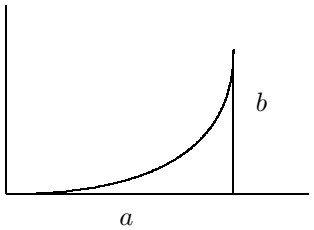
BOLETÍN 2. GEOMETRÍA DE MASAS Y ESTÁTICA

1. a) Obtener el centro de masas de un triángulo rectángulo homogéneo de vértices $O(0,0)$, $A(a,0)$ y $B(0,b)$ por integración directa; b) aplicando el resultado anterior, obtener el centro de masas de un triángulo isósceles de altura h; c) aplicar el resultado anterior a un triángulo equilátero de lado a.

   Solución: a) $C(a/3, b/3)$; b) C sobre la altura a una distancia $h/3$ de la base; c) C sobre la altura a una distancia $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ de la base.

2. El lado OB de la pieza plana de la figura tiene forma parabólica de ecuación $y = kx^2$ (siendo $k =$ cte.). Obtener por integración el centro de masas de la pieza.



   Solución: $x_C = 3a/4, y_C = 3b/10$.

3. a) Obtener el centro de masas de una chapa plana homogénea con forma de cuadrante de una circunferencia de radio R mediante integración directa y aplicando el 2° teorema de Guldin; b) si O es el centro de la chapa y A es uno de sus extremos, obtener el ángulo en la situación de equilibrio entre el radio OA y la vertical cuando colgamos la chapa verticalmente por el punto A.

   Solución: a) $x_C = y_C = \frac{4R}{3\pi}$; b) $\alpha = 36{,}4°$.

4. Un hilo de masa despreciable se une a un alambre homogéneo de forma semicircular y radio R por uno de sus extremos. Si el hilo se cuelga verticalmente, obtener el ángulo formado por el diámetro del alambre y la horizontal en la posición de equilibrio. Obtener previamente el centro de masas del alambre por integración directa y aplicando el 1er teorema de Guldin.

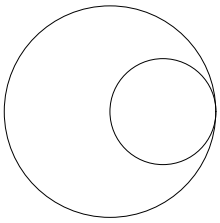
   Solución: $\alpha = 57{,}52°$.

5. Sobre una chapa circular plana de radio R se practica un agujero circular de diámetro R, según se indica en la figura. Obtener el centro de masas de la chapa.

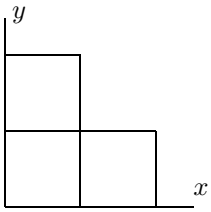
   Solución: $x_C = -\frac{R}{6}, y_C = 0$.

6. Calcular el centro de masas de la pieza cuadrada homogénea de lado $2a$ de la figura a la que le falta el cuadrante superior derecho.

   Solución: $x_C = y_C = \frac{5a}{6}$.



Problema 5



Problema 6

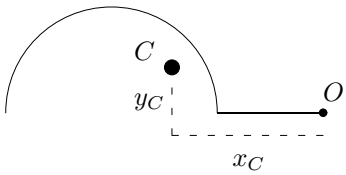
7. Obtener el centro de masas de un cono macizo de radio R y altura H.

   Solución: Sobre el eje del cono, a una distancia $H/4$ de la base.

8. Obtener el centro de masas de una semiesfera maciza de radio R.

   Solución: Sobre el eje de simetría, a una distancia $3R/8$ de la base.

9. El sistema de la figura está compuesto por un alambre semicircular de radio R y un segmento de longitud R unido a uno de sus extremos, siendo el conjunto un sistema homogéneo.
   a) Determinar la posición del centro de masas del sistema. b) Si el sistema se suspende verticalmente por el extremo O, calcular el ángulo que forma el segmento con la vertical en la posición de equilibrio. (**Examen junio, 2000**).

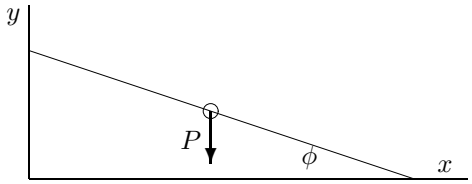


Solución

$$(a)\ \ x_C = \frac{R}{2}\left(\frac{1+4\pi}{1+\pi}\right),\ \ y_C = \frac{2R}{1+\pi}$$

(b) $\phi = 16{,}43°$.

