BOLETÍN 3. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

1. Se dice que una partícula realiza un movimiento armónico simple en una dirección cuando la aceleración viene dada por $a = -\omega^2 x$, donde ω es una constante positiva (frecuencia angular) y x es la posición de la partícula respecto a la posición de equilibrio. Si en el instante inicial, el cuerpo se encuentra en $x = A$ y su velocidad es $v_0 = 0$, determinar: a) la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante. b) Comprobar que el movimiento es periódico y determinar el periodo del movimiento.

   Solución: a) $x(t) = A \cos \omega t$, $v(t) = -A\omega \operatorname{sen} \omega t$; b) $T = 2\pi/\omega$.

2. Se lanza un proyectil horizontalmente en un fluido viscoso con una velocidad $\mathbf{v} = v_0\,\mathbf{i}$. El medio le comunica una aceleración $\mathbf{a} = -k\,v\,\mathbf{i}$, donde k es una constante que depende de las propiedades del medio y de la forma del proyectil. Determinar: a) la distancia recorrida por el proyectil hasta que se detiene; b) el tiempo necesario para que el proyectil alcance la mitad de su velocidad inicial.

   Solución: a) $s = v_0/k$; b) $\tau = \ln 2/k$.

3. Un cuerpo se encuentra sometido a la aceleración $a = g - kv$, donde g es la aceleración de la gravedad y k es una constante. Sabiendo que en $t = 0$, su posición es x_0 y su velocidad es v_0, determinar: a) máxima velocidad que alcanza (velocidad límite); b) la posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante.

   Solución: a) $v_l = g/k$; b) $v(t) = v_l - (v_l - v_0)\mathrm{e}^{-kt}$, $x(t) = x_0 + v_l t + (\frac{v_0 - v_l}{k})(1 - \mathrm{e}^{-kt})$.

4. Las componentes cartesianas de la velocidad de una partícula que describe una trayectoria plana son $v_x = 4t^3 - 4t$, $v_y = 4t$, (en cm/s). Sabiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}$ (en cm), obtener: a) vector de posición de la partícula en cualquier instante; b) ecuación (implícita) de la trayectoria; c) módulo del vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ de la partícula entre los instantes $t = 0$ s y $t = 2$ s; d) módulo de la aceleración, componentes de la aceleración y radio de curvatura en el instante $t = 2$ s.

   Solución: a) $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)^2\,\mathbf{i} + 2t^2\,\mathbf{j}$; b) $x = (\frac{y}{2} - 1)^2$; c) $|\Delta\mathbf{r}| = 11{,}31$ cm; d) $a = 44{,}18$ cm/s^2, $a_t = 43{,}01$ cm/s^2, $a_n = 10{,}11$ cm/s^2, $\rho = 63{,}30$ cm.

5. El vector de posición de una partícula es:
   $\mathbf{r} = 4 \cos \omega t\,\mathbf{i} + 4(1 + \operatorname{sen} \omega t)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$,
   (con r en cm) donde ω es una constante. Determinar: a) módulo de la velocidad y de la aceleración de la partícula en cualquier instante; b) las componentes intrínsecas del vector aceleración; c) el radio de curvatura de la trayectoria; d) vectores unitarios tangente y normal; e) el tipo de trayectoria y movimiento que describe la partícula.

   Solución: a) $v = 4\omega$, $a = 4\omega^2$; b) $a_t = 0$, $a_n = 4\omega^2$; c) $\rho = 4$ cm; d) $\mathbf{e}_t = -\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \cos \omega t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_n = -\cos \omega t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$; e) trayectoria circular de radio $R = \rho = 4$ cm descrita en el plano $z = 2$; movimiento uniforme.

6. Una partícula puntual recorre la trayectoria de ecuación $x = R \cos\theta$, $y = R \operatorname{sen}\theta$, $z = R\theta\sqrt{3}$ (ecuación de una hélice en coordenadas cartesianas), de forma que en $t = 0$, se encuentra en la posición $x_0 = 0$, $y_0 = R$, $z_0 = \pi R\sqrt{3}/2$. Sabiendo que el módulo de la velocidad v de la partícula es constante, obtener: a) la función $\theta = \theta(t)$, b) componentes intrínsecas de la aceleración y radio de curvatura en el instante $t = 2$ s.

   Solución: a) $\theta(t) = \frac{vt}{2R} + \frac{\pi}{2}$; b) $a_t = 0$, $a_n = \frac{v^2}{4R}$, $\rho = 4R$.

