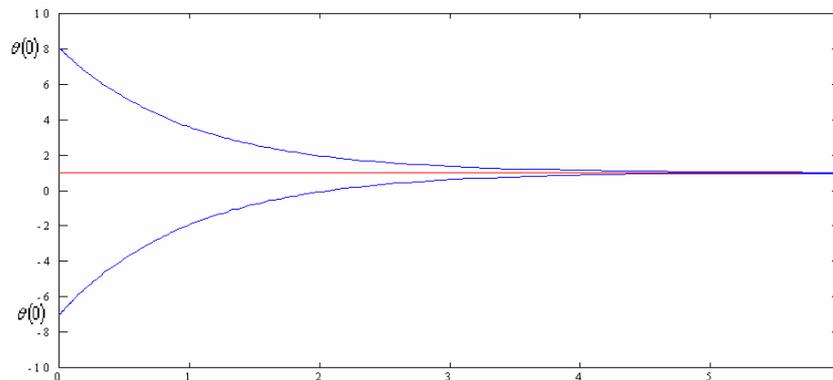


Figura.-1.10 Respuesta a la señal escalón con condiciones iniciales no nulas

Es necesario destacar que todas las consideraciones hechas hasta ahora se basan en suponer que el polo del sistema $-\frac{1}{\tau}$ es negativo, y por lo tanto, el sistema es estable. En el caso de no ser así, nos encontraríamos ante un sistema inestable. En este caso, dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema actuaría como un círculo virtuoso si el valor inicial es mayor que el punto de equilibrio y como un círculo vicioso si el valor inicial está por debajo del punto de equilibrio, ver Figura.-1.11.

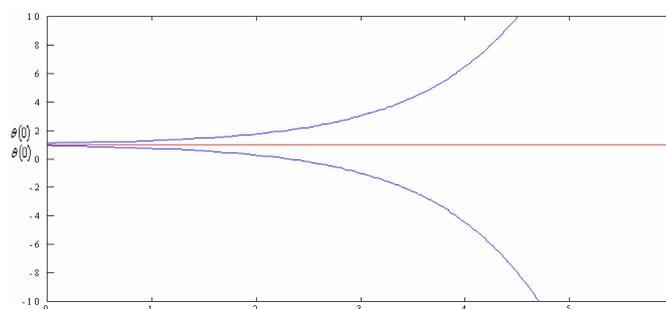


Figura.-1.11 Respuesta a la señal escalón de un sistema de primer orden inestable

4.5.2 Puntos de Equilibrio en sistemas de 1^{er} Orden

De acuerdo con todo lo expuesto, el punto de equilibrio del sistema de lineal de primer orden: $\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot f$ es: $x_e = -\frac{B \cdot f}{A}$.

Es fácil estudiar la estabilidad del punto de equilibrio al representar la variación de la derivada de x ($\frac{dx}{dt}$) respecto de x . La gráfica obtenida es una recta, donde el punto de equilibrio viene determinado por el corte con el eje de ordenadas. Si el valor de A es mayor que cero, dicha gráfica se corresponde con una recta de pendiente positiva ver Figura.-1.12.

Figura.-1.12 Puntos de equilibrio de un sistema de primer orden

Es posible analizar la naturaleza estable o inestable del punto de equilibrio a partir de dicha gráfica. En efecto, si el sistema parte de una condición inicial $x(0)$ mayor que el punto de equilibrio, la gráfica proporciona un valor $\frac{dx}{dt} > 0$ lo que supone que el sistema tenderá a hacer x cada vez mayor, siendo repelido del punto de equilibrio. Si se da el caso de que la condición inicial es menor que el punto de equilibrio la gráfica asocia un valor $\frac{dx}{dt} < 0$ lo que significa el valor de x tenderá a hacerse cada vez menor; de nuevo el punto de equilibrio actúa como repulsor. Por tanto, nos encontramos ante un caso de equilibrio inestable. Este resultado es consecuente con el análisis de estabilidad realizado con anterioridad. Basta con encontrar la ecuación característica de la ecuación diferencial para comprobar que si $A > 0$ el polo es real positivo y por tanto, se trata de un sistema inestable.

Por el contrario, si $A < 0$ la gráfica que se obtiene es una recta de pendiente negativa (ver Figura.-1.12). En este caso, si el sistema parte de una condición inicial mayor que el

punto de equilibrio, la gráfica proporciona un valor $\frac{dx}{dt} < 0$ lo que supone que el sistema tenderá a hacer que x se acerque cada vez más al punto de equilibrio, es decir atraído hacia él. Si se da el caso de que la condición inicial es menor que el punto de equilibrio la gráfica proporciona un valor $\frac{dx}{dt} > 0$, lo que significa que, de nuevo, el valor de x tenderá a acercarse cada vez más al punto de equilibrio; el punto de equilibrio actúa como un atractor. Por tanto, nos encontramos ante un caso de equilibrio estable.

