BOLETÍN 6. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

1. La resistencia que encuentra un paracaidista cayendo a una velocidad v viene dada por $F = -0{,}3R^2v^2$, expresada en unidades del S.I., y siendo R el diámetro del paracaídas. a) Justificar por qué a partir de un cierto tiempo, el paracaidista cae con velocidad constante. Calcular dicha velocidad (velocidad límite); b) determinar R para que llegue al suelo con velocidad constante e igual a la velocidad con la que llegaría si cayera en el vacío desde una altura de 1 m (la masa del hombre junto con la del paracaídas es de 100 kg); c) en la situación anterior, obtener en qué instante alcanza una velocidad de 4 m/s, si en el instante inicial su velocidad era nula.

   Solución: a) $v_L = 57{,}15/R$; b) $R = 12{,}9$ m; c) $t = 0{,}67$ s.

2. Se desea elevar un cuerpo de peso P a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal tirando de una cuerda. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento plano-cuerpo es μ, determinar la fuerza mínima F necesaria y el ángulo θ que forma dicha fuerza con el plano inclinado.

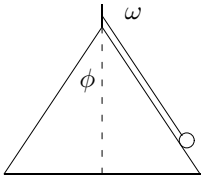
   Solución: $\operatorname{tg}\theta_m = \mu$, $F = P\operatorname{sen}(\alpha + \theta_m)$.

3. Un cuerpo de masa m desliza desde una altura de 2 m por un plano rugoso que forma un ángulo de 30° con la horizontal. A 5 m del pie del plano inclinado se encuentra un precipicio. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento plano-cuerpo y horizontal-cuerpo es el mismo, obtener el mínimo valor que debe tener dicho coeficiente de rozamiento para que el cuerpo no caiga por el precipicio.

   Solución:

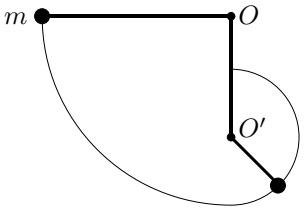
$$\mu = \frac{h}{d + \frac{h}{\tan\phi}} \qquad (\mu = 0{,}427).$$

4. Un cuerpo de masa $m = 5$ kg está unido al extremo de una cuerda de masa despreciable y longitud $l = 0{,}5$ m. El otro extremo de la cuerda se encuentra unido al vértice de un cono de semiángulo en el vértice $\phi = 45°$. El cuerpo gira alrededor del eje del cono con una velocidad angular constante de 20 rpm. Calcular: a) velocidad y aceleración de la masa en cualquier instante; b) valor de la fuerza R de reacción de la superficie del cono (supuesta lisa) sobre el cuerpo; c) valor de la tensión T de la cuerda; d) velocidad angular a la que debería girar la masa para que R sea nula. Hallar la tensión del hilo en este caso.



   Solución: a) $v = 0{,}74$ m/s, $a = 1{,}55$ m/s^2; b) $R = 29{,}2$ N; c) $T = 40{,}1$ N; d) $\omega = 50{,}23$ rpm, $T = 69{,}3$ N.

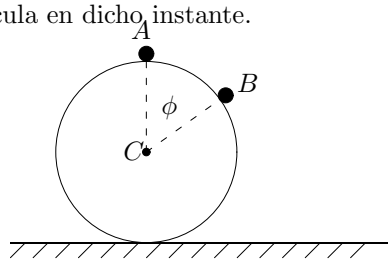
5. Una partícula de masa m cuelga de un hilo ideal de longitud l que se encuentra fijo en un punto O. Inicialmente, el hilo está extendido horizontalmente (de forma que la partícula se encuentre a la misma altura que el punto O). Al soltar el cuerpo, éste gira respecto a O hasta llegar a la vertical, donde se encuentra un clavo situado en O'. a) Calcular la mínima distancia OO' entre el punto de suspensión y el clavo para que el cuerpo describa giros completos en torno al clavo. b) Determinar la desviación angular máxima θ_m en el caso en que $OO' = l/2$.



   Solución: a) $OO' = \frac{3}{5}l$; b) $\theta_m = 131{,}8°$.

