Fundamentos Físicos de la Ingeniería
Ingeniería Química

BOLETÍN 8. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. Se aplica una fuerza tangencial de $F = 196$ N a la periferia de un tambor cilíndrico de lavadora lleno de ropa de masa total $M = 8$ kg y radio $R = 25$ cm que inicialmente se encuentra en reposo. Calcular: a) aceleración angular; b) velocidad angular (en rpm) al cabo de 10 s; c) número de vueltas dadas en dicho tiempo; d) trabajo efectuado por el motor en dicho tiempo; e) energía cinética de rotación adquirida por el tambor al cabo de 10 s. ($I_c = \frac{1}{2}MR^2$).

   Solución: a) $\alpha = 196$ rad/s^2; b) $\omega = 18717$ rpm; c) $\Delta\phi = 1560$ rev; d) $W = 480{,}2$ kJ; e) $K_r = 480{,}2$ kJ.

2. Una esfera homogénea de masa M y radio R se encuentra en la horizontal. Se aplica una fuerza constante F paralela a la horizontal cuya línea de acción pasa por el c.d.m. Comprobar que si no existe rozamiento esfera-suelo, el único movimiento posible de la esfera es de deslizamiento (es decir, que la esfera sólo se traslada y no rueda).
   $I_c = \frac{2}{5}MR^2$.

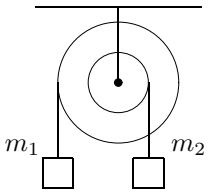
3. Una esfera de masa M y radio R cae a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Si μ es el coeficiente de rozamiento: a) obtener la condición que debe cumplir μ (en función de ϕ) para que la esfera ruede sin deslizar; b) obtener la aceleración del centro de masas y la aceleración angular de la esfera si rueda sin deslizar; c) obtener lo mismo que antes en el caso en el que la esfera ruede con deslizamiento. Realizar el problema por procedimientos dinámicos y por procedimientos energéticos.

   Solución: a) $\mu \geq \frac{2}{7}\text{tg}\phi$; b) $a_c = \frac{5}{7}g\,\text{sen}\phi$, $\alpha = \frac{5g}{7R}\,\text{sen}\phi$; c) $a_c = g\,\text{sen}\phi - \mu g\cos\phi$, $\alpha = \frac{5\mu g}{2R}\,\text{sen}\phi$.

4. Un bloque de masa $m_2 = 20$ kg cuelga de un cable que pasa por una polea cilíndrica fija de masa $M = 320$ kg y radio $R = 0{,}5$ m. El otro extremo está sujeto horizontalmente a otro bloque de masa $m_1 = 20$ kg, el cual desliza sobre un plano horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}8$. Obtener: a) la aceleración de los bloques m_1 y m_2 (realizar el cálculo por dos procedimientos); b) velocidad angular de la polea al cabo de 1 minuto de que el sistema partiera del reposo; c) número de vueltas dadas por la polea durante dicho tiempo.

   Solución: a) $a = 0{,}20$ m/s^2; b) $\omega = 24$ rad/s; c) $\Delta\phi = 114{,}6$ rev.

5. Sea una polea de momento de inercia $I = 200$ kg m^2, compuesta por dos cilindros concéntricos pegados de radios $R_1 = 0{,}3$ m y $R_2 = 0{,}2$ m. De dos cables, enrollados con sentidos opuestos sobre dichos cilindros, cuelgan masas de valor $m_1 = 20$ kg y $m_2 = 25$ kg, respectivamente. a) Determinar el sentido de giro de la polea; b) hallar las respectivas aceleraciones con que caen las masas, si parten del reposo; c) obtener la velocidad angular de la polea al cabo de 60 s desde que se inicia el movimiento y el número de vueltas dadas en dicho intervalo de tiempo; d) tensiones de los cables.

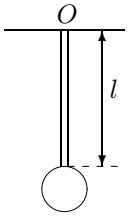


   Solución: a) sentido antihorario; b) $a_1 = 0{,}015$ m/s^2, $a_2 = 0{,}010$ m/s^2; c) $\omega = 3$ rad/s; d) $\phi = 14{,}32$ rev; e) $T_1 = 195{,}7$ N, $T_2 = 245{,}2$ N.

6. Un patinador sobre hielo gira con sus piernas cerradas y sus brazos abiertos con una velocidad angular $\omega_0 = 1$ rev/s. Podemos considerar que el tronco y piernas del patinador equivalen a un cilindro de masa $m_c = 60$ kg, altura $h = 1{,}75$ m y densidad $\rho = 1000$ kg/m^3, y que cada brazo es un barra de masa $m_b = 5$ kg y longitud $l = 0{,}7$ m. Obtener la velocidad angular del patinador cuando éste pega los brazos al tronco (observa que el momento angular del sistema respecto al eje de giro se conserva).