Observe que la estabilidad o inestabilidad no dependen del valor de B . Dicho valor sólo determina, junto con A , cuál será el punto de equilibrio. La estabilidad solo depende de A .

4.6 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Para analizar la repuesta transitoria de un sistema de 2º orden se utilizará una masa con un resorte que presenta una amortiguación. Este modelo se presentó en el apartado 2.3.5 del tema 2.

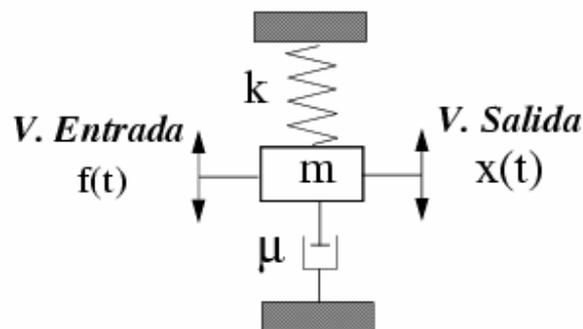


Figura.-1.13 Masa con resorte y amortiguación

Para este sistema la ecuación diferencial que modela la evolución de la salida es:

$$m \ddot{x} + \mu \dot{x} + k \cdot x = F$$

Es costumbre escribir el modelo de segundo orden en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 f(t)$$

Para conseguir esta expresión basta con realizar las siguientes transformaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= \frac{f}{m} \\ f_2 &= \frac{f}{k} \\ f &= f_2 \cdot k \end{aligned} \right\} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} f_2$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \quad 2\xi\omega_n = \frac{\mu}{m}$$

A partir de estas últimas identidades es posible alcanza una expresión similar a la anterior.

La función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{\mu}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

El modelo de estado queda (tras realizar las transformaciones descritas en el tema 3) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} f(t)$$

4.6.1 Respuesta a la señal escalón

El cálculo de la respuesta a la señal escalón se obtendrá al realizar el cálculo de la transformada inversa de la expresión:

$$x(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s} \right]$$

Consideraremos que las condiciones iniciales son nulas (con lo cual sólo hay que calcular la respuesta forzada) y que la parte real los polos es negativa (se trata por tanto de un sistema estable).

Dependiendo del tipo de polos el comportamiento del sistema y la respuesta temporal será de una forma u otra. A continuación se analizan los posibles casos:

A) Existencia de dos polos reales negativos: **Respuesta Sobreamortiguada**. Este caso tiene lugar cuando el factor amortiguamiento es menor que uno ($\xi > 1$). El denominador de la función de transferencia se puede escribir como el producto de dos monomios sencillos y el cálculo según la tabla de transformadas es:

$$x(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{(s+a)(s+b)s} \right] = \frac{\omega_n^2}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right]$$

Debido a que los polos no tienen parte imaginaria, la respuesta no presenta oscilaciones (ver Figura.-1.14). Este hecho queda patente al observar la expresión obtenida: una diferencia entre funciones exponenciales.

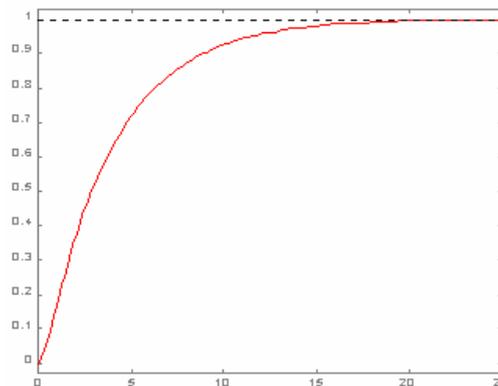


Figura.-1.14 Respuesta Sobreamortiguada

B) Existencia de un polo real doble: **Respuesta Críticamente amortiguada**. Este caso tiene lugar cuando el factor amortiguamiento es igual a uno ($\xi = 1$). El denominador de la función de transferencia se puede escribir como el cuadrado de un monomio y el cálculo según la tabla de transformadas es:

$$x(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \right] = \left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \right]$$

Al igual que en el caso anterior, la respuesta no presenta oscilaciones (ver Figura.-1.15). Realmente, el comportamiento críticamente amortiguado es un caso especial del comportamiento sobreamortiguado, con la particularidad de que la respuesta críticamente amortiguada es la más rápida de todas las sobreamortiguadas.

