Boletín seminario de problemas IV (Campo gravitatorio)

1. Calcula el campo gravitatorio creado por un cilindro macizo de longitud infinita, radio R y densidad de masa ρ uniforme en cualquier punto del espacio.

2. Un satélite de órbita ultrabaja se mueve en una órbita circular por encima de la superficie de un planeta, en la que se supone que el aire no ofrece resistencia. Demuestra que su velocidad orbital v y la velocidad de escape del planeta se relacionan según la ecuación $v_{\text{esc}} = \sqrt{2}v$.

3. Demuestra que la energía total de un satélite que describe una órbita circular es igual a la mitad de su energía potencial.

4. Un planeta, cuyo núcleo está vacío, consiste en una corteza esférica gruesa de masa M, de radio exterior R y de radio interior $R/2$. ¿Qué masa hay entre el centro del planeta y $3/4R$? ¿Cuál es el campo gravitatorio a una distancia $3/4R$ del centro?

5. Una esfera sólida de radio R y masa M es esféricamente simétrica, pero no uniforme. La densidad ρ, definida como su masa por unidad de volumen, es proporcional a la distancia r medida desde el centro para $r \leq R$. Es decir, $\rho = Cr$ para $r \leq R$, donde C es una constante. Determina: (a) El valor de C; (b) el campo gravitatorio para $r \geq R$; (c) el campo gravitatorio para $r = R/2$.

6. Considera un anillo de radio R y masa M. Determina el valor del campo gravitatorio en un punto situado a una distancia x del centro del anillo a lo largo de la línea perpendicular al plano del anillo que pasa por su centro.

7. Una esfera sólida de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas. Posee una densidad de masa uniforme ρ_0, exceptuando el hecho de que tiene un agujero esférico de radio $r = R/2$ cuyo centro se encuentra en $x = R/2$. Calcula el campo gravitatorio en los puntos del eje que pasa por los centros de la esfera sólida y el hueco esférico que se encuentran a una distancia del centro de la esfera sólida mayor que R. (**Sugerencia:** puede considerarse la cavidad como una esfera de masa $m = 4/3\pi r^3\rho_0$ más una esfera de masa $-m$).

8. Un astronauta detecta desde su nave un pequeño planeta esférico. Después de tomar tierra sobre el planeta, baja de la nave y camina siempre hacia delante, regresando a la posición en la que había dejado la nave después de completar una vuelta de 25 km. El astronauta deja caer un martillo y una pluma de halcón desde una altura de 1.4 m y observa que ambos tardan en caer 29.2 s hasta la superficie. Determina la masa del planeta.

9. Desde la superficie de la Tierra, que tiene un radio R_{T} y una aceleración de caída libre en su superficie igual a g_0, se lanza un cohete en la dirección vertical con una velocidad inicial $v_i = 2\sqrt{R_{\text{T}}g_0}$. Se apagan los motores rápidamente, de manera que el cohete se mueve a partir de ese momento sometido únicamente a la fuerza gravitatoria (ignora el rozamiento y la rotación de la Tierra). Obtén una expresión de v en función de la distancia r al centro de la Tierra y de las constantes R_{T} y g_0.

10. Unos astrónomos detectan un meteorito distante, que se mueve en línea recta a lo largo de una trayectoria que pasa a una distancia $3R_{\mathrm{T}}$ del centro de la Tierra, donde R_{T} es el radio terrestre. ¿Qué velocidad mínima deberá llevar el meteorito para que la gravedad de la Tierra no lo desvíe hasta el punto de chocar con nuestro planeta?

11. Cuatro planetas idénticos están distribuidos en un cuadrado tal como se muestra en la figura 1. Si la masa de cada planeta es M y el lado del cuadrado es a, demuestra que todos siguen una trayectoria circular, y encuentra la velocidad orbital de cada uno de ellos.

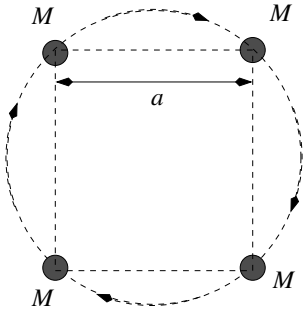

Figura 1: *Problema 11*

12. Como se muestra en la figura 2, se perfora un pozo de pequeño diámetro desde la superficie de la Tierra hasta su centro. (a) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para trasladar un objeto pequeño de masa m desde el centro de la Tierra a su superficie? (b) Si se dejase caer el objeto por la abertura del agujero en la superficie terrestre, ¿con qué velocidad llegaría al centro? (c) ¿Cuál es la velocidad de escape de una partícula de masa m que se lanza desde el centro de la Tierra? Considera en todo momento despreciable el movimiento de rotación de la Tierra, así como la resistencia del aire. Asimismo, considera la Tierra como una esfera uniforme de radio R_{T}.

