I. Teoría de errores

1. Objetivos

Los objetivos de esta práctica son:

- Familiarizar al alumno con la necesidad de calcular el error asociado a todo proceso de medida de una magnitud.
- Aprender cómo se calcula el error asociado a un conjunto de medidas de magnitudes directas e indirectas.
- Aprender el uso del método de *mínimos cuadrados* y cómo puede usarse para determinar (en muchos casos) leyes físicas entre magnitudes.

2. Introducción

En Física –al igual que en otras ciencias experimentales– se define el concepto de *magnitud* como todo aquel observable que puede medirse. Debe recordarse que uno de los objetivos básicos de la Física es, en primer lugar, medir dichas magnitudes (*proceso de experimentación*) y, posteriormente, establecer relaciones (denominadas *leyes físicas*) entre las magnitudes.

El resultado de la medida de una magnitud debe siempre incluir:

- El valor de la medida, o número que asociamos a la magnitud.
- La unidad correspondiente.

Es importante que tengamos en cuenta que, en el caso más general, resulta imposible obtener "el valor verdadero"de la magnitud que medimos. Por ejemplo, sí sería posible obtener el valor verdadero (exacto) de alumnos matriculados en la Universidad de Huelva; sin embargo, resulta imposible obtener el valor verdadero (exacto) de algo tan simple como el tiempo que tarda en caer un objeto desde una altura dada. La prueba está en que si repetimos la medida varias veces, es más que probable que se obtengan valores distintos. En este caso, y a partir del conjunto de medidas realizadas (típicamente denominado *tabla de valores*), tendremos que asignar:

- Un valor promedio, representativo de la medida.
- Una estimación de la inexactitud (que habitualmente se denomina *error*) asociada al conjunto de medidas.

El valor promedio junto con el error constituyen en este caso el valor de la medida, valor que tendrá que completarse con la unidad de la magnitud correspondiente. **Uno de los objetivos de esta práctica es aprender cómo obtener tanto el valor promedio como el error correspondiente asociado a un conjunto de medidas de cualquier magnitud**. Técnicamente, esto se denomina "hacer un análisis de errores.ª partir de una serie de medidas; la disciplina que nos indica cómo efectuar este análisis se conoce como TEORÍA DE ERRORES.

Antes de mostrar los aspectos básicos de la teoría de errores, aclaremos el siginficado del término error (o imprecisión) que hemos presentado anteriormente. Según decíamos, el número de estudiantes de la Universidad de Huelva puede "medirseçon total certeza. El valor que asociamos a esta medida

es el valor exacto, siendo cero el error o imprecisión asociado a la medida. Midamos ahora el tiempo que tarda en caer un cuerpo desde una altura dada (medida que, según dijimos no puede medirse con total certeza). Para ello, podemos repetir el experimento varias veces, obteniéndose una tabla con los valores medidos de t. A partir de esta tabla, tendremos que calcular tanto el valor promedio asignado al tiempo como el error asociado (ya veremos más adelante cómo hacer esto en la práctica). El valor de la medida se expresa en la forma:

valor promedio $\pm$ error (unidades)

Supongamos que el valor de la medida es $t = 2,4 \pm 0,3$ s. Esto nos indica que existe una gran probabilidad de que cualquier medida que efectuemos del tiempo sea un valor comprendido entre $t = 2,4-0,3 = 2,1$ s y $t = 2,4+0,3 = 2,7$ s. Evidentemente, si un grupo A obtiene como resultado de la medida $t = 2,4 \pm 0,3$ s y otro grupo B obtiene el resultado $t = 2,4 \pm 0,1$ s, la calidad de la medida realizada por el grupo B es superior a la del grupo A. Por tanto, no es suficiente con proporcionar el valor promedio de la medida (2,4 s en ambos casos): **es fundamental en toda medida indicar el error o incertidumbre asociado**.

La calidad de la medida suele indicarse mediante el *error relativo*, que se define como el cociente entre el error y el valor promedio. Habitualmente, el anterior cociente se multiplica por cien (error relativo expresado en tanto por ciento). La medida del tiempo del grupo A tiene un error relativo de:

$$\frac{0,3}{2,4} \times 100 = 12,5\,\%$$

mientras que el error relativo de la medida del grupo B sería:

$$\frac{0,1}{2,4} \times 100 = 4,2\,\%$$

La calidad de la medida será tanto mejor cuanto menor sea su correspondiente error relativo.