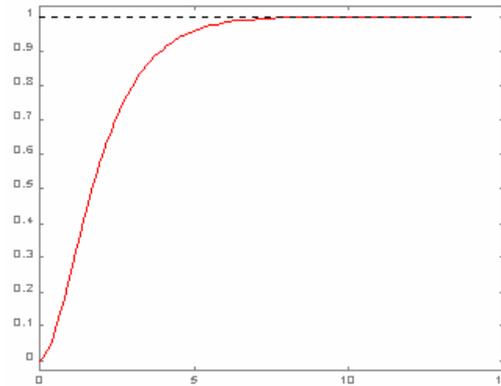


Figura.-1.15 Respuesta críticamente amortiguada

C) Existencia de dos polos complejos conjugados: **Comportamiento Subamortiguado**. Este caso tiene lugar cuando el factor amortiguamiento es menor que uno ($\xi < 1$) pero positivo. La existencia de polos con parte imaginaria determina la aparición de oscilaciones (ver Figura.-1.16). El cálculo según la tabla de transformadas es:

$$x(t) = \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left[\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t + \varphi \right] \right]; \quad \varphi = \operatorname{atan} \left[\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right]$$

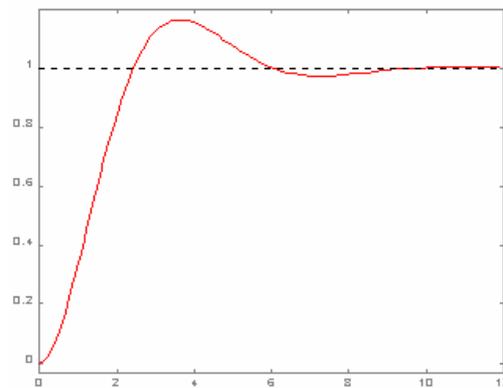


Figura.-1.16 Respuesta subamortiguada

D) Existencia de dos polos imaginarios conjugados: **Respuesta Oscilatoria**. Este caso tiene lugar cuando el factor amortiguamiento es igual a cero ($\xi = 0$). Al no existir componente real la respuesta no se estabiliza y mantiene la oscilación de forma indefinida (ver Figura.-1.17). En estos casos se dice que el sistema es marginalmente estable). El cálculo según la tabla de transformadas es:

$$x(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \right] = 1 - \cos(t \cdot \omega_n)$$

Observe que la frecuencia de oscilación del sistema coincide con ω_n . A esta magnitud se le llama **frecuencia natural de oscilación** ya que representa la frecuencia a la que oscilaría el sistema sino hubiese amortiguación.

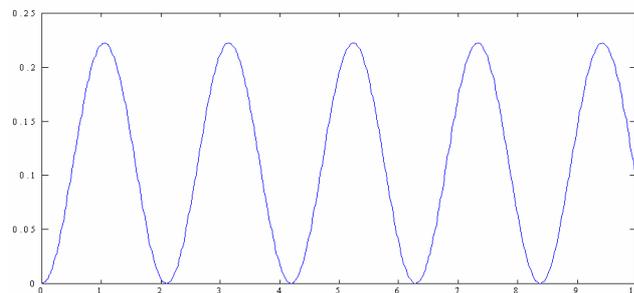


Figura.-1.17 Respuesta oscilatoria

4.6.2 Especificaciones temporales de sistemas subamortiguados

Es frecuente caracterizar los sistemas subamortiguados mediante la respuesta a la señal escalón. Existen diversas relaciones entre los distintos valores que alcanza la respuesta y los parámetros que definen el sistema. De este modo, sobre una respuesta subamortiguada típica, ver Figura.-1.18, es posible definir el valor del sobreimpulso o sobreelongación máxima M , el tiempo de subida T_s , el tiempo de pico T_p y el tiempo de establecimiento T_e .

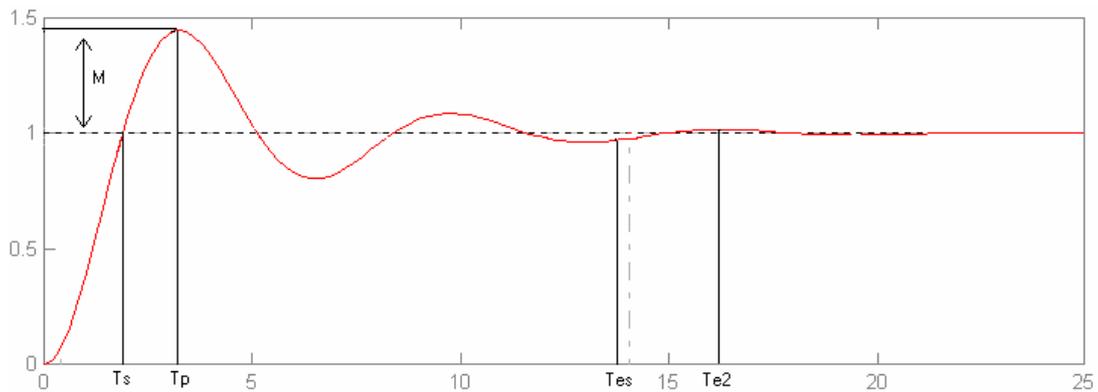


Figura.-1.18 Especificaciones temporales sistema de 2º orden subamortiguado

Las expresiones que relacionan estos valores con los parámetros del sistema son:

Tiempo de Subida:

$$T_s = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}; \quad \phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \dots; \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Sobreimpulso máximo o sobreelongación:

$$M = e^{-\frac{\pi}{\tan \phi}}$$

Tiempo de pico:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de establecimiento al 5%:

$$T_{e5} \approx \frac{3}{\xi \omega_n}$$

Tiempo de establecimiento al 2%:

$$te_2 = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

El tiempo de establecimiento representa el tiempo que necesita el sistema para que la diferencia entre el valor de la señal y el valor límite en estado estacionario difieran un porcentaje determinado. Por ello se definen dos tiempos de establecimiento: Te_5 cuando la señal está a menos de un 5% del valor final; Te_2 cuando está a menos de un 2%. Igualmente suele definirse un termino similar para sistemas críticamente amortiguados, cuya expresión es:

Tiempo de establecimiento amortiguación crítica al 5%:

$$te_5 = \frac{4,74}{\omega_n}$$

Tiempo de establecimiento amortiguación crítica al 2%:

$$te_2 = \frac{5,83}{\omega_n}$$

4.6.3 Puntos de Equilibrio en sistemas de 1^{er} Orden

De la ecuación del modelo de estado se deduce que el punto de equilibrio es:

$$x_{2E} = 0 \quad x_{1E} = \frac{f \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2} = f$$

Ha de quedar claro que, para que el análisis de este apartado tenga sentido, el valor de la entrada ha de ser nulo o constante en el tiempo.

Dado que hay dos variables de estado, el espacio de estados es de dimensión dos, en este caso recibe el nombre de plano de estado. En consecuencia, la evolución temporal del sistema determinará una trayectoria en el plano de estado. La forma de dicha trayectoria dependerá de los valores iniciales y del tipo de punto de equilibrio. Dado un sistema, el dibujo de distintas trayectorias a partir de diversas condiciones iniciales recibe el nombre de **retrato de estado**. El retrato de estado de un sistema es una herramienta de análisis importante pues proporciona una idea global de cómo se comportará el sistema sean cuales sean las condiciones iniciales.

En el caso de un sistema de segundo orden lineal, es muy fácil caracterizar los seis tipos de retratos de estado posible. En primer lugar. Si el sistema presenta dos polos reales negativos, el retrato representa una configuración de **nodo estable** (ver Figura.-1.19). Las trayectorias convergen al punto de equilibrio estable (si los dos polos fueran iguales, las curvas se convertirían en rectas, se trataría de un sistema críticamente amortiguado).

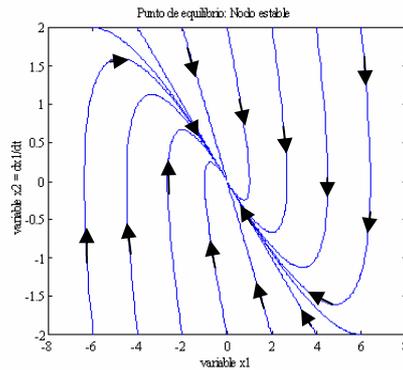


Figura.-1.19 Nodo estable

En el caso de que el sistema presente dos polos con parte real negativa y parte imaginaria, el retrato de estado está formado por espirales que convergen al punto de equilibrio, esta configuración se denomina **foco estable** (ver Figura.-1.20). Las espirales representan las oscilaciones del sistema subamortiguado.

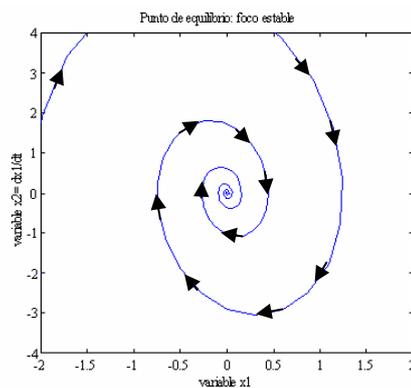


Figura.-1.20 Foco estable

Si el sistema presenta dos polos imaginarios conjugados, el retrato de estados muestra una **configuración de centro** (ver Figura.-1.21). Aparecen trayectorias cerradas alrededor del punto de equilibrio. El tamaño de las trayectorias depende de las

condiciones iniciales, lo cual coincide con el comportamiento de un sistema marginalmente estable, en el que la elongación de la oscilación depende de las condiciones iniciales consideradas.