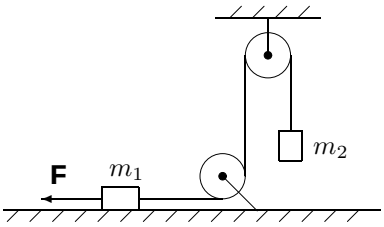
6. Una partícula de masa m se encuentra en equilibrio en el punto más alto de una esfera de radio $R = 3$ m. Al desplazarla ligeramente de dicha posición (con velocidad despreciable), la partícula desliza sobre la superficie de la esfera. Supondremos que la masa de la esfera es lo suficientemente

grande como para que ésta permanezca siempre en reposo. Obtener: a) el desplazamiento angular recorrido por la párticula hasta que abandona la esfera y velocidad en dicho instante; b) distancia a la que impacta con la horizontal, medida desde el punto de apoyo de la esfera; c) velocidad de la partícula en dicho instante.



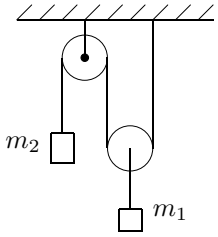
Solución: a) $\phi = 48{,}19°$, $v = 4{,}43$ m/s; b) $d = 4{,}39$ m; c) $v = 10{,}84$ m/s.

7. En el sistema de poleas adjunto se tiene $m_1 = m_2 = 1$ kg y $F = 8$ N. Obtener: a) aceleración de cada masa, sentido de movimiento y tensión de la cuerda; b) valor de F para que el sistema se mueva con velocidad constante.



Solución: a) $a_1 = a_2 = 0{,}9$ m/s^2, m_2 cae, $T = 8{,}9$ N; b) $F = 9{,}8$ N.

8. En el sistema de poleas adjunto se tiene que $m_1 = m_2$. a) Obtener el valor de la aceleración de cada cuerpo y las tensiones de la cuerda; b) obtener la relación entre las masas para que el movimiento sea uniforme. Hallar en dicho caso el valor de las tensiones.



Solución: a) $a_1 = g/5$, $a_2 = 2g/5$, $T_1 = 6mg/5$, $T_2 = 3mg/5$; b) $m_1/m_2 = 2$, $T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$.

9. Un cuerpo uniforme de forma cúbica, arista l y densidad ρ_c, se mantiene en reposo en el fondo de una piscina de profundidad d, siendo $l << d$ y siendo la densidad del agua ρ_a ($\rho_c < \rho_a$). Si el cuerpo se suelta, determinar la altura máxima que alcanza el cuerpo cuando éste sale del agua.

Solución:

$$h = \left(\frac{\rho_a}{\rho_c} - 1\right) d.$$

10. Un bloque cúbico homogéneo de densidad ρ y arista l flota en un líquido de densidad ρ_l, siendo $\rho < \rho_l$. (a) Determinar la profundidad a la que se encuentra la base inferior del bloque. (b) Calcular la mínima fuerza que habría que ejercer para mantener el bloque totalmente sumergido.

Solución:

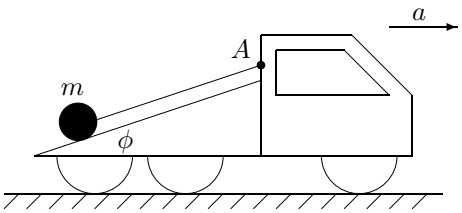
$$a)\ \ d = \frac{\rho}{\rho_l} l; \qquad b)\ \ F = (\rho_l - \rho) l^3 g.$$

11. (a) Determinar la fuerza que hay que ejercer para que un bloque cúbico homogéneo de densidad ρ y arista l se mantenga sumergido en un líquido de densidad ρ_l sabiendo que $\rho > \rho_l$. (b) Si la cara superior del bloque se encuentra al mismo nivel que la superficie del líquido, determinar el mínimo trabajo que habría que realizar para sacar el bloque del líquido. Verifica que las expresiones obtenidas son dimensionalmente correctas.