3. Cifras significativas y redondeo de un número

Supongamos que tenemos un reloj que es capaz de apreciar hasta las décimas de segundo. Una medida del tiempo con este reloj podría proporcionarnos, por ejemplo, el valor $t = 2,4$ s. Si tuviéramos otro reloj de mayor precisión capaz de apreciar hasta las centésimas de segundo, podrían obtenerse valores como, por ejemplo, $t = 2,45$ s:

- En el primer caso, decimos que el número tiene dos *cifras significativas* (el 2 y el 4).
- En el segundo caso, el número tiene tres cifras significativas (el 2, el 4 y el 5).

Es importante observar que los ceros a la izquierda de un número no son cifras significativas, mientras que los ceros a la derecha sí son cifras significativas.

Ejemplo 1.

0,02	$\rightarrow$	una cifra significativa (el 2)
0,020	$\rightarrow$	dos cifras significativas (el 2 y el 0 de la derecha)
2,01	$\rightarrow$	tres cifras significativas (el 2, 0 y el 1)
02,0100	$\rightarrow$	cinco cifras significativas (2, 0, 1, 0 y 0)

Una medida de 2,4 s con el primer reloj nos proporciona un valor con dos cifras significativas; un valor de 2,40 s con el segundo reloj, nos da un valor con tres cifras significativas. Debe quedar claro que ambas medidas, aunque aparentemente iguales, son distintas: $2,4 \neq 2,40$ ya que el número de cifras significativas es distinto. La medida 2,40 s implica una mayor precisión que una medida de 2,4 s.

Debe tenerse cuidado cuando se exprese una medida en distintas unidades: cuando se proceda a un cambio de unidades **la medida debe siempre expresarse con el mismo número de cifras significativas**. Por ejemplo, si el resultado de una longitud es 12 mm (dos cifras significativas), podríamos expresar la medida como:

$$12 \text{ mm} = 1,2 \text{ cm} = 0,012 \text{ m} = 0,000012 \text{ km} = 1,2 \times 10^{-5} \text{ km}$$

En todos los casos, los números están expresados con el mismo número de cifras significativas (dos). Sería incorrecto expresar la medida como 1,20 cm (tres cifras significativas), o como 0,01200 m (cinco cifras significativas). Es conveniente usar la *notación científica* (número decimal comprendido entre 1 y 10 por una potencia de 10) cuando el número es muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, si el tamaño de una partícula es 2,4 μm (dos cifras significativas), expresado en m sería $2,4 \times 10^{-6}$ m. Es más conveniente usar esta notación en lugar de la notación convencional (0,0000024 m).

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} 12{,}7 \text{ mm} &= 1,27 \times 10^{1} \text{ mm} \\ 789{,}4 \text{ kg} &= 7,894 \times 10^{2} \text{ kg} \\ 789{,}400 \text{ kg} &= 7,89400 \times 10^{2} \text{ kg} \\ 0{,}0000270 \text{ s} &= 2,70 \times 10^{-5} \text{ s} \end{aligned}$$

Redondear un dato no es más que expresar dicho dato con el número de cifras significativas deseado. Para ello, habrá que eliminar tantas cifras a la derecha del dato como sea preciso según las siguientes reglas:

- Si la cifra omitida es menor que 5, la cifra anterior permanece inalterada.
- Si la cifra omitida es mayor o igual que 5, la cifra anterior se aumenta en una unidad.

Por ejemplo, el valor $t = 2,538591$ s tiene 7 cifras significativas. Si se quiere redondear a 6 cifras significativas, $t \approx 2,53859$ s; con 5 cifras significativas, $t \approx 2,5386$ s; con 4 cifras significativas, $t \approx 2,539$ s; con 3 cifras, $t \approx 2,54$ s; con 2 cifras, $t \approx 2,5$ s y con una cifra significativa, $t \approx 2$ s.

Es MUY IMPORTANTE que tanto el valor promedio de la medida como el error se expresen con el mismo número de cifras decimales. Como norma general, el error debe expresarse con una o con dos cifras significativas de acuerdo al siguiente criterio:

- **Si las dos primeras cifras significativas del error son menores que 25, el error se expresa con dos cifras significativas.**
- **En caso contrario, el error se expresa con una sóla cifra significativa.**

Por ejemplo si el valor promedio de la distancia del Politécnico a Moguer es de 14,3165 km y el error es de 0,06854 km. Las dos primeras cifras significativas del error son 68 (mayor que 25), por lo que error debe expresarse con una sóla cifra significativa. Tras los redondedos, el resultado de la medida se tiene que expresar como $14,32 \pm 0,07$ km. Obsérvese que tanto el valor promedio (14,32) como el error (0,07) se han expresado redondeados y con el mismo número de cifras decimales.