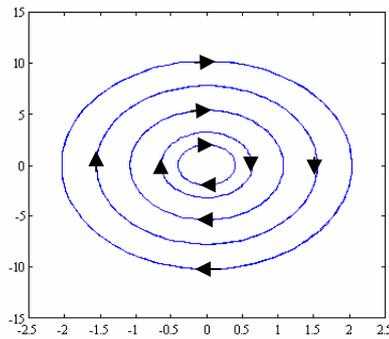


Figura.-1.21 Configuración de centro

En el caso de que el sistema presente un punto de equilibrio inestable, pueden diferenciarse tres casos diferentes.

Si los polos son reales de signo diferente, el retrato representa un punto de equilibrio en **silla de montar**. Observe en la Figura.-1.22 como hay una trayectoria que converge al punto de equilibrio, mientras las demás divergen del mismo. No obstante, esta trayectoria es en realidad una trayectoria inestable, ya que cualquier desviación de la misma produce un alejamiento del punto de equilibrio.

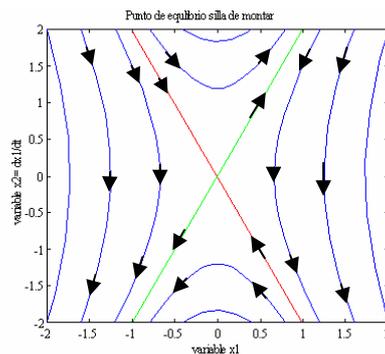


Figura.-1.22 Punto de equilibrio en silla de montar

Si el sistema presenta dos polos complejos conjugados con parte real positiva el retrato nos muestra una configuración de **foco inestable** (ver Figura.-1.23). Las trayectorias

divergen del punto de equilibrio en forma de espiral. Evidentemente la respuesta temporal presenta un comportamiento divergente oscilatorio.

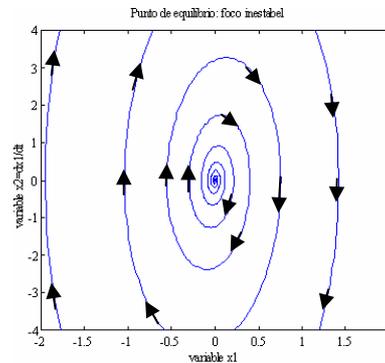


Figura.-1.23 Foco inestable

Por último, cabe la posibilidad de que el sistema presente dos polos reales positivos. En este caso el retrato de estados presenta una configuración de **nodo inestable** como el que se muestra en la Figura.-1.24.

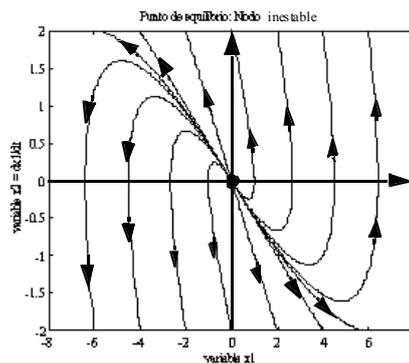


Figura.-1.24 Nodo inestable

4.7 Respuesta en frecuencia

El estudio de la respuesta de un sistema a una señal oscilatoria periódica, como es el caso de una señal senoidal, se conoce como respuesta en frecuencia. Hay tres razones principales para considerar el estudio de la respuesta en frecuencia:

- Muchos fenómenos naturales son de naturaleza senoidal (vibraciones mecánicas, vibraciones electromagnéticas etc).

- Cualquier señal periódica puede representarse mediante una serie de componentes senoidales
- Las señales senoidales son importantes en los sistemas de comunicaciones, en la transmisión de señales potencia etc.

Cuando se aplica una entrada senoidal a un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI), éste tiende a vibrar con su propia frecuencia natural, pero también tiende a seguir a la frecuencia de la señal de entrada.

Si el **sistema es estable** y hay amortiguamiento la presencia en la salida de la frecuencia natural desaparece progresivamente de manera que en el estado estacionario la frecuencia de la respuesta es la misma que en la entrada.

La salida en Estado Estacionario permanente difiere de la entrada solamente por la amplitud y el ángulo de fase.