Solución:

$$a)\ \ F = (\rho - \rho_l) l^3 g; \qquad b)\ \ W = \left(\rho - \frac{\rho_l}{2}\right) l^4 g.$$

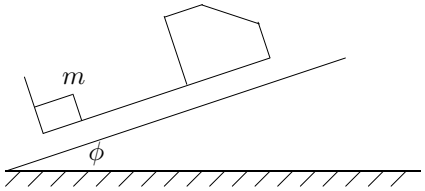
12. En la plataforma de un camión se ha colocado una rampa que forma un ángulo $\phi = 30°$ con la horizontal. Sobre la rampa se encuentra una masa m, en reposo respecto a la rampa, sujeta mediante un cable al punto A. Si el camión arranca con aceleración a respecto al suelo, determinar: a) tensión del cable y reacción de la rampa sobre la masa; b) mínimo valor de la aceleración a del camión para el que la masa m se despega de la rampa.



Solución: a) $T = \frac{m}{2}(g + a\sqrt{3})$, $N = \frac{m}{2}(g\sqrt{3} - a)$; b) $a = g\sqrt{3}$.

13. Un camión sube por una pendiente de 30° llevando una bola de masa m (en reposo respecto al camión) apoyada en su parte trasera. Determinar la reacción de la parte trasera del camión sobre la masa cuando el camión: a) acelera con a constante; b) frena con a constante. Si en el instante en el que el camión tiene una velocidad

v_0, frena con aceleración g, obtener la distancia recorrida por la masa sobre la caja del camión hasta que éste se detiene.

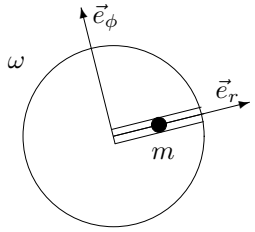


Solución: a) $R = m(g/2+a)$; b) $R = m(g/2-a)$; c) $d = v_0^2/(4g)$.

14. Sabemos que la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q y masa m en una región donde existe un campo magnético $\mathbf{B}$ es $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Considerar que $\mathbf{B} = -B\ \mathbf{k}$, con B constante, y que el módulo de la velocidad inicial es v_0. Suponer que el peso es despreciable frente a la fuerza magnética. Comprobar: a) que si la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula es paralela a $\mathbf{B}$, el movimiento es rectilíneo y uniforme; b) que si $\mathbf{v}_0$ es perpendicular a $\mathbf{B}$, el movimiento es circular y uniforme. Obtener en dicho caso el radio de la trayectoria, la velocidad angular, y el periodo del movimiento.

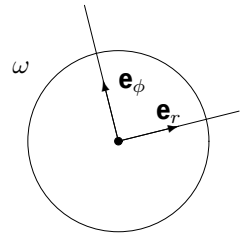
Solución: b) $R = \frac{mv_0}{qB}$, $\omega = \frac{qB}{m}$, $T = \frac{2\pi m}{qB}$.

15. Una partícula de masa m se encuentra en una ranura radial de un disco horizontal de radio R que gira con velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Inicialmente, la partícula se encuentra en reposo a una distancia d del centro. Determinar: a) aceleración y velocidad de la partícula respecto al disco en función de la distancia r de la partícula al centro; b) posición relativa de la partícula $r(t)$ en cualquier instante; c) módulo de la fuerza de reacción que actúa sobre la partícula en función de la distancia r; d) tiempo que tarda en salir del disco, si $\omega = 20$ rpm y $d = R/2$; e) velocidad con la que sale la partícula del disco para un observador en reposo, si $R = 1$ m.



Solución: a) $a_r = \omega^2 r$, $v_r = \omega\sqrt{r^2 - d^2}$; b) $r = d\cosh(\omega t)$; c) $N = \sqrt{m^2g^2 + 4m^2\omega^4(r^2 - d^2)}$; d) $t = 0{,}63$ s; 3) $v = 2{,}77$ m/s.

16. Una persona de masa m se encuentra sobre un tiovivo horizontal de radio R que gira alrededor de un eje vertical que pasa por el centro con velocidad angular ω. a) Determinar la fuerza que debe ejercer para desplazarse radialmente desde la periferia hasta el centro con velocidad constante si ω es constante, así como el trabajo que debe efectuar; b) repetir el apartado anterior en el caso en el que el tiovivo frena con una aceleración angular constante α (razonar qué ocurriría si acelera con α constante).