7. Un móvil asciende con módulo) de la velocidad v constante por la hélice de ecuaciones $\rho = R$, $z = h\theta/(2\pi)$ (ecuación de una hélice en coordenadas cilíndricas), donde h es una constante, de forma que inicialmente se encuentra en $\rho = R$, $z = 0$. Obtener: a) la función $\theta = \theta(t)$, b) componentes intrínsecas de la aceleración y radio de curvatura.

   Solución: a) $\theta(t) = 2\pi vt/(4\pi^2 R^2 + h^2)^{1/2}$; b) $a_t = 0$, $a_n = 4\pi^2 v^2 R/(4\pi^2 R^2 + h^2)$, $\rho = (4\pi^2 R^2 + h^2)/(4\pi^2 R)$.

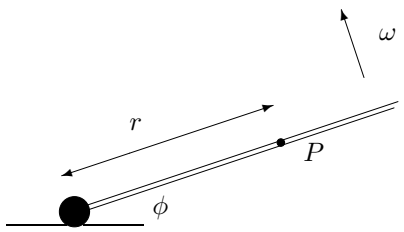
8. Una partícula describe una trayectoria plana cuya ecuación, en coordenadas polares, es $r = 2\phi$ (con r en cm). Sabiendo que $\phi = t^2$ (con ϕ medido en radianes y t en segundos), determinar el módulo de los vectores y aceleración de la partícula cuando $\phi = 60°$.

   Solución: $v = 5{,}92$ cm/s, $a = 21{,}46$ cm/s^2.

9. Las ecuaciones de movimiento de una partícula en coordenadas polares vienen dadas por $r = 2t^2$, $\phi = 0{,}4$ sen $(\pi t/3)$, con r en cm, ϕ en radianes, y t en segundos. Determinar los vectores velocidad y aceleración de la partícula en $t = 2$ s.

   Solución: $\mathbf{v} = 8\,\mathbf{u}_r - 1{,}67\,\mathbf{u}_\phi$, ($v = 8{,}17$ cm/s), $\mathbf{a} = 3{,}65\,\mathbf{u}_r - 6{,}38\,\mathbf{u}_\phi$, ($a = 7{,}35$ cm/s^2).

10. En el instante en que se representa la figura, el brazo ranurado gira con $\omega = 80$ rpm, disminuyendo ω a razón constante de 280 rpm por segundo (aceleración angular, $\alpha = -280$ rpm). En dicho instante, la distancia radial del cursor P es $r = 10$ cm, disminuyendo r a razón constante de 12 cm/s, (velocidad radial, $dr/dt = -12$ cm/s). Determinar en dicho instante los vectores velocidad y aceleración de P.



   Solución: $\mathbf{v} = -12\,\mathbf{u}_r + 83{,}8\,\mathbf{u}_\phi$ ($v = 84{,}6$ cm/s), $\mathbf{a} = -702{,}2\,\mathbf{u}_r - 494{,}3\,\mathbf{u}_\phi$ ($a = 858{,}2$ cm/s^2).

11. Se arroja una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s desde el brocal de un pozo. Si 5 s después se escucha el sonido del golpe con el agua, determinar la profundidad del pozo sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

   Solución: $h = 44{,}2$ m

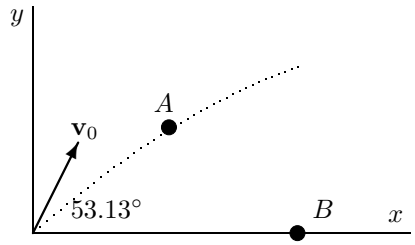
12. En una carrera de atletismo se corre la prueba de 100 metros lisos. El ganador realiza un tiempo de 10 s, pero justamente al cruzar la línea de meta es alcanzado por el proyectil disparado al dar la salida a los corredores. Obtener el ángulo y la velocidad con la que se efectuó el disparo, supuesto que el proyectil realiza un movimiento parabólico.

   solución: $\alpha = 78{,}47°$, $v = 50{,}03$ m/s.

13. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial $v_0 = 50$ m/s y con un ángulo de inclinación $\alpha = 30°$. Durante el movimiento, sopla un viento horizontal en contra que produce una aceleración a_x proporcional a la componente horizontal v_x de la velocidad v_x, siendo $k = 0{,}1$ s^{-1} la constante de proporcionalidad. a) Calcular el alcance del proyectil y comparar el resultado con el que se obtendría en ausencia de viento. b) Repetir el problema en el caso en el que el viento sople a favor con la misma intensidad.