Así pues, para predecir la salida de un sistema LTI ante una entrada senoidal basta conocer dos términos: la relación entre la amplitud de la entrada y la amplitud de la salida y el ángulo de fase entre la oscilación de entrada y la oscilación de salida. Ambas relaciones dependen de la frecuencia de entrada. El cálculo de ambas se realiza mediante un procedimiento bastante sencillo. Dado un sistema descrito por su Función de Transferencia $F(s)$, se define la **Función de Transferencia Senoidal** como la expresión resultante de hacer la sustitución: $s = j\omega$

$$F(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\} + j \text{Im}\{F(j\omega)\}.$$

La relación entre las amplitudes E / S para una frecuencia ω_0 viene dada por la expresión:

$$|F(j\omega_0)| = \sqrt{\text{Re}\{F(j\omega_0)\}^2 + \text{Im}\{F(j\omega_0)\}^2}.$$

El ángulo de fase E / S se obtiene mediante la expresión:

$$\varphi(j\omega_0) = \arg[F(j\omega_0)] = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{F(j\omega_0)\}}{\text{Re}\{F(j\omega_0)\}}$$

De esta forma, la respuesta en estado estacionario de un sistema LTI estable ante una entrada del tipo

$$U(t) = A \cdot \text{sen} \omega_0 t$$

vendrá dada por

$$x_e(t) = A \cdot |F(j\omega_0)| \cdot \text{sen}[\omega t + \varphi]$$

Ejemplo:

Calcular la salida en Estado Estacionario de un sistema descrito

por $F(s) = \frac{2}{s+2}$ ante la señal de entrada $u(t) = 2 \cdot \text{sen}10t$

1)- Cálculo de $F(j\omega)$

$$F(j\omega) = \frac{2}{2+j\omega} = \frac{2(2-j\omega)}{(2+j\omega)(2-j\omega)} = \frac{2(2-j\omega)}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2} + j\left(-\frac{2\omega}{4+\omega^2}\right)$$

2)- Cálculo de $|F(j\omega)|$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{4}{4+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\omega}{4+\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+4\omega^2}{(4+\omega^2)^2}} = \frac{2}{4+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2} = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

como la frecuencia de la señal de entrada es 10 rad/s la relación E/S en amplitud es:

$$|F(j \cdot 10)| = \frac{2}{\sqrt{4+10^2}} = 0.1961$$

2)- Cálculo de φ :

$$\varphi(j\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im} g(F(j\omega))}{\text{Re}\{F(j\omega)\}} = \text{arctg} \left(\frac{-2\omega}{4+\omega^2} \right) = \text{arctg} \left(-\frac{\omega}{2} \right) = -\text{arctg} \frac{\omega}{2}$$

$$\varphi(j \cdot 10) = -\text{arctg} \frac{10}{2} = -1.3734 \text{ rad}$$

La respuesta estacionaria del sistema es: $x_e(t) = 0.3922 \cdot \text{sen}[\omega t - 1.3734]$

Este mismo resultado puede obtenerse mediante matlab con el comando `evalfr`. En primer lugar hay que definir el sistema:

```
sys=tf([2],[1 2])
```

Transfer function:

$$2$$

$$s + 2$$

El comando `evalfr` devuelve el valor complejo de $F(j\omega)$ al ser evaluada en una frecuencia determinada:

```
» G=evalfr(sys,j*10)
```

G =

$$0.0385 - 0.1923i$$

A partir de estos valores solo queda obtener el módulo:

```
abs(G)
```

ans =

$$0.1961$$

Y a continuación el ángulo de fase:

```
angle(G)
```

ans =

$$-1.3734$$

Como se observa, los resultados coinciden con los obtenidos anteriormente

Lo habitual es evaluar los términos $|F(j\omega)|$ y $\varphi(j \cdot \omega)$ para distintas frecuencias. Los resultados pueden representarse de varias formas.

Por una parte, suelen representarse la evolución de ambos términos por separado, frente al valor de la frecuencia. Se trata de los conocidos diagramas de bode. En este tipo de representación, el valor de $|F(j\omega)|$ suele expresarse en decibelios: $20 \log(|F(j\omega)|)$.

Los diagramas de bode pueden obtenerse fácilmente aplicando métodos manuales, no obstante, aquí se utilizará matlab para obtener dichos diagramas.

Ejemplo:

Determinar mediante un diagrama de bode la respuesta en frecuencia de

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + s + 9.5}$$

Los comandos en matlab son:

```
sys=tf([1],[1 1 9.5])
```

```
bode(sys,w);
```

el resultado obtenido es la siguiente figura

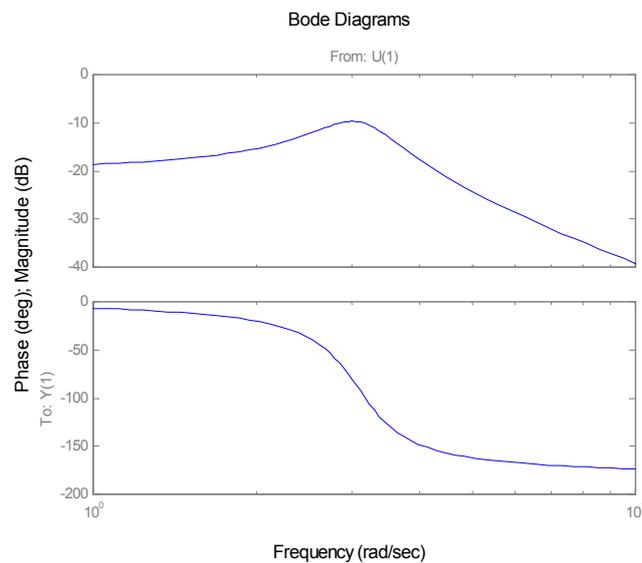


Figura.-1.25 Diagrama de Bode

Observe que este sistema de 2º orden presenta una frecuencia en el que se alcanza una amplitud de oscilación es máxima. Este suele ocurrir con determinados sistemas.