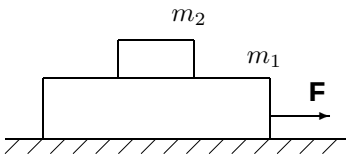
Solución: a) $\mathbf{F} = -m\omega^2 r\,\mathbf{e}_r - 2m\omega v\,\mathbf{e}_\phi$, $W = -\frac{1}{2}m\omega^2R^2$; b) $\mathbf{F} = -m\omega^2 r\,\mathbf{e}_r - (m\alpha r + 2m\omega v)\,\mathbf{e}_\phi$, $W = -\frac{1}{2}m\omega^2R^2$.

17. Una partícula P de masa m realiza un movimiento en un plano horizontal (plano XY) siendo atraída por el origen de coordenadas de un sistema de referencia con una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, donde k es una constante y $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. Su posición inicial es $\mathbf{r}_0 = b\ \mathbf{j}$ y su velocidad inicial es $\mathbf{v}_0 = v_0\ \mathbf{i}$. Determinar: a) componentes de la velocidad en función de la posición de P; b) ecuación de movimiento; c) ecuación implícita de la trayectoria; d) comprobar que la fuerza $\mathbf{F}$ deriva de un potencial y obtener dicha función potencial; e) comprobar que la energía total es constante durante el movimiento.

Solución: a) $v_x = \sqrt{v_0^2 - \omega^2x^2}$, $v_y = \omega\sqrt{b^2 - y^2}$, con $\omega = \sqrt{k/m}$; b) $x(t) = v_0/\omega$ sen ωt, $y(t) = b\cos\omega t$; c) elipse de ecuación $\frac{x^2}{(v_0/\omega)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; d) $U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; e) $E_{tot} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kb^2$.

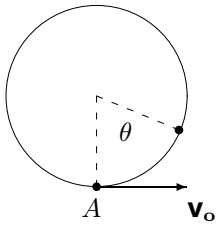
18. La masa m_2 se encuentra en el punto medio de un bloque de masa m_1 y longitud 10 m que descansa sobre la horizontal, siendo los pesos $P_1 = 90$ N y $P_2 = 10$ N. El coeficiente de rozamiento bloque-suelo es $\mu_1 = 0{,}2$. a) Obtener el coeficiente de rozamiento masa-bloque μ_2, si al tirar del bloque con una fuerza horizontal $F = 50$ N, la masa m_2 desliza con velocidad constante respecto al bloque; obtener en dicho caso la aceleración del bloque; b) determinar el valor de F para que el bloque se desplace con velocidad constante; ¿qué movimiento tendría la masa m_2 en dicho caso? c) ¿con qué aceleración (respecto al bloque) se mueve m_2 si $F = 60$ N?; d) obte-

ner en el caso anterior el tiempo que tarda m_2 en abandonar el bloque y el espacio (absoluto) recorrido por el bloque y la masa en dicho tiempo.



Solución: a) $\mu_2 = 0{,}3$, $a_1 = 2{,}94$ m/s^2; b) $F = 23$ N, m_2 en reposo relativo respecto al bloque; c) $a_2 = 1{,}09$ m/s^2 (hacia la izqda.); d) $t = 3{,}03$ s, $s_1 = 18{,}5$ m, $s_2 = 13{,}5$ m.

19. Una masa puntual de peso P se encuentra insertada en una circunferencia vertical de radio R. La masa se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la circunferencia y se le proporciona una velocidad tangencial $v_0 = 2\sqrt{gR}$. a) Obtener la velocidad de la masa en función de la posición angular θ (en el instante inicial $\theta_0 = 0$); b) velocidad con la que llega al punto más alto; c) velocidad angular y aceleración angular en función de θ; d) fuerza de reacción en función de θ.



Solución: a) $v = \sqrt{2gR(1+\cos\theta)}$; b) $v = 0$; c) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}\sqrt{(1+\cos\theta)}$, $\alpha = -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta$;
d) $R = P(2 + 3\cos\theta)$.