   Solución: a) En ausencia de viento, $d_0 = 220{,}92$ m; con viento en contra, $d = d_0 - 47{,}88$ m; con viento a favor, $d = d_0 + 67{,}30$ m.

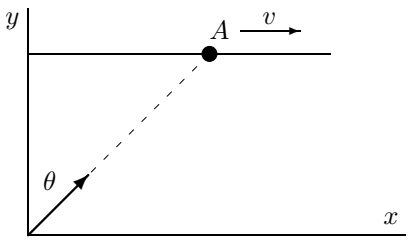
14. Dos puntos A y B se encuentran en el instante inicial en el origen de coordenadas de un sistema de referencia. El punto A describe un movimiento parabólico del que sabemos que el vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ forma un ángulo de 53,13° con la horizontal y su módulo es de 108 km/h. El punto B recorre la horizontal con velocidad uniforme de 20 m/s. Si M es el punto medio del segmento AB, obtener: a) vector de posición y ecuación de la trayectoria del punto M; b) módulo de los vectores velocidad y aceleración y componentes intrínsecas de la aceleración del punto M cuando A se encuentra en la parte más alta de su trayectoria.
   Nota. Debe observarse que en cualquier instante, la relación entre los vectores de posición es $\mathbf{r}_M = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)/2$.



   Solución: a) $\mathbf{r} = 19t\,\mathbf{i} + (12t - 2{,}45t^2)\,\mathbf{j}$; $y = 0{,}632x - 0{,}0068x^2$; b) $v = 19$ m/s, $a = 4{,}9$ m/s^2, $a_t = 0$ m/s^2, $a_n = 4{,}9$ m/s^2.

15. Se apunta con un dispositivo seguidor de aviones a un blanco puntual que vuela horizontalmente con velocidad v constante a una altura h. a) Calcular la variación temporal del ángulo (es decir, la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$) y la variación temporal de la velocidad angular (es decir, la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$) del dispositivo seguidor en función del ángulo θ que éste forma con la vertical. b) Determinar la posición angular, velocidad angular, y aceleración angular del

dispositivo en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$, $\theta = 0$.

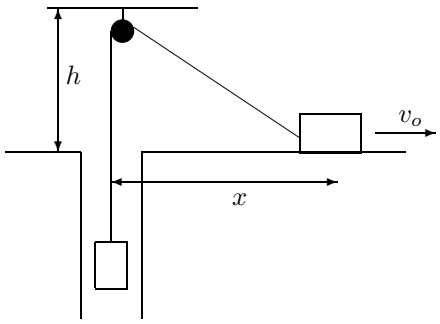


Solución: a) $\omega = (v/h)\cos^2\theta$,
$\alpha = (v^2/h^2)\,\mathrm{sen}\,2\theta\,\cos^2\theta$; b) $\mathrm{tg}\,\theta = (vt/h)$,
$\omega = vh/(h^2 + v^2t^2)$, $\alpha = -2v^3ht/(h^2 + v^2t^2)^2$.

16. Un proyectil lanzado desde un punto O sigue una trayectoria en un plano vertical. Un dispositivo seguidor situado en O registra la distancia r (en km) y el ángulo θ (en grados) en función del tiempo t (en s), encontrándose que $r = 2t - t^2/40$, $\theta^2 = 1600 - t^2$. Obtener los vectores velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$ del proyectil (expresados en términos de sus componentes polares) en el instante $t = 30$ s.

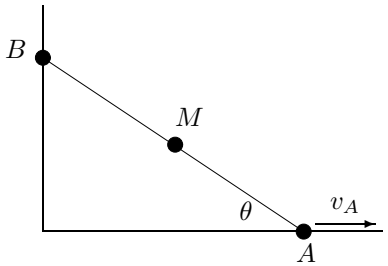
Solución: $\mathbf{v} = 0{,}5\,\mathbf{u}_r - 42{,}4\,\mathbf{u}_\theta$ ($v = 42{,}4$ km/s), $\mathbf{a} = -47{,}9\,\mathbf{u}_r - 4{,}4\,\mathbf{u}_\theta$ ($a = 48{,}1$ km/s^2).

17. Una mula lleva atada una cuerda de longitud l que pasa por una polea y que se encuentra unida en el otro extremo a un cubo con el que se pretende extraer agua de un pozo vertical. Sabiendo que la mula se desplaza en la horizontal con velocidad constante v_0 y que la polea se encuentra a una altura h sobre la boca del pozo, obtener la velocidad y la aceleración del cubo en función de la distancia x recorrida por la mula desde la boca del pozo. Calcular el tiempo que tarda en llegar el cubo a la superficie del pozo, sabiendo que la mula parte de $x = 0$.