Otra manera de estudiar gráficamente la respuesta en frecuencia es el diagrama polar. En este tipo de gráficos, se representa la evolución el número complejo $F(j\omega)$ para cada uno de los valores que puede tomar ω . Se obtiene representando en el eje de ordenadas la parte real de $F(j\omega)$ y en el eje de accisas la parte imaginaria de $F(j\omega)$. Matlab permite obtener fácilmente este tipo de diagramas.

Ejemplo:

Determinar mediante un diagrama polar la respuesta en frecuencia

$$\text{de } F(s) = \frac{3}{s^2 + s + 9.5} .$$

Los comandos en matlab son:

```
sys=tf([1],[1 1 2])  
w=0:0.1:100;  
[modulo(:,1),fase(:,1)]=bode(sys,w);  
polar(fase*pi/180,modulo);
```

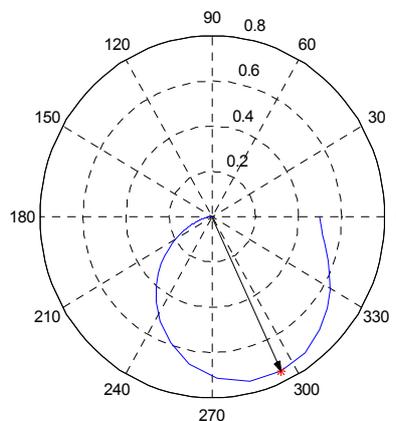


Figura.-1.26 Diagrama polar

Como puede observarse en la Figura.-1.26, el diagrama presenta una frecuencia a la que el módulo (distancia al origen de coordenadas) es máximo. Este resultado coincide con el del ejercicio anterior.

El estudio de la respuesta en frecuencia es una herramienta es muy útil para el análisis de sistemas, pues permite obtener ciertas magnitudes de gran importancia, tales como el **ancho de banda**, el **margen de fase** y el **margen de ganancia**. La primera es de gran importancia en el diseño y estudio de equipos de comunicaciones, las dos segundas representan un elemento eficaz que determina la estabilidad relativa del sistema, siendo de gran utilidad en los procesos de control automático.

4.8 Análisis de comportamientos

En el caso de considerar sistemas lineales, el análisis de comportamientos es muy sencillo. Existen tres comportamientos posibles: Estable, Oscilatorio e Inestable.

En el caso de que el **sistema sea estable**, debe existir una estructura de **realimentación negativa** dominante, que hace que el sistema converja siempre al punto de **equilibrio estable**.

El sistema presentará un comportamiento **oscilatorio** siempre que haya una realimentación negativa dominante que presente **polos imaginarios puros**. En este caso, el punto de equilibrio presentará una configuración de centro y la respuesta temporal se mantiene **oscilando continuamente sin amortiguación**.

Cuando el sistema presenta un **comportamiento inestable** existirá una estructura de realimentación positiva dominante, dependiendo de las condiciones iniciales el sistema se comportará como un **circulo vicioso** o como un **circulo virtuoso**.

Es muy importante resaltar que siempre que se consideren **sistemas lineales**, existe **uno y solo un punto de equilibrio**. Pueden existir múltiples bucles de realimentación negativa y positiva, pero **siempre dominará una realimentación negativa o una positiva** que determinará la naturaleza estable o inestable del sistema.

En cambio, en los sistemas no lineales, es posible la existencia de más de un punto de equilibrio, esto tiene varias e importantes consecuencias. En primer lugar puede suceder que coexistan bucles de realimentación de distinta naturaleza, sin que ninguno domine de forma completa. Un ejemplo se presenta en la ecuación logística (ver sección 2.3.2 del tema 2) donde se produce la alternancia de dominio de un bucle sobre otro. Además, en muchos casos ya no es posible hablar de sistemas estables de forma global ya que es posible la coexistencia de puntos de equilibrio estable con puntos de equilibrio inestable. En efecto, este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Estudiar los puntos de equilibrio del sistema: $\frac{dx}{dt} = B + A \cdot x - x^2$.