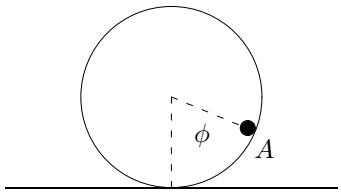
20. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad v_0 en un medio que ofrece una resistencia $F_R = -\frac{mg}{v_0}v$, siendo m la masa del proyectil y v su velocidad instantánea. Determinar: a) velocidad en cualquier instante t; b) posición en cualquier instante respecto al suelo; c) máxima altura que alcanza y tiempo empleado; d) trabajo realizado por la fuerza de resistencia desde el lazamiento hasta que el proyectil alcanza el punto más alto. Comprobar que se obtendría el mismo resultado aplicando el teorema de trabajo-energía.

Solución: a) $v(t) = v_0(2\mathrm{e}^{-gt/v_0} - 1)$; b) $y(t) = \frac{2v_0^2}{g}(1 - \mathrm{e}^{-gt/v_0}) - v_0 t$; c) $y_{max} = \frac{v_0^2}{g}(1 - \ln 2)$, $t = \frac{v_0}{g}\ln 2$; d) $W_R = -mv_0^2(\ln 2 - 1/2)$.

21. Una partícula de masa 10 kg se mueve horizontalmente en un medio viscoso que le ofrece una resistencia $F = -kv^2$, donde k es una constante y v la velocidad de la masa. Sabiendo que $k = 0{,}1$ (en unidades del S.I.) y que la velocidad inicial es $v_0 = 10$ m/s, obtener: a) velocidad de la partícula en función de la distancia recorrida (se supondrá que la fuerza peso es despreciable); b) espacio recorrido en función del tiempo; c) velocidad en función del tiempo; d) tiempo y espacio recorrido hasta que la velocidad se reduce a 5 m/s; e) trabajo realizado en dicho intervalo de tiempo por la fuerza de resistencia; comprobar que se obtendría el mismo resultado aplicando el teorema de trabajo-energía.

Solución: a) $v = 10\mathrm{e}^{-x/100}$; b) $x = 100\ln(1 + t/10)$; c) $v = \frac{100}{10+t}$; d) $t = 10$ s, $s = 69{,}3$ m; e) $W_R = -375$ J.

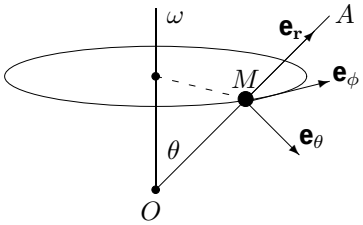
22. Un observador de masa m se encuentra en el interior de un cilindro de masa M. Sin razón aparente, dicho observador se pone en movimiento (en sentido antihorario) quedándose en equilibrio en la posición A, que forma un ángulo ϕ con la vertical. El observador llega a la conclusión de que ello es debido a que el cilindro se ha acelerado por la acción de alguna fuerza externa horizontal. Ponte en el lugar del observador interior. (a) Determinar el valor de dicha fuerza suponiendo que el cilindro tiene únicamente movimiento de traslación y que todas las ligaduras son lisas. (b) Indica las fuerzas que actúan sobre el cilindro y sobre el observador m cuando la fuerza externa deje de actuar. Plantea en este caso las respectivas ecuaciones dinámicas (sin resolverlas).
(Examen diciembre, 2000).



Solución: (a) $F = (M + m)g\tan\phi$.

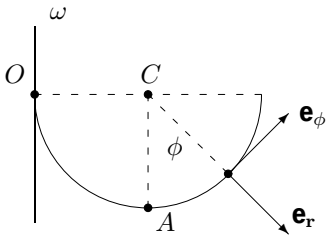
23. Un anillo puntual M de masa $m = 10$ g puede deslizar sin rozamiento a lo largo de un segmento OA inclinado $\theta = 30°$ respecto a la vertical. El segmento gira alrededor de la vertical con velocidad angular constante de 120 rpm. a) Determinar la posición de equilibrio respecto al segmento. Determinar, cuando la posición relativa del anillo sea $OM = 2$ m: b) la velocidad relativa y aceleración relativa del anillo respecto al

segmento OA; c) valor de la fuerza de reacción sobre el anillo para dicha posición.