10. Una partícula de peso P puede deslizar con rozamiento por un alambre de longitud $2l$ que forma un ángulo $\phi = 45°$ con la horizontal. Sobre la partícula actúa una fuerza proporcional a su distancia al eje OY, $\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i}$, donde $k = P/l$. a) Determinar para qué valores del coeficiente de rozamiento estático la partícula permanece en equilibrio en el punto medio del alambre; b) calcular las fuerzas de ligadura en la posición de equilibrio.



Solución: a) $\mu_e > 0{,}172$; b) $N_\perp = \frac{P}{2}(\sqrt{2}+1)$ $N_\parallel = \frac{P}{2}(\sqrt{2}-1)$

11. Considerar el problema anterior, pero suponer que ahora el rozamiento entre la masa y el alambre es despreciable. Obtener la posición de equilibrio de la partícula, así como la fuerza de ligadura en dicha posición.

Solución: $x_{eq} = l$, $y_{eq} = l(\sqrt{2}-1)$, $N = P\sqrt{2}$.

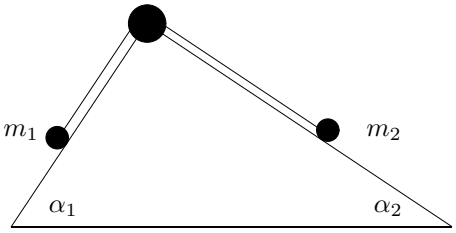
12. Un punto material de peso P puede deslizar sin rozamiento por un alambre rectilíneo de masa despreciable cuyo extremo superior se fija a la pared a una altura b del suelo y el extremo inferior se fija al suelo a una distancia a de la pared. Sobre la partícula actúa una fuerza atractiva $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ dirigida hacia el origen (punto de intersección suelo-pared) siendo $\mathbf{r}$ el vector de posición de la partícula respecto al origen y k una constante. Obtener la posición de equilibrio del punto material y la fuerza de ligadura en dicha posición. Particularizar para el caso $a = b$ y $k = 2P/a$.

Solución: a) $x_{eq} = 3a/4, y_{eq} = a/4$, $N = \frac{3\sqrt{2}}{2}P$.

13. Una partícula de peso P puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una circunferencia vertical de radio R. a) Obtener la posición de equilibrio y la fuerza de ligadura $\mathbf{N}$ en el equilibrio si sobre la partícula actúa una fuerza atractiva hacia el centro de la circunferencia proporcional a la distancia al centro $F = kr$. b) Obtener lo anterior en el caso de que la fuerza atractiva esté ejercida por el eje OY y sea proporcional a la distancia de la partícula a dicho eje.

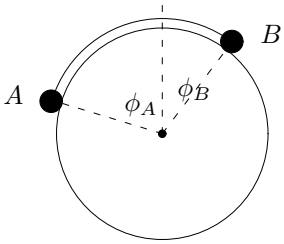
Solución: a) dos soluciones: i) punto más alto de la circunferencia, con $N_x = 0$, $N_y = P + kR$, ii) punto más bajo de la circunferencia, con $N_x = 0$, $N_y = P - kR$; b) dos soluciones: i) (x_{eq}, y_{eq}), ii) $(-x_{eq}, y_{eq})$, con $y_{eq} = P/k$ y $x_{eq} = R\sqrt{1-y_{eq}^2}$; en ambos casos $N = kR$.

14. Dos masas m_1 y m_2 descansan sobre los planos inclinados de la figura, siendo $\alpha_1 = 53{,}13°$ y $\alpha_2 = 36{,}87°$. Las masas están unidas por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea (de masa despreciable). Sabiendo que $m_1 = 100$ kg, obtener entre qué valores puede encontrarse m_2 para que el sistema se encuentre en equilibrio, siendo el coeficiente de rozamiento estático masas-plano inclinado $\mu = 0{,}3$.



Solución: 73,8kg $\leq$ m$_2$ $\leq$ 272,2kg.