   Solución: $\omega = 6{,}43$ rps.

7. El péndulo de pared de la figura consta de una barra de masa $m = 300$ g y longitud $l = 1$ m, en cuyo extremo se sitúa un disco metálico de masa $M = 100$ g y radio $R = 10$ cm. El momento de inercia de la barra respecto a un eje perpendicular a la barra que pase por su centro es $I_b = (1/12)ml^2$ y el del disco respecto a un eje perpendicular al disco que pase por su centro es $I_d = (1/2)MR^2$. Obtener: a) el momento de inercia del péndulo respecto al punto O de suspensión. b) Si el péndulo se separa un ángulo de 30° con la vertical, obtener la velocidad del centro de masas cuando pasa por la vertical.



Solución: a) $I = 0{,}222$ kgm^2; b) $v_C = 1{,}14$ m/s.

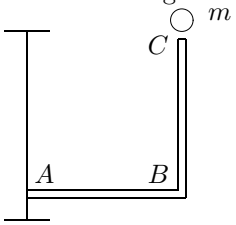
8. Determinar el momento de inercia de una varilla delgada y homogénea de masa m y longitud l: a) respecto a un eje que pasa por el centro de masas y es perpendicular a la varilla; b) respecto a un eje E que pasa por el centro de masas y forma un ángulo α con la varilla.

Solución: a) $I_c = \frac{1}{12}ml^2$; b) $I_E = \frac{1}{12}ml^2 \operatorname{sen}^2\alpha$.

9. Se tiene una varilla de sección despreciable, longitud l y masa M, cuya densidad viene dada por $\lambda = \lambda_0(1 + x/l)$, siendo x la distancia de un punto arbitrario de la varilla al extremo O en el que la densidad es λ_0. Determinar el momento de inercia de la varilla respecto a un eje E perpendicular a la varilla y que pasa por O.

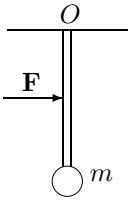
Solución: $I_E = \frac{7}{18}Ml^2$

10. Las barras de la figura son iguales, cada una de longitud l y masa m. La barra AB es perpendicular al eje de giro (eje E) y la barra BC es paralela al mismo. El sistema gira alrededor del eje E con velocidad angular ω. Se deja caer una bola plástica de masa m, de forma que se adhiere al punto C. Obtener la velocidad angular de giro del sistema en este caso (Nota: observa que se conserva el momento angular del sistema).



Solución: $\omega' = 4\omega/7$.

11. Una varilla de masa $M = 300$ g y longitud $l = 50$ cm se encuentra suspendida por uno de sus extremos a lo largo de la vertical. En el extremo opuesto se encuentra una masa puntual de masa $m = 120$ g. Aplicamos una fuerza impulsiva perpendicular a la varilla de valor $F = 9{,}8$ N que actúa durante un tiempo $\Delta t = 0{,}05$ s. a) Obtener el desplazamiento angular máximo de la varilla, medido desde la vertical, si la fuerza se aplica en el punto medio de la varilla; b) obtener lo anterior en el caso en que la fuerza se aplique en el extremo inferior de la varilla.

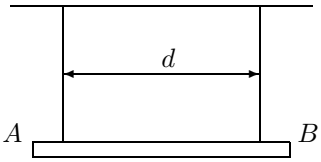


Solución: a) $\phi_m = 26{,}36°$; b) $\phi_m = 54{,}06°$.

12. Sobre el sistema del problema anterior actúa ahora una fuerza de módulo constante $F = 9{,}8$ N, que está aplicada en el punto medio de la varilla y que se mantiene en todo instante perpendicular a la misma. Obtener el valor de la velocidad de la masa m cuando el sistema se desplace un ángulo $\phi = \pi/2$ si inicialmente parte del reposo en la posición vertical ($\phi = 0$). Realizar el problema aplicando argumentos dinámicos y comprobar que se obtiene el mismo resultado aplicando el teorema trabajo-energía.

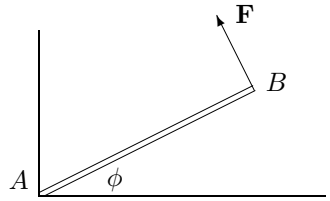
Solución: $v = 4{,}79$ m/s.