Si el valor promedio de una masa es $21,351$ g y el error es de 0,175 g, el resultado de la medida tendría que expresarse como $m = 21,35 \pm 0,18$ g; si el error obtenido hubiese sido 0,273, el resultado de la medida se expresaría como $m = 21,4 \pm 0,3$. El valor 0,000003475 $\pm$ 0,0000000176, estaría incorrectamente expresado. La forma correcta sería: $(3,475 \pm 0,018) \times 10^{-6}$.

4. Tipos de errores

Los errores asociados a toda medida pueden deberse a numerosos motivos: limitación impuesta por la precisión de un aparato de medida, defectos de fabricación, limitaciones del propio individuo o del método de medida; también pueden estar relacionados con aspectos probabilísticos asociados al propio proceso de medida.

De forma genérica, podemos clasificar los errores en:

- **errores sistemáticos**, debidos a limitaciones o imprecisiones del aparato y/o del método empleado en la medida. En general, estos errores deben ser evitados o, al menos, reducidos en la medida de lo posible.
- **errores accidentales**, asociados al carácter probabilístico del proceso de medida. Aunque estos errores pueden parecer, en cierta forma, incontrolables (o difícilmente calculables), daremos más adelante algunas normas para poder estimarlos.

En la práctica, usaremos el término **error de una medida** para refererirnos a los errores accidentales asociados a dicha medida. Es decir, supondremos que hemos eliminado los errores sistemáticos.

En ocasiones, también se considera un tercer tipo de errores, los **errores de escala**, y que proporcionan una idea de la precisión del aparato de medida utilizado. Si un cronométro aprecia hasta centésimas de segundo, el error de escala de una medida del tiempo es de 0,01 s; una medida realizada con una regla con subdivisiones de mm, estará afectada de un error de escala de 1 mm.

5. Tipos de medidas

De forma general, podemos clasificar las medidas en **directas** e **indirectas**.

Diremos que una medida es directa cuando el valor se obtiene haciendo uso de algún instrumento de medida apto para dicha magnitud. Por ejemplo, podremos realizar medidas directas del diámetro de un tornillo, de la temperatura de un líquido, del periodo de oscilación de un péndulo, o de la masa de un ladrillo, sin más que utilizar de forma directa un calibre, un termómetro, un cronómetro o una balanza, respectivamente.

Por el contrario, diremos que una medida es indirecta cuando no puede ser obtenida automáticamente mediante un instrumento de medida. Por ejemplo, la medida de la densidad de un sólido, la constante elástica de un muelle, la conductividad de un material o la masa de una molécula de una sustancia. En ninguno de estos casos, disponemos de un aparato capaz de efectuar una medida directa de estas magnitudes. No obstante, siempre podremos efectuar medidas indirectas a partir de la medida directa de algunas magnitudes. Para ello, **debe existir alguna relación** –bien sea a través de una definición o a través de alguna ley física– **que relacione la magnitud indirecta con magnitudes directas**. Por ejemplo, consideremos un cilindro homogéneo de radio R, altura h y masa m; su densidad ρ es función de tres magnitudes directas: m, R y h, esto es, $\rho = \rho(m, R, h)$. A partir

de la definición de densidad (densidad = masa / volumen), la relación matemática entre la magnitud indirecta ρ y las magnitudes directas m, R y h es:

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

A partir de la anterior relación, podremos hacer una medida indirecta de su densidad sin más que hacer medidas directas de m, R y h. En algunos casos (como el anterior) la relación entre las magnitudes es conocida; en otros, por el contrario, es desconocida. Más adelante, veremos procedimientos que nos permiten (en algunos casos sencillos) obtener la relación entre diversas magnitudes a partir de medidas de las mismas.

Según decíamos en la introducción, el resultado de toda medida (sea directa o indirecta) debe incluir tanto el valor promedio asignado a la medida como el error asociado. En la siguiente sección se especifica cómo obtener el valor promedio y el error correspondiente de la medida. Para ello, distinguiremos entre medidas directas e indirectas.

5.1 Medidas directas

Supongamos que pretendemos hacer una medida directa de una magnitud x haciendo uso del instrumento apropiado. En principio, podemos proceder de dos formas:

- **Hacer una única medida**. En este caso, asignamos a la medida el valor apreciado en el instrumento y consideramos que el error de la medida es igual al error de escala del aparato. Por ejemplo, si hacemos una única medida de la masa de un cuerpo con una balanza que aprecia hasta los gramos (error de escala = 1 g) y la lectura de la balanza es 182 g, el valor de la medida asociada a la masa se expresará como $m = 182 \pm 1$ g.
- **Hacer una serie de medidas**. Supongamos que repetimos la medida n veces, obteniéndose los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si los valores obtenidos son siempre iguales, asignamos a la medida dicho valor y le asociamos el error de escala del instrumento. En caso contrario, asociamos a la medida de la magnitud el **valor medio** del conjunto de medidas. Dicho valor medio se define como:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{1}$$

  Por convenio, consideramos que una estimación del error o incertidumbre de la medida viene dada por la **desviación típica media**, que se define como:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n(n-1)}}} \tag{2}$$

  donde $\delta_i = x_i - \bar{x}$ representa la **desviación de la medida i-ésima respecto al valor medio**.