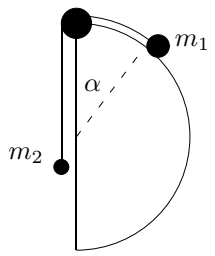
15. Sobre una circuferencia de radio R se encuentran dos masas puntuales A y B unidas por un hilo inextensible de masa despreciable, siendo los pesos respectivos de las masas $P_A = 3P_B$. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático es μ y que la longitud del hilo es $\pi R/2$, determinar los ángulos ϕ_A y ϕ_B que los radios OA y OB forman con la vertical cuando el sistema se encuentra en equilibrio. Particularizar el resultado para $\mu = 0{,}2$.



Solución: $7{,}12° \leq \phi_A \leq 29{,}74°$, $60{,}26° \leq \phi_B \leq 82{,}88°$.

16. Dos masas puntuales m_1 y m_2 están unidas mediante un hilo inextensible de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. La masa m_1 puede deslizar sin rozamiento sobre una semiesfera de radio R y m_2 cuelga por la vertical. a) Obtener el ángulo α en la posición de equilibrio en función de m_2/m_1; b) determinar

la fuerza de reacción sobre m_1 en el caso en que $m_1 = 2m_2$.

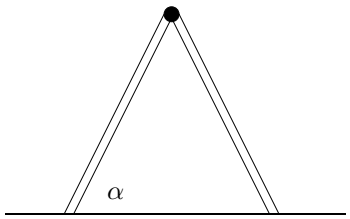


Solución: a) sen $\alpha = \mathrm{m_2/m_1}$; b) $N = m_1 g \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Una escalera de 2 m de longitud y peso P se apoya sobre una pared lisa perpendicular al suelo formando un ángulo α con el suelo, que supondremos rugoso y con un coeficiente de rozamiento estático $\mu = 0{,}2$. a) Obtener a partir de qué ángulo una persona de peso $P' = 5P$ puede subir toda la escalera sin que ésta deslice; b) obtener la máxima distancia que dicha persona puede subir en el caso en que $\alpha = 60°$.

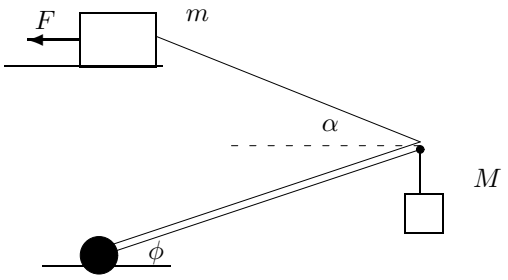
    Solución: a) $\alpha \geq 77{,}69°$; b) $d_{max} = 0{,}631$m.

18. Dos barras de igual peso y de la misma longitud están articuladas entre sí por uno de sus extremos y se apoyan por sus extremos libres sobre una superficie plana con coeficiente de rozamiento estático μ. Se observa que el sistema permanece en equilibrio siempre que el ángulo que forme cada barra con la superficie sea $\alpha \geq 64°$. Obtener el valor de μ.



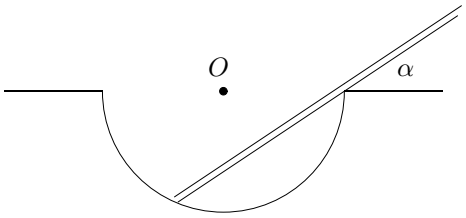
Solución: $\mu = 0{,}244$

19. Un sistema compuesto consiste en una barra de longitud l y masa $m_b = 60$ kg articulada por uno de sus extremos y que forma un ángulo $\phi = 37°$ con la horizontal. Sobre su extremo libre cuelga una masa $M = 400$ kg mediante un hilo de masa despreciable. Dicho extremo está sujeto mediante un cable de masa despreciable que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con la horizontal y que se encuentra unido por el otro extremo a una masa $m = 50$ kg que descansa sobre un plano horizontal con coeficiente de rozamiento estático $\mu = 0{,}2$. a) Obtener la tensión del cable en la situación de equilibrio; b) calcular el valor de la fuerza F (horizontal y dirigida hacia la izquierda) que es necesario aplicar a la masa m para que el sistema permanezca en equilibrio.



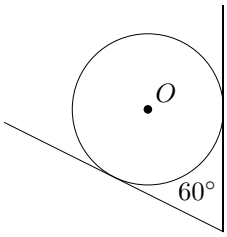
Solución: a) $T = 3656{,}1$ N; b) $2702{,}7 \leq F \leq 3629{,}9$ N.