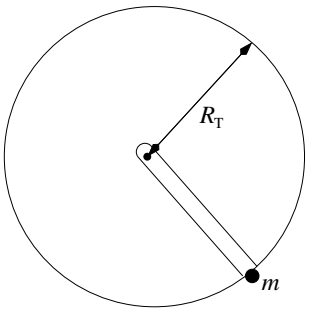

Figura 2: *Problema 12*

13. (*) Calcula el campo gravitatorio en un punto arbitrario de la bisectriz del segmento que une a dos partículas de la misma masa m, separadas una distancia $2a$ y situadas en los puntos $(0, a, 0)$ y $(0, -a, 0)$.

14. (*) Calcula el campo gravitatorio creado por una distribución de masa esférica de masa M y radio R en cualquier punto del espacio.

15. (*) Una esfera uniforme de masa M está cerca de una varilla delgada (espesor nulo) y uniforme de masa m y longitud L, como se indica en la figura 3. Determina la fuerza gravitatoria de atracción ejercida por la esfera sobre la varilla.

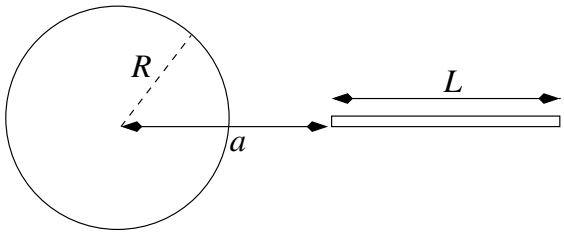

Figura 3: *Problema 15*

16. (*) Determina el trabajo necesario para alejar una partícula de masa m desde una distancia $3R$ a otra $4R$ de una corteza esférica de radio interior R y radio exterior $2R$. La densidad de masa de la corteza esférica (de radio interior R y radio exterior $2R$) es constante e igual a ρ.

17. (*) Un satélite de 500 kg permanece en una órbita circular a una altitud de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido al rozamiento con el aire, el satélite termina por caer sobre la superficie de la Tierra, chocando con el suelo a una velocidad de 2 km/s. ¿Cuánta energía se ha perdido debido al rozamiento?

18. (*) Un satélite se mueve describiendo una órbita elíptica alrededor de la Tierra, como se indica en la figura 4. Las distancias mínima y máxima a la superficie de la Tierra son 400 km 3000 km, respectivamente. Calcula la velocidad del satélite en el apogeo y en el perigeo.

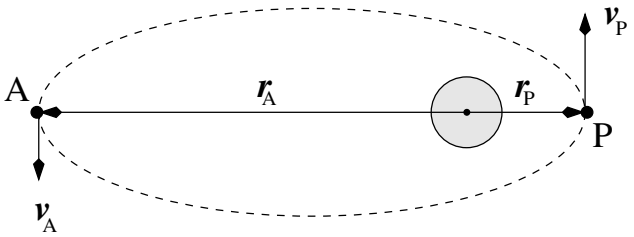

Figura 4: *Problema 18*

19. (*) Muchos satélites se mueven en una trayectoria circular en el plano ecuatorial de la Tierra y están situados a tal altura que siempre permanecen sobre el mismo punto. (a) Determina la altura de estos satélites sobre la superficie terrestre. (b) Explica por qué las señales de estos satélites no pueden llegar directamente a receptores terrestres situados a

latitudes superiores a cierto valor. (c) Determina el valor límite de la latitud del apartado (b).

20. (*) Dos estrellas de masas M y m, separadas una distancia d, describen órbitas circulares en torno a su centro de masas, como se indica en la figura 5. Demuestra que el periodo de rotación de ambas estrellas viene dado por la expresión: $T^2 = \dfrac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$.

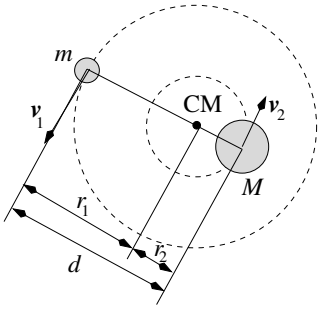

Figura 5: *Problema 20*