Ejemplo 3.
Pretendemos medir el tiempo que tarda un depósito de agua en vaciarse, utilizando un cronómetro que aprecia hasta décimas de segundo. Para ello llenamos el depósito y lo vaciamos 6 veces, obteniéndose los siguientes valores del tiempo (en s)

t (s)	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
	163,2	162,0	164,5	165,1	163,7	162,8

Lo primero que debemos hacer es obtener el valor medio de la medida, utilizando para ello la expresión (1):

$$\bar{t} = \frac{1}{6}(163,2 + 162,0 + 164,5 + 165,1 + 163,7 + 162,8) = 163,55 \approx 163,6 \text{ s}$$

donde hemos redondeado el valor final **manteniendo el mismo número de cifras significativas que los datos**. Este es el valor promedio que asignaremos a la medida del tiempo de vaciado del depósito. Para calcular el error asociado a la medida, tendremos que obtener la desviación típica media del conjunto de valores a partir de la expresión (2). Para ello, es conveniente hacer la siguiente tabla, en la que calculamos las desviaciones $\delta_i = t_i - \bar{t}$ y los valores de δ_i^2:

t_i (s)	δ_i	δ_i^2
163,2	-0,4	0,16
162,0	-1,6	2,56
164,5	0,9	0,81
165,1	1,5	2,25
163,7	0,1	0,01
162,8	-0,8	0,64

de donde se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{6} \delta_i^2 = 6,43$$

Finalmente, la desviación típica, según (2), viene dada por:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{6,43}{6 \times 5}} = 0,46296... \approx 0,5 \text{ s}$$

El valor asociado a la medida del tiempo de vaciado es entonces:

$$\boxed{\bar{t} = 163{,}6 \pm 0{,}5 \text{ s}}$$

Este resultado indica que existe una gran probabilidad de que una medida del tiempo de vaciado del depósito nos dé un valor comprendido entre $163,6 - 0,5$ s y $163,6 + 0,5$ s.[1] Este resultado puede también expresarse en la forma $\bar{t} = 163,6$ s con un error (relativo) del 0,3 % $(0,5/163,6 \times 100)$.

5.2 Medidas indirectas

Supongamos que queremos medir una magnitud f que depende de varias (N) magnitudes x_1, x_2,.., x_N y que éstas pueden ser medidas de forma directa. Según decíamos anteriormente, debe existir una relación entre las variables, relación que expresamos genéricamente como $f = f(x_1, x_2, ..., x_N)$. La magnitud f puede ser, por ejemplo, el área de una lámina triangular, en cuyo caso $N = 2$ y las magnitudes $x_1 \equiv b$ y $x_2 \equiv h$ representan la base y la altura de la lámina, siendo la relación entre las magnitudes de la forma:

$$f(b, h) = \frac{bh}{2}$$

[1] Según la teoría de errores, si los datos estuviesen distribuidos según una curva gaussiana, dicha probabilidad sería del 68,3 %. En este caso, el valor medio de la medida coincidiría con el valor más probable de la distribución gaussiana y el valor de σ_t con la dispersión de la distribución.

O bien, f puede ser la densidad de un cilindro: en este caso, $N = 3$ y las magnitudes $x_1 \equiv m$, $x_2 \equiv R$ y $x_3 \equiv h$ corresponden a la masa, radio y altura del cilindro, siendo la relación entre las magnitudes de la forma:

$$f(m, R, h) = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Por convenio, asociamos a la medida indirecta de la magnitud f el valor:

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) \tag{3}$$

donde $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ representa el valor medio de la magnitud x_i.

Por convenio, consideramos que una estimación del error o incertidumbre de la medida de f viene dada por:

$$\boxed{\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 \sigma_{x_N}^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \tag{4}$$

La expresión anterior se conoce como **fórmula de propagación de errores** y nos permite obtener el error asociado a una medida indirecta a partir de los errores asociados a medidas directas.[2]

En la práctica, tendremos una tabla de medidas (directas) para cada una de las magnitudes x_i, tablas a partir de las que calcularemos los valores medios, $\bar{x}_i$, y los errores, σ_{x_i}, asociados a cada una de las medidas directas siguiendo el procedimiento dado en la sección §4.1. Al sustituir los valores de $\bar{x}_i$ en la expresión (3), se obtiene el valor promedio de f; finalmente, sustituyendo los valores de σ_{x_i} en (4), se obtiene el error asociado a la medida de f. El resultado final asociado a la medida (indirecta) de f lo expresaremos en la forma:

$$\bar{f} \pm \sigma_f \text{ (unidades)}$$

Ejemplo 4.