20. Una varilla homogénea de longitud $2l$ y peso P descansa en el interior de una semiesfera lisa de radio R. a) Obtener el ángulo que la varilla forma con la horizontal en la posición de equilibrio; b) a partir del resultado anterior, estudiar qué relación debe existir entre l y R para que el sistema se pueda encontrar en equilibrio.



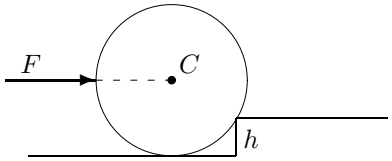
Solución: a) $\cos\alpha = \frac{\mathrm{l}+\sqrt{\mathrm{l}^2+32\mathrm{R}^2}}{8\mathrm{R}}$; b) $l \leq 2R$.

21. Una esfera de radio 1 m se apoya entre dos planos lisos, uno horizontal y otro vertical. Si elevamos el plano horizontal hasta formar un ángulo de 60° con el plano vertical, obtener cuánto se eleva el centro de la esfera (supuesta en equilibrio) con respecto a su altura inicial.



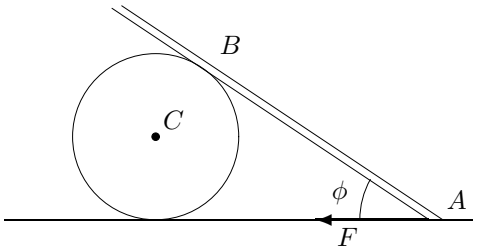
Solución: $\Delta h = 0{,}732$ m.

22. Obtener la mínima fuerza horizontal F que hay que aplicar al centro de masas de una esfera homogénea de 100 kg de masa y 50 cm de radio para hacerla subir por un escalón liso (sin rozamiento) de altura $h = 10$ cm.



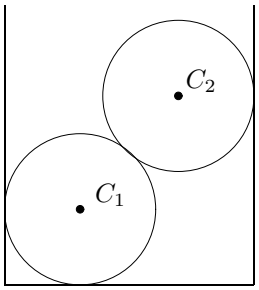
Solución: $F \geq 75$ kp.

23. La varilla de la figura, de longitud $2l$ y peso P, se apoya en la horizontal (A) y sobre una esfera (B) fija al suelo y de radio R. El rozamiento en ambos apoyos es despreciable. Para mantener la varilla en equilibrio formando un cierto ángulo ϕ con la horizontal, se ejerce una fuerza horizontal F en el extremo A. a) Empleando argumentos geométricos, obtener el valor la distancia AB en función del ángulo ϕ; b) determinar el valor de F en función de ϕ para mantener la varilla en equilibrio; c) comprobar que el valor de F es máximo para un ángulo $\phi = 60°$. Determinar en este caso el valor de F y el de las fuerzas de contacto sobre la varilla suponiendo que $l = 5R$.



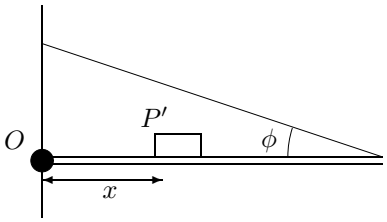
Solución: a) $\overline{AB} = R(1 + \cos\phi)/\text{sen}\ \phi$; b) $F = \frac{Pl}{R}\cos\phi\ (1 - \cos\phi)$; c) $F = 5P/4, N_A = 0{,}278P$, $N_B = 1{,}443P$.

24. Se introducen 2 esferas de radio R y peso P en el interior de un cilindro de diámetro $3R$. Si N_1 y N_2 son las fuerzas de contacto pared-esferas, N_s la fuerza de contacto base-esfera 1 y F la fuerza de contacto esfera-esfera, determinar el valor de dichas fuerzas en la posición de equilibrio.



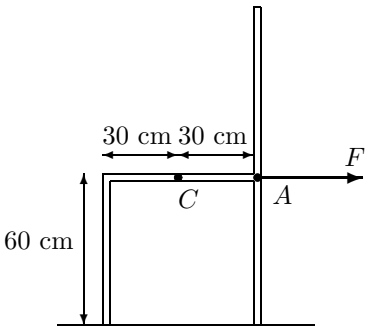
Solución: $N_1 = N_2 = P/\sqrt{3}$, $N_s = 2P$, $F = 2P/\sqrt{3}$.