13. La figura representa una viga homogénea de sección despreciable, masa $m = 100$ kg y longitud $l = 1{,}20$ m. La viga cuelga del techo mediante dos cables inextensibles, equidistantes de los extremos de la viga y separados por una distancia $d = 1$ m. a) Obtener el valor de las tensiones en dicha posicion; b) si se parte el cable de la derecha, obtener el valor de la tensión en el cable de la izquierda justamente después de que el otro se haya partido; c) obtener el valor de la velocidad de los extremos A y B de la viga cuando ésta se encuentre en la posición vertical.



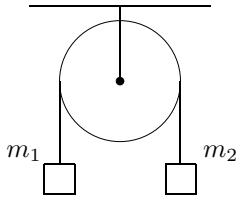
Solución: a) $T = 490$ N; b) $T = 318$ N; c) $v_A = 0{,}52$ m/s, $v_B = 5{,}66$ m/s.

14. Una varilla de masa m y longitud l se encuentra inicialmente en reposo en posición horizontal. Uno de sus extremos se encuentra apoyado en la esquina A, según muestra la figura. Se aplica en el otro extremo de la barra (punto B) una fuerza constante perpendicular a la varilla y de valor igual al peso. Suponiendo que el punto A no se desplaza, determinar: a) velocidad angular y aceleración angular en función del desplazamiento angular (medido desde la posición inicial); b) velocidad del extremo B en función del ángulo.



Solución: a) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(2\phi - \operatorname{sen}\phi)}$, $\alpha = \frac{3g}{2l}(2 - \cos\phi)$; b) $v_B = \sqrt{3gl(2\phi - \operatorname{sen}\phi)}$.

15. Las masas de la figura, de valor $m_1 = 50$ g y $m_2 = 60$ g, están unidas mediante un hilo inextensible y de masa despreciable que pasa por una polea cilíndrica fija de masa $M = 20$ g y radio $R = 5$ cm que puede girar alrededor de su eje de simetría. Determinar: a) aceleración de cada una de las masas; b) aceleración angular de la polea; c) tensiones del hilo; d) reacción en el eje de la polea.



Solución: a) $a_1 = a_2 = 0{,}82$ m/s^2; b) $\alpha = 0{,}16$ rad/s^2; c) $T_1 = 0{,}531$ N, $T_2 = 0{,}539$ N; c) $R = 1{,}266$ N.

16. Un cilindro de masa m y radio R sube por un plano inclinado de ángulo ϕ bajo la acción de una fuerza F paralela al plano inclinado, de valor $F = mg$ y cuya línea de acción pasa por el c.d.m. a) Obtener el mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ_0 para que el cilindro ruede sin deslizar. Determinar en dicho caso la aceleración del c.d.m. del cilindro, aceleración angular y energía cinética del mismo en función de la velocidad angular; b) si el coeficiente de rozamiento fuese $\mu = \mu_0/2$ (por tanto, el cilindro rueda con deslizamiento) determinar lo pedido en el apartado anterior.

Solución: a) $\mu_0 = \frac{1-\operatorname{sen}\phi}{3\cos\phi}$, $a = \frac{2}{3}g(1 - \operatorname{sen}\phi)$, $\alpha = \frac{2g}{3R}(1-\operatorname{sen}\phi)$, $K = \frac{3}{4}m\omega^2R^2$; b) $a = \frac{5}{6}g(1 - \operatorname{sen}\phi)$, $\alpha = \frac{g}{3R}(1 - \operatorname{sen}\phi)$, $K = \frac{27}{8}m\omega^2R^2$.

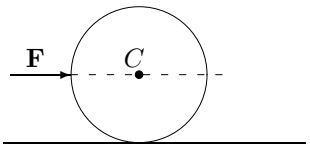
17. Una barra AB, de longitud $2l$ y masa m, se apoya en la pared (extremo B) y en la horizontal (extremo A) sin rozamientos. Sabiendo que la barra parte de la posición vertical ($\phi = 0$), determinar: a) aceleración angular y la velocidad angular de la barra en función de ϕ; b) Obtener para qué ángulo ϕ, el extremo B se despega de la pared (para ello, determinar la reacción en B; este extremo se despegará de la pared cuando $R_B = 0$).

Solución: a) $\alpha = \frac{3g}{4l}\operatorname{sen}\phi$, $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}(1 - \cos\phi)}$; b) $R_B = \frac{3}{4}mg\operatorname{sen}\phi(3\cos\phi - 2)$, $\phi = 48{,}19°$.

18. Una esfera homogénea de masa m y radio R se lanza sobre una superficie horizontal de modo que en el instante inicial sólo desliza con una velocidad v_0. Obtener la velocidad lineal del centro de masas de la esfera cuando ésta comience a rodar sin deslizamiento.