Queremos medir el volumen V de un cilindro, haciendo para ello una serie de medidas (directas) del radio, R, y de la altura, h. Los valores medidos se recogen en las siguientes tablas:

R (mm)	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
	12,6	12,3	12,2	12,4	12,2

h (mm)	h_1	h_2	h_3	h_4
	67,4	67,9	67,6	67,3

La relación entre V y las magnitudes R y h es

$$V = \pi R^2 h \tag{5}$$

Obtengamos el valor medio de R ($n = 5$ datos):

$$\bar{R} = \frac{1}{5}(2 \times 12,2 + 12,6 + 12,3 + 12,4) = 12,34 \approx 12,3 \text{ mm}$$

y el valor medio de h ($n = 4$ datos):

$$\bar{h} = \frac{1}{4}(67,4 + 67,9 + 67,6 + 67,3) = 67,55 \approx 67,6 \text{ mm}$$

Calculamos el error (desviación típica) asociado a R, siendo $\delta_i = R_i - \bar{R}$,

[2] En la fórmula de propagación de errores aparecen las *derivadas parciales* de f. En el apéndice A se dan algunas indicaciones básicas sobre el concepto de derivada parcial y su cálculo.

R_i (mm)	δ_i	δ_i^2
12,6	0,3	0,09
12,3	0	0
12,2	-0,1	0,01
12,4	0,1	0,01
12,2	-0,1	0,01

de donde se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{6} \delta_i^2 = 0,12$$

y la desviación típica, según (2), viene dada por:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{0,12}{5 \times 4}} = 0,07746... \approx 0,1 \text{ mm}$$

Calculamos el error (desviación típica) asociado a h, siendo $\delta_i = h_i - \bar{h}$:

h_i (mm)	δ_i	δ_i^2
67,4	-0,2	0,04
67,9	0,3	0,09
67,6	0	0
67,3	-0,3	0,09

de donde se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{6} \delta_i^2 = 0,22$$

y la desviación típica, según (2), viene dada por:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{0,22}{4 \times 3}} = 0,1354... \approx 0,1 \text{ mm}$$

Por tanto, las medidas directas del radio y la altura proporcionan los valores:

$$\bar{R} = 12,3 \pm 0,1 \text{ mm} \qquad \bar{h} = 63,6 \pm 0,1 \text{ mm}$$

El valor medio del volumen es:

$$\bar{V} = \pi \bar{R}^2 \bar{h} \qquad \bar{V} = \pi (12,3)^2 \times 63,6 = 30228,54274 \ldots \text{ mm}^3$$

Para obtener el error en el volumen, aplicamos la fórmula de propagación de errores, teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 2\pi Rh \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 2\pi \bar{R}\bar{h}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = \pi R^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = \pi \bar{R}^2$$

Sustituyendo en (4):

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 = 4\pi^2 (\bar{R})^2 \, \bar{h}^2 \sigma_R^2 + \pi^2 \bar{R}^4 \sigma_h^2$$

Operando, se obtiene que $\sigma_V = 493,8 \text{ mm}^3$. El resultado final se expresa:

$$\boxed{\bar{V} = 30,2 \pm 0,5 \text{ cm}^3}$$

siendo el error relativo de la medida del 1,7 %.

6. Ajuste de datos por el método de mínimos cuadrados

En el apartado anterior hemos visto la forma de obtener el valor experimental de una magnitud a partir de la medida de un conjunto de magnitudes. En este apartado abordamos un problema más general: determinar la relación funcional entre dos variables x e y midiendo ambas experimentalmente. El caso más sencillo corresponde a la situación en la que exista una relación lineal entre las variables x e y.

Puede ser que sepamos de antemano que tiene que existir dicha relación lineal entre las variables. En un experimento en el que un móvil realiza un movimiento rectilíneo uniforme, realizamos una serie de medidas del espacio recorrido, s_i, en diversos intervalos de tiempo, t_i. En este caso, sabemos que las magnitudes espacio recorrido y tiempo satisfacen la relación lineal $s = v\,t$. Puede ocurrir también que no sepamos de antemano que existe dicha relación lineal, pero observemos que al representar gráficamente el conjunto de medidas experimentales, los datos se distribuyen, aproximadamente, de forma rectilínea.