Si se utiliza la representación del plano de fase (velocidad del estado frente a estado) puede observarse cómo existen dos puntos de equilibrio correspondientes a aquellas configuraciones donde se cumple $\frac{dx}{dt} = 0$. Como se aprecia en la Figura.-1.27, cualquier condición inicial situada a la derecha de los puntos de equilibrio tendrá asociada una velocidad negativa que hará que el sistema converja hacia el primer punto de equilibrio.

Figura.-1.27 Estudio de la inestabilidad

Si la condición inicial está situada entre los dos puntos de equilibrio, la velocidad asociada a esta configuración será positiva, con lo cual el sistema es repelido por el segundo punto de equilibrio y atraído por el primero. Finalmente Si la condición inicial se encuentra a la izquierda del segundo punto de equilibrio la velocidad asociada a esa condición inicial será negativa y el sistema será repelido por el punto de equilibrio. De esta forma, es fácil comprobar que el sistema presenta un punto de equilibrio estable y un punto de equilibrio inestable. La misma conclusión podría haberse obtenido de forma más rigurosa utilizando una técnica de linealización. Como se ve en la Figura.-1.27, si el sistema se linealiza alrededor del primer punto de equilibrio, se obtiene una recta de pendiente negativa, lo cual implica un comportamiento estable, sin embargo, si se linealiza alrededor del segundo punto de equilibrio, se obtiene un recta de pendiente positiva que está asociada a un comportamiento inestable.

Las no linealidades permiten modelar comportamientos complejos como los que se aprecian en la vida cotidiana. Así, a partir de un modelo lineal de segundo orden y considerando fenómenos no lineales sencillos como el efecto de saturación, ha sido posible explicar el mecanismos de diferenciación celular en organismos complejos a partir de células inicialmente homogéneas. Es el llamado fenómeno de la **morfogénesis** estudiado por Turing y Prigogine (Aracil y Gordillo, 1999).

Fenómenos más complejos pueden ser estudiados mediante modelos no lineales, así, en las últimas décadas se han realizado esfuerzos en el estudio de los **ciclos límites** (que representan oscilaciones automantenidoas, ver Figura.-1.28), y en la aparición de fenómenos caóticos.

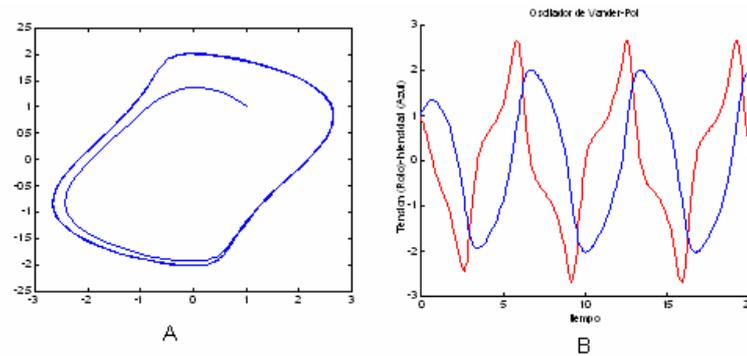


Figura.-1.28 Retrato de estados (A) y evolución temporal (B) de un oscilador de Vader-Pol

Los sistemas caóticos presentan como característica que en lugar de un punto de equilibrio atractor presentan una zona atractora llamada **atractor extraño**. La característica principal de estos sistemas es la hipersensibilidad a las condiciones iniciales. Lo que Lorenz expresó con el conocido término de **efecto mariposa**.

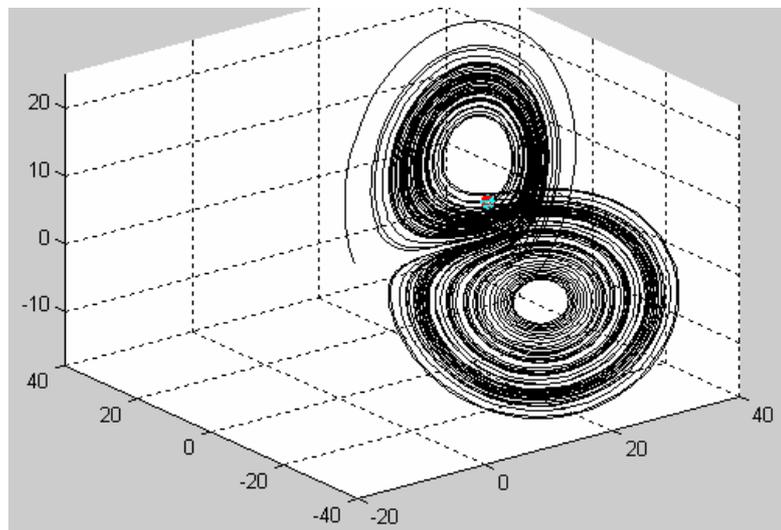


Figura.-1.29 Atractor extraño de Lorenz