25. La barra horizontal de la figura, de peso P y longitud $2l$, está articulada en el extremo O. El otro extremo está sujeto por un cable inextensible que forma un ángulo $\phi = 30°$ con la horizontal y que se fija a la vertical. a) Si el cable puede soportar una tensión máxima $T_M = 5P/4$, obtener la máxima distancia x (medida desde O) que puede recorrer un cuerpo de peso $P' = P/5$ a lo largo de la barra sin que se rompa el cable; b) obtener el mínimo valor T_m que debería soportar el cable para que el cuerpo pueda recorrer toda la barra sin que se rompa el cable; c) en el caso anterior, determinar el valor de la reacción en la articulación cuando el cuerpo se encuentra en el punto medio de la barra.



Solución: a) $x = 5l/4$; b) $T_m = 7P/5$; c) $\mathbf{R} = R_h\mathbf{i} + R_v\mathbf{j}$ con $R_h = 7P\sqrt{3}/10$, $R_v = P/2$.

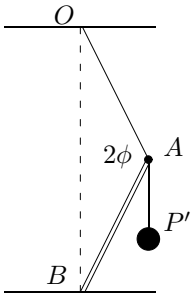
26. Una silla de 2.5 kg de masa se encuentra sobre la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento entre las patas y el suelo $\mu = 0{,}30$. Se supondrá que el centro de masas de la silla se encuentra en el punto C de la figura; a) obtener la mínima fuerza horizontal, F, necesaria para arrastrar la silla hacia la derecha; b) determinar las fuerzas de reacción verticales sobre las patas delanteras y las traseras si dicha fuerza se aplica en el punto A; c) determinar la altura máxima a la que puede aplicarse la fuerza F sin que se produzca el vuelco de la silla. (**Examen septiembre, 1999**).



Solución: a) 7.35 N; b) $N_t = 9{,}8$ N, $N_d = 2{,}45$ N; c) $h = 1$ m.

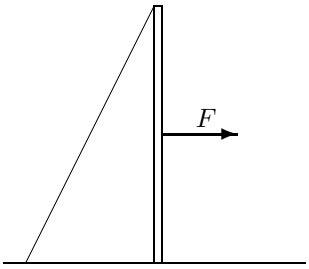
27. Una barra AB de peso P se mantiene en equilibrio en la posición indicada en la figura mediante

un hilo inextensible OA de masa despreciable. El hilo y la barra son de igual longitud y forman un ángulo 2ϕ entre sí. Del extremo A pende una carga de peso P'. (a) Determinar para qué valores del coeficiente de rozamiento barra-suelo el sistema se encuentra en equilibrio. Obtener la expresión general y particularizar para $P = 5P'$, $\phi = 60°$. (b) Obtener el valor de la fuerza de ligadura en B si $\mu = 0{,}30$. (c) Si fuese $\mu = 0{,}20$, determinar el valor de la carga P' que habría que colgar del extremo A para que el sistema permanezca en equilibrio en la posición indicada.



Solución: a) $\mu \geq 0{,}238$; b) $N = 4{,}25P'$, $f_c = 1{,}01P'$; c) $P' \leq 0{,}03P$.

28. Un poste de longitud l y peso P reposa sobre una superficie rugosa de coeficiente de rozamiento μ. El extremo superior está sujeto por un cable atado al suelo y que forma un ángulo ϕ con la vertical. Se aplica una fuerza horizontal F y el cable se pone tenso. (a) Si la fuerza se aplica en el punto medio del poste, determinar para qué valores de F el poste permanece en equilibrio en la posición vertical. b) Comprobar que si F se aplica en puntos cercanos al extremo superior, el poste permanece en equilibrio para cualquier valor de la intensidad de la fuerza F. Determinar a partir de qué altura h debe aplicarse la fuerza F para que esto suceda.



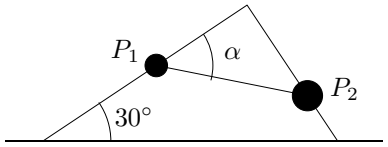
Solución:

$$a)\quad F \leq \frac{2\mu P}{1-\mu\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}} \qquad b)\quad \frac{h}{l} \geq \frac{F-\mu P}{F\left(1+\mu\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\right)}$$

29. Un sistema formado por dos barras del mismo material, de la misma longitud, y que forman un ángulo recto entre sí, se cuelga verticalmente por uno de sus extremos. Determinar el ángulo ϕ que forma la barra fija con la vertical en la posición de equilibrio.