Consideremos que efectuamos una serie de medidas de las magnitudes x e y, y que al representar gráficamente los pares de puntos (x_i, y_i) observamos que se distribuyen, aproximadamente, a lo largo de una recta, es decir, que:

$$y = a + bx \tag{6}$$

Se denomina **ajuste por mínimos cuadrados** a la obtención de los parámetros a (ordenada en el origen) y b (pendiente) de la recta anterior a partir de los pares de puntos obtenidos experimentalmente. La recta anterior se denomina **recta de regresión**.

Dado un conjunto de n datos $\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, el ajuste por mínimos cuadrados implicará obtener las siguientes cantidades:

1. La ordenada en el origen (a) y la pendiente de la recta de regresión (b), dadas por las expresiones:

$$\boxed{a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \boxed{b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{7}$$

2. Los errores asociados a la ordenada en el origen (σ_a) y a la pendiente de la recta de regresión (σ_b), dados por las expresiones:

$$\boxed{\sigma_a^2 = \left(\frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2)}\right) \times \left(\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\right)} \tag{8}$$

$$\boxed{\sigma_b^2 = \left(\frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2)}\right) \times \left(\frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\right)} \tag{9}$$

3. El valor del coeficiente de correlación (r), dado por la expresión:

$$\boxed{r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]\,[n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}} \tag{10}$$

   y que representa una medida de la calidad del ajuste. El valor absoluto de dicho coeficiente varía entre 0 y 1. Un valor de $|r|$ cercano a la unidad, nos indica que el conjunto de datos está bien representado por una relación lineal (tanto mejor, cuanto más cercano a la unidad). Por el contrario, un valor cercano a cero, indica que las magnitudes x e y no están bien representadas por una relación lineal.

En términos prácticos, cuando tengamos que ajustar un conjunto de datos por el método de mínimos cuadrados, tendremos que seguir los siguientes pasos:

1. Representar gráficamente el conjunto de datos experimentales. **IMPORTANTE**: Si nos dicen que representemos los valores de una magnitud A frente a los valores de otra B, la primera (A) se representa en el eje vertical y la segunda (B) en el eje horizontal.

2. Comprobamos (a simple vista) si el conjunto de puntos representados se distribuyen, aproximadamente, a lo largo de una recta. Si es así, podremos continuar implementando el método.

3. Obtener **todos** los sumatorios implicados en las expresiones anteriores. Se debe indicar por escrito el valor de cada uno de los sumatorios calculados. [3]

4. Obtener los valores de la ordenada en el origen y la pendiente de la recta de regresión, así como los errores asociados a los mismos. Dichos valores se expresarán en la forma:

$$a \pm \sigma_a \text{ (unidades)} \qquad b \pm \sigma_b \text{ (unidades)}$$

5. Representar en la gráfica la recta de regresión $y = a + bx$.

6. Obtener el coeficiente de correlación del ajuste.

Ejemplo 5.

Un móvil se desplaza en línea recta siguiendo un movimiento uniforme (v constante) y pretendemos medir la velocidad del móvil. Para ello, medimos la distancia recorrida por el móvil en distintos instantes de tiempo, obteniéndose los datos recogidos en la siguiente tabla:

s (m)	1,0	3,0	4,5	6,0	7,8	9,9	11,5	14,0
t (s)	1	2	3	4	5	7	8	9

Por ser el movimiento rectilíneo y uniforme, sabemos que la relación que existe entre el espacio (s) y el tiempo (t) es de la forma $s = v\,t$, por lo que una representación gráfica de s_i frente a t_i debe mostrar, dentro del error experimental, un comportamiento lineal.

Sea $s = a + bt$ la correspondiente recta de regresión y apliquemos el método de mínimos cuadrados al conjunto anterior de datos ($n = 8$). Calculamos, en primer lugar, los sumatorios necesarios para obtener la ordenada en el origen y la pendiente:

$$\begin{aligned} \sum x_i &\equiv \sum t_i = 39 \\ \sum x_i^2 &\equiv \sum t_i^2 = 249 \\ \sum y_i &\equiv \sum s_i = 57,7 \\ \sum x_i y_i &\equiv \sum t_i s_i = 370,8 \end{aligned}$$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{57,7 \times 249 - 39 \times 370,8}{8 \times 249 - (39)^2} = -0,1994\ldots \text{ m}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{8 \times 370,8 - 39 \times 57,7}{8 \times 249 - (39)^2} = 1,520\ldots \text{ m/s}$$

[3] Debe tenerse cuidado y observar la diferencia que existe entre $\sum x_i^2$ y $(\sum x_i)^2$.