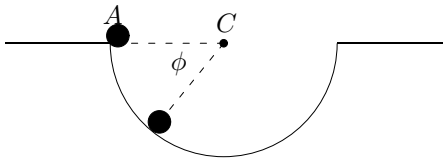
Solución: a) $r = 0{,}21$ m; b) $v_r = 11{,}13$ m/s, $a_r = 70{,}47$ m/s^2; c) $R = 2$ N.

24. Una anillo semicircular de radio R gira en el plano vertical de la figura alrededor de un eje tangente a un extremo del mismo con velocidad angular constante. Un pequeño collar, inicialmente situado en la posición A, puede deslizar sin rozamiento a lo largo del alambre. Obtener el mínimo valor de ω para que el collar alcance el punto más alto de la semicircunferencia.



Solución: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$.

25. Una partícula de masa m, inicialmente en reposo en la posición A, puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie circular de radio R. a) Obtener la velocidad angular y aceleración angular de m en función del ángulo ϕ; b) valor de la fuerza de reacción en función de ϕ.



Solución: a) $\omega = \sqrt{2g \operatorname{sen}\phi/R}$, $\alpha = \frac{g}{R}\cos\phi$; b) $N = 3mg \operatorname{sen}\phi$.

26. Un cuerpo de masa m se deja caer desde una altura h. a) Determinar la potencia instantánea desarrollada por el campo gravitatorio cuando la partícula se encuentra en una posición arbitraria; b) obtener la potencia desarrollada en el choque con el suelo; c) obtener la potencia media desarrollada durante el tiempo que dura el movimiento; d) obtener la potencia media desarrollada por un agente externo para subir el cuerpo hasta la posición inicial con velocidad constante si emplea 5 veces el tiempo que tarda en caer el cuerpo en caída libre.

Solución: a) $P = mg^2t$; b) $P = mg\sqrt{2gh}$; c) $\overline{P} = \frac{1}{2}mg\sqrt{2gh}$; d) $\overline{P}_{ext} = \frac{1}{10}mg\sqrt{2gh}$.

27. La fuerza que actúa sobre una partícula es de la forma $\vec{F} = -ax\,\vec{i} + by\vec{j}$, donde a y b son constantes. Sean los puntos A y B de coordenadas $A(R,0,0)$ y $B(0,R,0)$. a) Obtener el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria Γ_1 que consiste en el arco de circunferencia de radio R centrado en O y que pasa por A y B; b) calcular el trabajo pero a lo largo del segmento recto Γ_2 que une A y B; c) comprobar que $\vec{F}$ es conservativa calculando la energía potencial asociada a la fuerza $\vec{F}$; d) comprobar que se verifica el teorema de conservación de la energía.

Solución: a) $W = R^2(a+b)/2$; b) $W = R^2(a+b)/2$.

28. Una esfera de 1 kg cae verticalmente y choca con el suelo con una velocidad de 25 m/s y vuelve a subir con una velocidad de 10 m/s. a) Determinar el impulso que actúa sobre la esfera durante su contacto con el suelo; b) obtener la fuerza media que el suelo ejerce sobre la esfera si el contacto dura 0.02 s.

Solución: a) $\vec{I} = 35\,\vec{j}$ kg m/s; b) $\overline{F} = 1750$ N.

29. Una partícula se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de la fuerza $F(t) = kt\,\mathrm{e}^{-at^2}$, donde k y a son constantes. Se tiene que en $t = 0$, $v_0 = 0$. Obtener: a) el impulso producido por F durante un tiempo t; b) la energía cinética de la partícula en el instante en el que la fuerza es máxima; c) la potencia en el instante t; d) la potencia media desarrollada durante un intervalo de tiempo t.