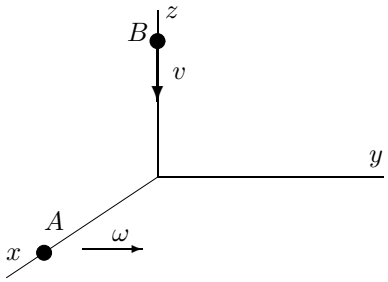
Solución: $v = -v_0x/(x^2 + h^2)^{1/2}$,
$a = -v_0^2h^2/(x^2 + h^2)^{3/2}$, $t = \frac{1}{v_0}(l^2 - 2lh)^{1/2}$.

18. Una escalera de 2 m de longitud se encuentra apoyada en una pared y en el suelo, de forma que el extremo en contacto con el suelo desliza con una velocidad constante $v_A = 2$ m/s. Si el movimiento se inició cuando la escalera se encontraba en posición vertical, obtener: a) velocidad del extremo superior de la escalera en función del ángulo θ que forma la escalera con la horizontal; b) ecuación de la trayectoria descrita por el punto medio de la escalera. (Recuérdese que las posiciones del punto medio y de los extremos están relacionados por $\mathbf{r}_M = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)/2$).



Solución: a) $v = -2\,\mathrm{cotg}\,\theta$; b) $x^2+y^2 = 1$, donde x e y son las coordenadas cartesianas del punto M.

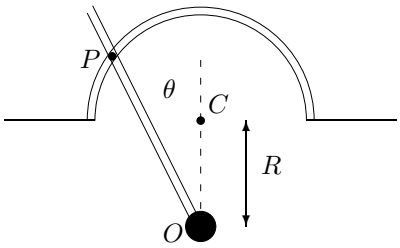
19. A y B son dos móviles puntuales cuyas posiciones en $t = 0$ son $\mathbf{r}_A = (R, 0, 0)$ y $\mathbf{r}_B = (0, 0, R)$. A recorre una circunferencia con velocidad angular ω constante en el plano XY en sentido antihorario, y B desciende por el eje Z con velocidad v constante. B llega al origen cuando A ha recorrido media circunferencia. a) Obtener la relación entre ω y v; b) si M es el punto medio del segmento AB, obtener la trayectoria del punto M, y la velocidad y aceleración de M cuando A haya descrito un cuarto de circunferencia.



Solución: a) $v = \omega R/\pi$; b) $x^2 + y^2 = R^2/4$, $z = \frac{R}{2}(1 - \omega t/\pi)$ (ecuación de una hélice), $v = \frac{R\omega}{2\pi}\sqrt{1 + \pi^2}$, $a = R\omega^2/2$.

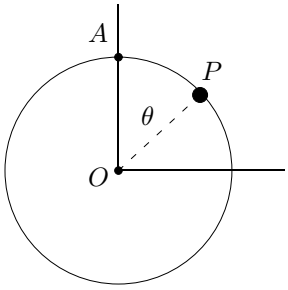
20. Una partícula P se mueve a lo largo de una ranura semicircular de radio R mediante un brazo OP articulado en el extremo O. El brazo gira con velocidad angular constante ω_0 en sentido

antihorario. Determinar el módulo de la velocidad de la partícula y su aceleración en cualquier instante.



Solución: $v = 2R\omega_0$, $a = 4R\omega_0^2$.

21. Una partícula describe una trayectoria circular de radio R en sentido horario, siendo la componente horizontal de la velocidad constante e igual a v_o. En el instante inicial, la partícula se encuentra en el punto A. Determinar: a) vector velocidad y aceleración de la partícula (utilizar coordenadas cartesianas) en función del ángulo θ; b) velocidad angular de la partícula en cualquier instante.



Solución: a) $\mathbf{v} = v_o\,(\mathbf{i} - \mathrm{tg}\,\theta\,\mathbf{j})$; $\mathbf{a} = -v_o^2/(R\cos^3\theta)\,\mathbf{j}$; b) $\omega = v_o/\sqrt{R^2 - v_o^2 t^2}$.

22. Una partícula describe un movimiento circular de radio R con velocidad angular ω y aceleración angular α. Demuestra que se verifica $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$; $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ donde $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{n}}$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{\mathbf{n}}$, siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un unitario perpendicular al plano de la trayectoria y donde $\mathbf{R}$ es el vector radio (vector de posición de la partícula respecto al centro de la trayectoria). Comprueba que el término $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}$ corresponde a la aceleración tangencial de la partícula y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ a su aceleración normal.