El error en los valores de a y b se obtiene aplicando las expresiones (8) y (9), para lo que debemos obtener primero el valor de $\sum(y_i - bx_i - a)^2$. Usando los valores de a y b calculados anteriormente, se llega a que:

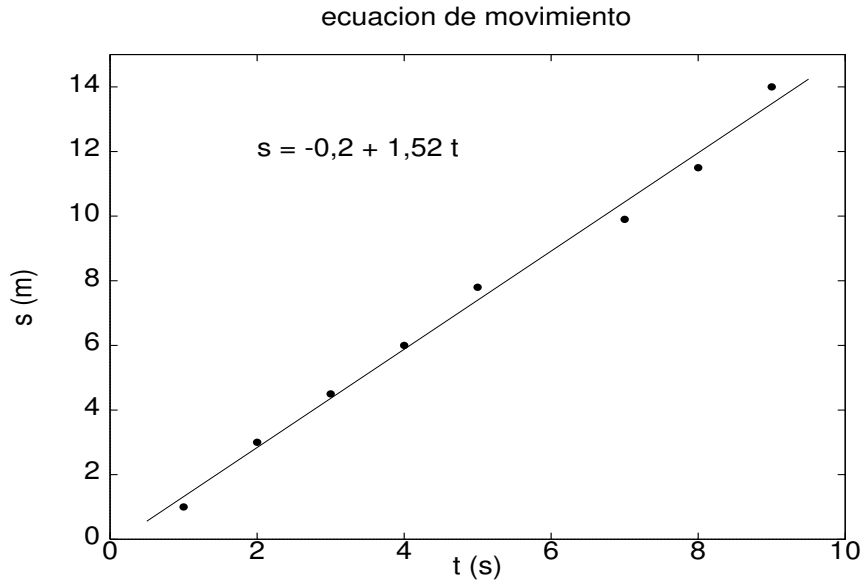
$$\sum(y_i - bx_i - a)^2 \equiv \sum(s_i - bt_i - a)^2 = 1,0956\ldots$$

de donde llegamos a que:

$$\sigma_a^2 = 0,0965\ldots; \quad \sigma_b^2 = 0,0031015\ldots \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_a \approx 0,31 \text{ m}; \quad \sigma_b \approx 0,056 \text{ m/s}$$

Por tanto, los valores de la ordenada en el origen, de la pendiente y la recta de regresión son:

$$\boxed{a = -0,2 \pm 0,3 \text{ m}} \qquad \boxed{b = 1,52 \pm 0,06 \text{ m/s}} \qquad \boxed{s = -0,2 + 1,52\, t} \tag{11}$$



La velocidad del móvil (pendiente de la recta) es, por tanto, $v = 1,52 \pm 0,06$ m/s. Por último, obtenemos el coeficiente de regresión del ajuste. Necesitamos calcular, previamente, los valores medios $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$$\bar{x} \equiv \bar{t} = \frac{\sum t_i}{n} = 4,875\ldots \text{ s} \qquad \bar{y} \equiv \bar{s} = \frac{\sum s_i}{n} = 7,212\ldots \text{ m}$$

A partir de estos valores, tendremos que tabular los valores de $(x_i - \bar{x})$, los de $(y_i - \bar{y})$, los de $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, los de $(x_i - \bar{x})^2$ y los de $(y_i - \bar{y})^2$, obteniéndose que:

$$\sum(t_i - \bar{t})(s_i - \bar{s}) = 89,5122\ldots \tag{12}$$

$$\sum(t_i - \bar{t})^2 = 58,8748\ldots \tag{13}$$

$$\sum(s_i - \bar{s})^2 = 137,1887\ldots \tag{14}$$

por lo que, finalmente, usando la expresión (10):

$$r = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(s_i - \bar{s})}{\sqrt{\sum(t_i - \bar{t})^2 \sum(s_i - \bar{s})^2}} = \frac{89,5122}{\sqrt{58,8748 \times 137,1887}} = 0,9960\ldots$$

valor que, al ser muy próximo a la unidad, nos indica que los datos experimentales del espacio y el tiempo siguen una relación lineal.