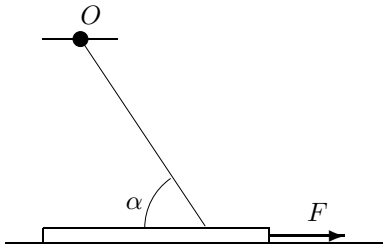
Solución: $\phi = 18{,}44°$.

30. Dos partículas, de pesos P_1 y P_2 están insertadas en un alambre vertical con forma de triángulo rectángulo, según se muestra en la figura. Las masas se encuentran unidas por un hilo. Determinar el ángulo α en la posición de equilibrio y la tensión de la cuerda en dicha posición.



Solución: $\operatorname{tg}\alpha = (\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1)\sqrt{3}$, $T = P_1/(2\cos\alpha)$.

31. Una hoja delgada de papel se mantiene oprimida hacia una mesa horizontal mediante una barra homogénea de peso P, cuyo extremo superior se encuentra articulado en O. El ángulo entre la barra y la hoja es α y el coeficiente de rozamiento entre ambos es μ. Considerando que el rozamiento entre la hoja de papel y la mesa es despreciable, determinar la fuerza horizontal mínima que hay que aplicar a la hoja para sacarla, manteniendo a la barra en su posición de equilibrio.

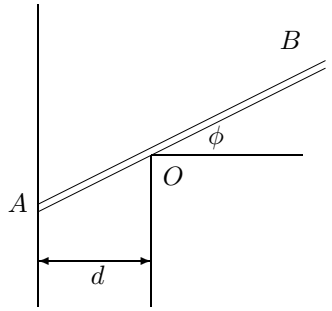


Solución:

$$F = \frac{\mu P\cos\alpha}{2(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha)}$$

32. Una barra AB, de longitud L y peso P descansa en una esquina lisa (punto O) y su extremo A se apoya en una pared vertical, siendo $d = L/8$ la distancia entre la pared y la esquina. La barra forma un ángulo $\phi = 60°$ con la horizontal. El coeficiente de rozamiento barra-pared es $\mu = 0{,}4$. Determinar: (a) si la barra se ecuentra en equilibrio; (b) intervalo de posibles valores del

coeficiente de rozamiento μ para que la barra se encuentre en equilibrio en la posición indicada; (c) determina, de forma aproximada, el intervalo de valores de ϕ para el que la barra se encuentra en equilibrio; (d) comprueba que en ausencia de rozamiento barra-pared, existe una única posición de equilibrio. Calcula ϕ en dicha posición, y el valor de las fuerzas de reacción sobre la barra en la posición de equilibrio.

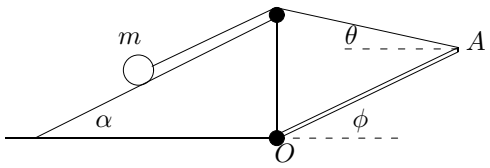


Solución: a) No, porque no se verifica $f_c < \mu N$, donde f_c y N son las componentes tangencial y normal, respectivamente, de la fuerza de contacto en el punto A;

$$b) \qquad \mu > \frac{|1 - 4\,\cos^3\phi|}{4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi}$$

c) $42{,}7° < \phi < 57{,}6°$.

33. La barra OA, de masa $M = 100$ kg y longitud $L = 5$ m, está articulada en O y se mantiene en equilibrio mediante un cable inextensible unido en uno de sus extremos al punto A de la barra y en el otro extremo a una masa m, según se muestra en la figura. Los valores de los ángulos de la figura son $\alpha = 30°$, $\phi = 45°$ y $\theta = 20°$. Determinar: a) el valor de la tensión del cable y de la reacción en O; b) el intervalo de valores de m para el que es posible el equilibrio si el coeficiente de rozamiento masa-plano es $\mu = 0{,}4$.



Solución: a) $T = 382{,}3$ N, $R_v = 849{,}2$ N, $R_h = 359{,}2$ N (componentes vertical y horizontal de la reacción en O); b) $46{,}1 < m < 254$ (en kg).