BOLETÍN 2. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

1. Se cuelga una carga de 102kg de un alambre cuya longitud es de 2m y su área correspondiente a la sección transversal es de 0.1cm^2. El alambre se alarga 0.22cm sobre su longitud sin deformar. A partir de esta información se pide determinar: a) el esfuerzo normal aplicado sobre la sección transversal; b) la deformación normal resultado de la aplicación del esfuerzo; c) el módulo de Young del almabre.

2. Una placa cuadrada de acero tiene 1m de lado y un espesor de 1cm. La arista inferior está fija al suelo. Una fuerza $\boldsymbol{F_t}$ aplicada a lo largo de la cara superior produce un desplazamiento $\Delta x = 0.005$cm de la misma en la dirección de aplicación de la fuerza. Se pide determinar: a) la deformación cortante resultante; b) esfuerzo cortante que se está aplicando; c) la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F_t}$.

3. Una esfera sólida de plomo de volumen 0.5m^3 se deja caer en el océano hasta una profundidad en la que la presión debida al agua es de $2 \cdot 10^7$Pa. El plomo tiene un módulo volumétrico de $7.7 \cdot 10^9$N/m^2. Determinar el cambio de volumen que experimenta la esfera.

4. Encontrar una expresión para el módulo de Poisson, σ, en función de las constantes de Lamé, λ y μ. Para ello se deberán resolver las ecuaciones de la ley de Hooke correspondientes al caso en el que únicamente existe un esfuerzo normal, $\sigma_{xx} > 0$, siendo los restantes, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, al igual que todos los esfuerzos cortantes nulos.

5. Utilizando el resultado del problema anterior, encontrar la expresión del módulo de Young en función de las constantes de Lamé.

6. Deducir la expresión del módulo volumétrico, en función de las constantes de Lamé, resolviendo las ecuaciones normales de la ley de Hooke en el caso en que todos los esfuerzos normales son iguales a $-P$, donde P es la presión hidrostática, y todos los esfuerzos cortantes son nulos.

7. Se cuelga una bola de 50kg de un alambre de acero de 5m de longitud y 2mm de radio. Se pide determinar la longitud que se alargará el alambre.

8. Demostrar que la dilatación de un prisma recto sometido a tracción o compresión es nula si el coeficiente de Poisson es igual a 0.5.

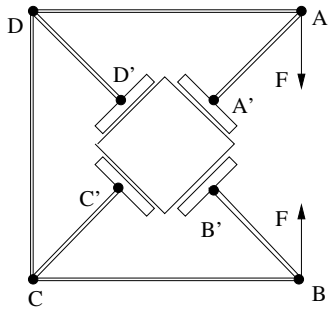
9. Una barra de sección rectangular de lados $a =$ 100mm y $b =$ 500mm y longitud 2m sometido a una tracción de 50 toneladas experimenta un alargamiento $\Delta l =$ 1mm y una contracción lateral $\Delta b = -0.007$mm. Se pide determinar: (a) módulo de Young en la dirección longitudinal de la barra; (b) coeficiente de Poisson; (c) variación del lado $a =$ 100mm de la sección recta.

10. Encontrar las ecuaciones que expresan las componentes normales del tensor deformación dadas por (ϵ_{xx}, ϵ_{yy}, ϵ_{zz}) en función de las componentes normales del tensor de tensiones (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}) y del módulo de Young y del coeficiente de Poisson. Se supone que todos los esfuerzos cortantes son nulos y únicamente son no nulos los esfuerzos normales. <u>*AYUDA*</u>: Utilizar el principio de superposición de la teoría lineal de los medios continuos, esto es, la deformación producida por la acción de dos o más esfuerzos normales es igual a la suma de las deformaciones producidas por cada esfuerzo normal.

11. Una placa rectangular de lados $a =$ 50cm y $b =$ 25cm de espesor constante se somete a un sistema exterior de fuerzas de modo que los esfuerzos normales a cada una de las caras vienen dados por $\sigma_{xx} =$ 7kp/mm^2, $\sigma_{yy} =$ 3kp/mm^2 y $\sigma_{zz} = 0$. Sabiendo que el módulo de Young vale $E = 2 \cdot 10^6$kp/cm^2 y que el coeficiente de Poisson es $\sigma = 0.3$, calcular: (a) la variación del área de la placa; (b) la deformación unitaria del espesor.

12. Un bloque cúbico de hormigón cuyo lado mide 15cm se comprime en dos direcciones perpendiculares mediante el mecanismo de barras articuladas indicado en la figura al aplicar una fuerza $F =$ 12Tm. En los extremos A', B', C' y D' de las barras se colocan unas placas perfectamente rígidas con objeto de que la compresión sobre las caras del hormigón sea uniforme. Se pide

determinar la variación de volumen experimentado por el bloque. Datos: $E = 2.8 \cdot 10^5 \text{kp/cm}^2$ y $\sigma = 0.1$.



13. El esfuerzo de rotura de un alambre de cobre es aproximadamente de $3 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$. Se pide determinar: a) la carga máxima que puede colgarse de un alambre de cobre de sección 0.42mm; b) el porcentaje de longitud original que se alargará el alambre de cobre si se cuelga la mitad de la carga máxima determinada en el apartado a).

