BOLETÍN 5. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. Una esfera de 10 cm de radio gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro con una velocidad angular constante de 100 rpm. A partir de un cierto instante, se le comunica una aceleración de frenado $\alpha(t) = -\lambda t$, con $\lambda = 1$ rad/s^3. Obtener: a) tiempo que tarda en pararse y número de vueltas dadas por la esfera en dicho tiempo; b) módulo de la velocidad y de las componentes intrínsecas de la aceleración en el instante $t = 2$ s de un punto P cuyas coordenadas esféricas respecto al eje de giro son $r = R/2$, $\theta = 60°$.

   Solución: a) $t = 4{,}58$ s, $N = 5{,}09$ vueltas; b) $v = 36{,}7$ cm/s, $a_t = 8{,}7$ cm/s^2, $a_n = 310{,}6$ cm/s^2.

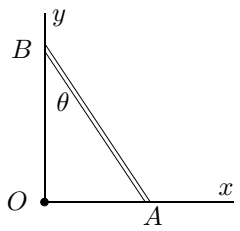
2. Los puntos $A(1, 2, 0)$ y $B(0, 2, 1)$ de un sólido tienen en un cierto instante una velocidad $\mathbf{v}_A = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. a) Determinar el torsor cinemático en el origen asociado al movimiento del sólido, sabiendo que la rotación en dicho instante se realiza alrededor de la dirección $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; b) obtener la velocidad del punto $P(2, 1, 2)$.

   Solución: a) $\mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{v}_O = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$; b) $\mathbf{v}_P = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3. El eje instantáneo de rotación de un sólido rígido es el semieje positivo OX. Se sabe que el punto $A(4, 0, 2)$ del sólido tiene una velocidad de 10 m/s paralela al semieje OY negativo. Obtener la rotación instantánea y la velocidad de deslizamiento mínimo del sólido.

   Solución: $\boldsymbol{\omega} = 5\,\mathbf{i}$, $v_d = 0$.

4. Una barra rígida de longitud $l = 25$ cm se encuentra apoyada (punto B) en una pared vertical formando un ángulo θ con la misma. El otro extremo de la barra (punto A) se apoya en la horizontal. Cuando $\theta = 45°$, se comprueba que el punto A tiene una velocidad $v_A = 2$ cm/s y una aceleración de frenado $a_A = -0{,}1$ cm/s^2. Obtener para dicha posición: a) la velocidad y aceleración angular de la barra; b) la velocidad y aceleración del extremo B de la barra; c) coordenadas del centro instantáneo de rotación.



   Solución: a) $\omega = 0{,}113$ rad/s, $\alpha = 0{,}007$ rad/s^2; b) $v_B = -2$ cm/s, $a_B = -0{,}351$ cm/s^2; c) $x_c = l \operatorname{sen}\theta, y_c = l\cos\theta$ ($x_c = y_c = 17{,}68$ cm).

5. En un instante dado, las coordenadas de 3 puntos de un sólido son

$$A(0, 0, 0), B(2, 1, 1), C(4, 3, 2).$$

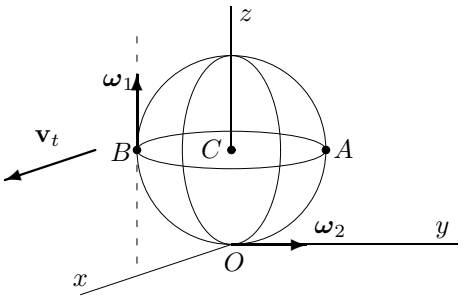
   Las velocidades respectivas son:

$$\mathbf{v}_A = (2, 2, 1), \mathbf{v}_B = (2, 3, z), \mathbf{v}_C = (6, x, y).$$

   Determinar: a) valores de x, y, z, para que los datos sean compatibles; b) el valor de la velocidad de rotación en dicho instante, el módulo de la velocidad de deslizamiento mínimo y las ecuaciones del eje de rotación instantánea.

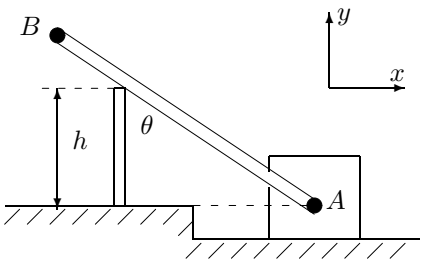
   Solución: a) $x = 4$, $y = -10$, $z = 0$; b) $\vec{\omega} = (-9, -4, -4)$, $v_d = 2{,}82$, recta de ecuación Δ : $\{8x - 9y - 9z = 1;\ 97y - 16z - 36x = 1\}$.