Solución: $v = 5v_0/7$.

19. Un cilindro de masa $m = 30$ kg y radio $R = 60$ cm se mueve en un plano horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}3$. Partiendo del reposo, se le aplica una fuerza $F = t^3/2$ paralela a la horizontal y cuya línea de acción pasa por el centro de masas del cilindro. Determinar: a) el tiempo al cabo del cual el cilindro empieza a rodar con deslizamiento; b) la aceleración del c.d.m. en dicho instante; c) la aceleración del c.d.m y aceleración angular del cilindro al cabo de 10 s.



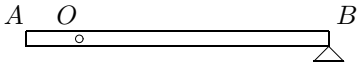
Solución: a) $t = 8{,}09$ s; b) $a = 5{,}88$ m/s^2; c) $a = 13{,}73$ m/s^2, $\alpha = 9{,}8$ rad/s^2.

20. Una masa $m_1 = 1$ kg cuelga del extremo de una cuerda de masa despreciable, que pasa por una polea sin rozamiento y de radio despreciable. La cuerda se arrolla a un cilindro de masa $m_2 = 8$ kg y radio $R = 10$ cm que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Obtener: a) aceleración

de m_1; b) tensión de la cuerda; c) aceleración angular del cilindro.

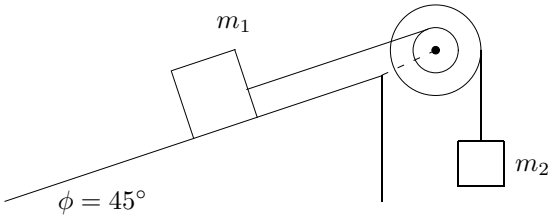
Solución: a) $a_1 = 2{,}45$ m/s^2; b) $T = 7{,}35$ N; c) $\alpha = 12{,}25$ rad/s^2.

21. Una varilla homogénea AB de masa m y longitud l está apoyada en su extremo B y se encuentra articulada en el punto O, respecto al cual puede girar sin rozamiento. El punto de articulación O se encuentra a una distancia x del extremo A. a) Determinar el valor de las reacciones R_B y R_O en la situación de equilibrio en función de x. b) Se retira el apoyo del extremo B; calcular el nuevo valor R'_O de la reacción en el punto O en el instante en el que la barra comienza a girar. Comprobar que existen dos valores de x para los cuales R'_O coincide con la R_O calculada en el apartado anterior, siendo $x = l/3$ el mínimo de estos valores; c) para el caso en el que $x = l/3$, obtener la velocidad del extremo B de la barra cuando ésta se encuentra en la posición vertical (**Examen final, julio 97**).



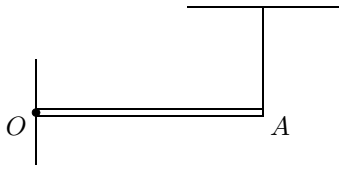
Solución: a) $R_B = mg(l-2x)/[2(l-x)]$, $R_O = mgl/[2(l-x)]$; b) $R'_0 = mgl^2/[l^2 + 12(\frac{l}{2} - x)^2]$, $x_1 = l/2$, $x_2 = l/3$; c) $v_B = 2\sqrt{gl/3}$.

22. Una polea fija está compuesta por dos cilindros concéntricos pegados de radios $R_1 = 20$ cm y $R_2 = 30$ cm y tiene un momento de inercia respecto al eje de simetría de la polea de $I = 2$ kg m^2. De dos cables, enrollados en sentidos opuestos sobre dichos cilindros, cuelgan dos masas $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 2$ kg. Supondremos que las cuerdas no deslizan por las gargantas de las poleas, que todos los rozamientos son despreciables y que el sistema parte del reposo. Determinar: a) el sentido de giro del sistema. b) la aceleración de cada una de las masas, empleando argumentos dinámicos y argumentos energéticos (**Examen diciembre 99**).



Solución: a) giro en sentido horario; b) $a_1 = 2{,}9$ cm/s^2, $a_2 = 4,3$ cm/s^2.

23. Una barra delgada de masa $M = 25$ kg se encuentra en posición horizontal, articulada en el extremo O y sujeta por un cable vertical en el extremo A. Si se rompe el cable, obtener el ángulo que formará la barra con la horizontal cuando se parta la articulación sabiendo que ésta puede soportar una fuerza máxima $T_M = 235$ N. (Nota: Para resolver el problema, hay que obtener el valor de la tensión en la articulación en función del ángulo girado por la barra). (**Examen septiembre 99**).



Solución:

$$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1}{99}\left[\left(\frac{4T_M}{Mg}\right)^2 - 1\right]}$$