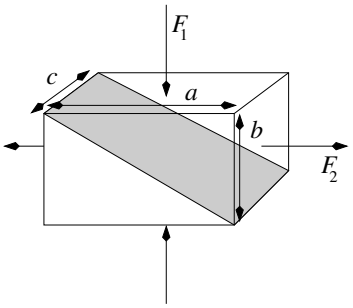
14. Una cinta de caucho de sección 3mmx1.5mm se dispone verticalmente y varias masas se cuelgan de ella. Un estudiante obtiene los siguientes datos de la longitud de la cinta en función de la carga:

carga (g)	0	100	200	300	400	500
longitud (m)	5.0	5.6	6.2	6.9	7.8	10.0

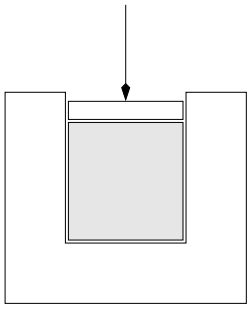
Se pide determinar: a) el módulo de Young de la cinta de caucho para cargas pequeñas; b) la energía almacenada en la cinta cuando la carga es de 150g (ver problema 8).

15. Se somete a una cuerpo de cobre de forma cúbica y de 1cm de arista a fuerzas de compresión en dos de sus caras de 10^4N. Sabiendo que el módulo de Poisson se puede calcular a partir del módulo cortante y del módulo de Young, determinar: a) disminución de la longitud de la arista paralela a la dirección de aplicación de la fuerzas; b) aumento de las longitudes de las aristas perpendiculares a la dirección de la fuerza; c) nuevo volumen del cuerpo.

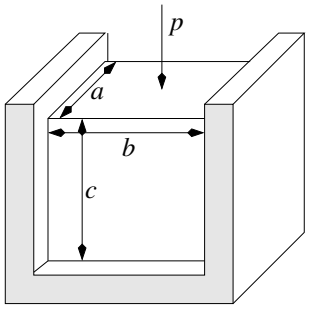
16. Sobre un prisma recto actúan las fuerzas F_1 (de compresión) y F_2 (de extensión) sobre dos caras perpendiculares entre sí y uniformemente repartidas sobre dichas caras. Sabiendo que el prisma tiene un módulo de Young E y un coeficiente de Poisson σ, determina: (a) el vector tracción que actúa sobre el plano oblicuo indicado en la figura; (b) la deformaciones que sufre el prisma; (c) el cambio de volumen que el bloque experimenta.



17. En el interior de un cilindro de acero **absolutamente** rígido, de radio interior $r = 0.10$m, se introduce un cilindro de caucho del mismo radio (coeficiente de Poisson $\sigma = 0.4$), según se indica en la figura. Mediante una fuerza de $F = 20000$N que actúa sobre un pistón de peso y rozamiento despreciable colocado sobre el caucho, se comprime éste. Calcula la presión existente entre la goma y el acero.



18. Un paralelepípedo de un material elástico, con módulo de Young E y módulo de Poisson σ y de dimensiones a, b y c, se introduce en una cavidad de anchura b de paredes completamente rígidas, planas y perfectamente lisas, como se indica en la figura. Se aplica sobre la cara superior, perpendicularmente a ella, una fuerza constante p por unidad de superficie. Se pide: (a) esfuerzos a los que está sometido; (b) deformaciones sufridas por el paralelepípedo; (c) variación de la longitud de cada uno de sus lados; (d) demuestra (y calcula) que el cambio de volumen que sufre el paralelepípedo es siempre negativo.



19. Supón un medio isótropo **inhomogéneo** líquido ($\mu = 0$). Encuentra, siguiendo el procedimiento

seguido en clase, la ecuación generalizada de Newton que debe cumplir el vector desplazamiento $\mathbf{u}$. NOTA: En un medio inhomogéneo, λ, μ y ρ son, en general, funciones dependientes de la posición (es decir, no son constantes).

20. La ley de Hooke más general se puede escribir mediante la relación tensorial $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$, con σ_{ij} las componentes del tensor esfuerzo, ϵ_{kl} las componentes del tensor deformación, y c_{ijkl} las componentes del tensor de constantes elásticas, también denominado tensor de Cauchy de cuatro orden. Si el medio es isótropo, la forma más general de un tensor de cuatro orden en un espacio tridimensional depende sólo de tres constantes y se puede escribir de la forma: $c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Utilizando el hecho de que los tensores esfuerzo y deformación son simétricos demuestra que: (a) $c_{ijkl} = c_{jikl}$ y $c_{ijkl} = c_{ijlk}$; (b) $\nu = 0$. NOTA: Para realizar el apartado (b) es conveniente utilizar el resultado del apartado (a).

21. Supón un medio elástico isótropo, de modo que el tensor de Cauchy se puede escribir de la forma: $c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Bajo estas condiciones, demuestra que el tensor esfuerzo ($\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$) se puede expresar en función de las dos constantes de Lamé, λ y μ en la forma: $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}$, donde σ_{ij} son las componentes del tensor esfuerzo y ϵ_{ij} las componentes del tensor deformación.