6. Una esfera de radio $R = 2$ m rueda sin deslizar sobre el plano XY. En el instante que muestra la figura, la esfera está sometida a una traslación $\mathbf{v}_t = v_t\,\mathbf{i}$ (con $v_t = 3$ m/s) y a dos rotaciones: una de velocidad $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1\,\mathbf{k}$ alrededor de un eje paralelo al eje OZ y que pasa por $B(0, -R, R)$, y otra de velocidad $\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2\,\mathbf{j}$, (con $\omega_2 = 4$ rad/s) alrededor del eje OY. Obtener: a) el valor de la rotación instantánea; b) velocidad de los puntos $C(0, 0, R)$ y $A(0, R, R)$; c) velocidad de deslizamiento mínimo; d) eje instantáneo de rotación.



Solución: a) $\boldsymbol{\omega} = 4\,\mathbf{j} + 1{,}5\,\mathbf{k}$ (rad/s); b) $\mathbf{v}_C = 8\,\mathbf{i}$ (m/s), $\mathbf{v}_A = 5\,\mathbf{i}$ (m/s); c) $v_d = 0$; d) recta de ecuación $\Delta : \{x = 0;\ 3y - 8z = 0\}$.

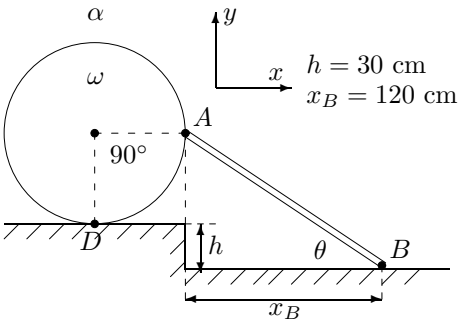
7. La barra de la figura, de longitud $l = 20$ cm, desliza sobre el poste vertical de altura $h = 10$ cm y está sujeto a un bloque en el punto A. El bloque se mueve hacia la derecha con velocidad constante $v = 20$ cm/s. a) Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la barra cuando $\theta = 45°$; b) calcular la velocidad $\vec{v}_B$ del extremo B de la barra en dicha posición.



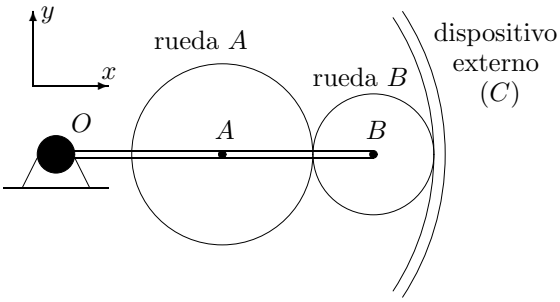
Solución: a) $\boldsymbol{\omega} = 1\,\mathbf{k}$ (rad/s), $\boldsymbol{\alpha} = -2\,\mathbf{k}$ (rad/s^2); b) $\mathbf{v}_B = 5{,}86\,\mathbf{i} - 14{,}14\,\mathbf{j}$ (cm/s).

8. El disco de radio $R = 60$ cm de la figura adjunta rueda sin deslizamiento sobre el plano horizontal con una velocidad angular de 10 rpm en sentido horario y una aceleración angular de 6 rad/s^2 en sentido contrario. La barra AB está unida al disco por el extremo A mientras que el extremo B desliza por la horizontal. Determinar en la posición indicada en la figura: a) la velocidad del punto B y la velocidad angular de la barra; b) la aceleración de dicho punto y la aceleración angular de la barra.

Solución: a) $\mathbf{v}_B = 1{,}1\,\mathbf{i}$ (m/s), $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 0{,}525\,\mathbf{k}$ (rad/s); b) $\mathbf{a}_B = -6{,}99\,\mathbf{i}$ (m/s^2), $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = -2{,}66\,\mathbf{k}$ (rad/s^2).

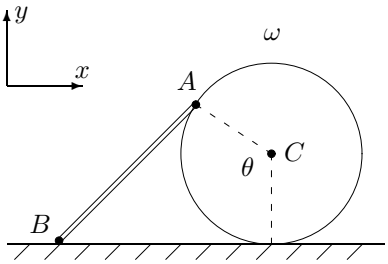


9. A y B son dos ruedas dentadas de radios a y b, con $2a = 3b$, cuyos ejes se encuentran fijos a una barra rígida. La barra se encuentra articulada en un punto fijo O y gira en sentido antihorario con velocidad angular ω. La rueda B gira sin deslizar por un dispositivo externo (C) que consiste en una rueda dentada fija. La distancia $OA = 2a$. Obtener la velocidad angular de rotación de las ruedas dentadas.