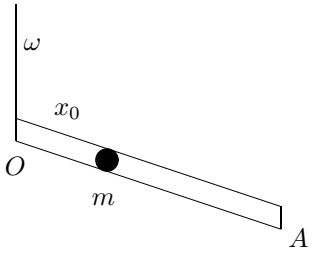
Solución: a) $I = \frac{k}{2a}(1-\mathrm{e}^{-at^2})$; b) $E_c = \frac{k}{8ma^2}(1-\mathrm{e}^{-at^2})^2$; c) $P = \frac{k^2}{2m}t\mathrm{e}^{-at^2}(1-\mathrm{e}^{-at^2})$ d) $\overline{P} = \frac{k^2}{8ma^2t}(1-\mathrm{e}^{-at^2})^2$.

30. Una partícula de masa m se encuentra sobre una plataforma horizontal que gira alrededor de un eje perpendicular a la plataforma y que pasa por su centro con una frecuencia angular ν constante. Sabiendo que μ es el coeficiente de rozamiento entre la plataforma y m, determina para qué valores de r (distancia de m al centro de la plataforma) la partícula se mantiene en reposo respecto a la plataforma.

Solución:

$r < \frac{\mu\, g}{4\pi^2\, \nu^2}$

31. Una partícula de masa m se encuentra en el interior de un tubo horizontal OA de longitud L que gira con velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical, perpendicular al tubo y que pasa por O. En el instante inicial, m se encuentra en reposo (respecto al tubo) a una distancia x_0 del centro O. El rozamiento masa-tubo se considera despreciable. (a) Determina la aceleración de m respecto al tubo y comprueba que es proporcional a la distancia x de la partícula al centro; (b) a partir del resultado anterior, calcula la velocidad de m respecto al tubo en función de x; ¿con qué velocidad sale despedida m del tubo? (c) Calcula la fuerza que el tubo ejerce sobre m en función de la posición x.



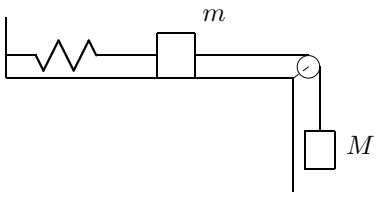
Solución: (a) $a = \omega^2\, x$; (b) $v^2 = \omega^2(x^2 - x_0^2)$, ${v_A}^2 = \omega^2(L^2 - x_0^2)$; (c) $\mathbf{N} = 2m\,\omega\, v\,\mathbf{j} + mg\,\mathbf{k}$

Movimiento oscilatorio

32. Un muelle de longitud natural L se cuelga verticalmente por uno de sus extremos (punto O). Al colocar una masa puntual m en el otro extremo, el resorte se estira una cantidad y_o. a) Determinar el valor de la constante elástica del muelle. b) Comprobar que si m se estira una cantidad Δy y se deja con velocidad nula, m describe un movimiento armónico simple (M.A.S.) alrededor de la posición $L + y_o$ y de amplitud Δy.

Solución: $k = mg/y_o$.

33. En el sistema de la figura, inicialmente en reposo, el resorte está alargado 20 cm respecto a su longitud natural, siendo $k = 98$ N/m su constante elástica. Determinar el mínimo valor de M para que al dejar el sistema en movimiento, el bloque de masa $m = 2$ kg recorra una distancia de 50 cm a lo largo de la horizontal. Supondremos que el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}5$.



Solución: $M = 8$ kg.

34. Un cuerpo cúbico de arista a y densidad ρ se sumerge en un líquido de densidad ρ_o, siendo $\rho < \rho_o$. Aplicando el principio de Arquímedes, determinar la porción x_o del bloque que está sumergida cuando se encuentre en equilibrio. b) Si hundimos el cuerpo una distancia x respecto a la posición de equilibrio (siendo $x + x_o < a$), comprobar que al soltar el cuerpo, éste realiza un movimiento armónico simple. Determinar el periodo de las oscilaciones.

Solución:

$$x_o = a\frac{\rho}{\rho_o} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{x_o}{g}}$$

35. Determinar el periodo de las oscilaciones de un péndulo simple de longitud l para pequeñas oscilaciones. Realizar el problema aplicando la segunda ley de la dinámica y por consideraciones energéticas.

Solución:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$