Solución: $\boldsymbol{\omega}_A = 16\omega/3\,\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}_B = -11\omega/2\,\mathbf{k}$.

10. Una barra AB de 4 m de longitud está unida a la periferia de un disco de 4 m de diámetro que rueda sin deslizar. A es una articulación y B no pierde contacto con el suelo. Del disco sabemos que el centro C se traslada con velocidad constante $\mathbf{v}_t = 0{,}25\,\mathbf{i}$ (m/s) y que rueda sin deslizamiento en sentido horario con una velocidad angular constante. Determinar: a) velocidad angular y aceleración angular de la barra cuando $\theta = \pi/2$; b) velocidad y aceleración del punto B en dicho instante.

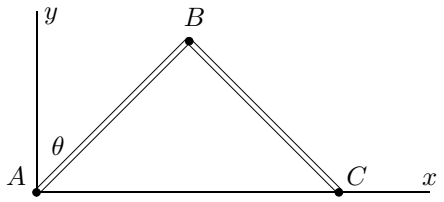


Solución: a) $\boldsymbol{\omega}_b = 0{,}072\,\mathbf{k}$ (rad/s), $\boldsymbol{\alpha}_b = 0{,}003\,\mathbf{k}$ (rad/s^2); b) $\mathbf{v}_B = 0{,}394\,\mathbf{i}$ (m/s), $\mathbf{a}_B = 0{,}055\,\mathbf{i}$ (m/s^2).

11. A través de un orificio practicado en el centro de un disco de radio R pasa una varilla vertical de longitud h, empotrada en sus extremos, alrededor de la cual puede girar el disco con su plano perpendicular a la varilla, sin rozamiento alguno. Cuando el disco se encuentra en el punto más alto, se imprime un movimiento de rotación de velocidad angular ω y en ese instante se suelta el disco, el cual desliza a lo largo de la barra. Determinar: a) aceleración, velocidad y trayectoria de un punto situado en la periferia del disco en función del tiempo; b) tiempo que tarda el disco en llegar al suelo; c) distancia vertical recorrida cuando el disco da una vuelta completa.

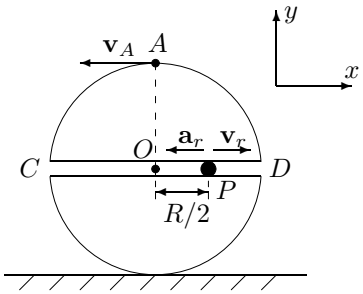
Solución: a) $\mathbf{a} = -\omega^2 R\,\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} - g\,\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + \omega R\,\cos\omega t\,\mathbf{j} - gt\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r} = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + (h - \frac{1}{2}gt^2)\,\mathbf{k}$; b) $t = (2h/g)^{1/2}$; c) $d = 2\pi^2 g/\omega^2$.

12. Dos barras AB y BC idénticas, de longitud l, están articuladas en el punto B. Los extremos A y C están sobre la horizontal de forma que A está fijo y C puede deslizar sin rozamiento. Si la barra AB gira en el plano de la figura con velocidad angular constante de módulo ω, determinar: a) velocidad y aceleración del extremo C en función de θ; b) posición del extremo C (respecto al punto A) en función del tiempo, si en el instante inicial $\theta = 0$; c) tiempo τ que tarda el punto B en llegar al suelo (**Examen final 96/97**).



Solución: a) $\mathbf{v}_c = 2\omega l\cos\theta\,\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_c = -2\omega^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i}$; b) $\mathbf{r}_c = 2l\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i}$; c) $\tau = \pi/(2\omega)$.

13. El disco de radio R de la figura rueda sin deslizar en sentido antihorario. Por la ranura diametral CD se desplaza una partícula puntual P. Cuando el sistema se encuentra en la posición de la figura, el extremo superior A del disco tiene una velocidad v_A, y la partícula P tiene una velocidad v_r y una aceleración a_r (respecto al disco) en los sentidos que se indican en la figura. Determinar, en dicha posición, la velocidad y la aceleración absoluta del punto P.



Solución $\mathbf{v}_P = (v_r - v_A/2)\,\mathbf{i} + v_A/4\,\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_P = -(a_r + \frac{v_A^2}{8R})\,\mathbf{i} + v_A v_r/R\,\mathbf{j}$.