7. Obtención de leyes físicas

En numerosas situaciones desconocemos la relación que existe entre dos o más magnitudes físicas. Por ejemplo, tal y como se verá durante el curso, la conductividad (σ) de los portadores de carga en un semiconductor depende de la temperatura, es decir, $\sigma = \sigma(T)$, pero la dependencia funcional es, *a priori*, desconocida. Una forma de proceder, sería hacer un conjunto de medidas de σ a distintas temperaturas y a partir de las medidas intentar encontrar alguna relación matemática entre las magnitudes σ y T. En la situación general, tendremos dos magnitudes x e y medibles de forma directa o indirecta: **encontrar una ley física entre dichas magnitudes consiste en averiguar la forma funcional que relaciona dichas magnitudes.**

Una vez efectuadas las medidas de las magnitudes x e y, el primer paso consiste en representar gráficamente los datos experimentales. En numerosas ocasiones, una simple inspección de dicha representación puede servir de gran ayuda. Por ejemplo, podremos comprobar visualmente si los datos pueden ser representados por una recta, en cuyo caso, la ley física que relaciona ambas magnitudes será de la forma $y = a + bx$ (**relación lineal**). Los valores de a y b (y sus correspondientes errores) podrían entonces ser fácilmente calculados empleando el método de mínimos cuadrados.

No obstante, existen numerosas situaciones prácticas en las que la relación entre las magnitudes x e y no es lineal. Si éste es el caso, hay que proceder con algo de intuición. Por ejemplo, podemos intentar comprobar si la relación existente entre las magnitudes x e y es una **relación potencial** del tipo:

$$y = Ax^B$$

expresión que es equivalente a:

$$\ln y = \ln A + B \ln x$$

por lo que una representación gráfica de los valores de $\ln y$ frente a los valores de $\ln x$ debe ser una recta. A partir de un análisis por mínimos cuadrados del conjunto de datos $(\ln x_i, \ln y_i)$, obtendríamos los valores de la ordenada en el origen, $a \equiv \ln A$ (y a partir de aquí, $A = \mathrm{e}^a$), y de la pendiente $b \equiv B$. Por último, tendríamos que calcular los errores en A y B (σ_A y σ_B) a partir de los errores en a y b (σ_a y σ_b). [4]

Si sospechamos que la relación entre las variables x e y es una **relación exponencial**, esto es:

$$y = A\,\mathrm{e}^{Bx}$$

se tendrá que:

$$\ln y = \ln A + Bx$$

[4] Evidentemente, se tiene que $\sigma_B = \sigma_b$. Se deja al alumno que calcule el valor de σ_A a partir del valor de σ_a (utilizar, para ello, la fórmula de propagación de errores).

en cuyo caso, la representación gráfica de los valores de $\ln y_i$ frente a los valores de x_i debe ser, aproximadamente, lineal. Un estudio por mínimos cuadrados de los valores de $(x_i, \ln y_i)$ nos permitirá obtener los valores de la ordenada en el origen, $a = \ln A$ (de donde $A = \mathrm{e}^a$), y de la pendiente en el origen ($b = B$). A partir de los errores en la ordenada en el origen y de la pendiente, σ_a y σ_b, podremos calcular σ_A y σ_B.

Ejemplo 1.

Pogamos por caso que tratamos de establecer la relación entre el espacio, s, recorrido por un móvil y el tiempo, t en un movimiento rectilíneo. Podríamos intentar un ajuste de los datos a una expresión de la forma:

$$s = At^B$$

expresión que podemos reescribir en la forma:

$$\ln s = \ln A + B \ln t$$

y que nos indica que $\ln s$ frente a $\ln t$ es una recta de ordenada en el origen $a \equiv \ln A$ (de donde obtendríamos el valor de A, siendo $A = \mathrm{e}^a$) y con pendiente $b \equiv B$. Haciendo un análisis de los datos (x_i, y_i), con $x_i = \ln t_i$ e $y_i = \ln s_i$, podemos obtener a y b (y sus correspondientes errores). De esta forma, si resulta $B \approx 1$, el movimiento resulta ser uniforme (v constante), pudiendo obtenerse del análisis anterior el valor de la velocidad. Por otra parte, si obtenemos $B \approx 2$, el movimiento es uniformemente acelerado, siendo la aceleración = 2 A.

Apéndice A. Derivadas parciales

En la fórmula de propagación de errores tenemos que hacer uso de *derivadas parciales*. En este apéndice, presentamos el concepto básico de derivada parcial (sin profundizar en detalles matemáticos), su significado físico y cómo se obtiene.

Consideremos una función f que depende de una variable, x, es decir, $f = f(x)$. La derivada de la función f respecto a la variable x es otra función de la variable x, definida como:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y que nos da información sobre cómo varía la función f ante pequeñas variaciones (infinitesimales) de la variable x. A partir de la definición anterior pueden obtenerse todas las reglas de derivación de funciones con las que el alumno debe estar familiarizado. Por ejemplo, si consideramos la función $f(t) = at^2 - b\sqrt{t}$, donde a y b son constantes, se tiene que:

$$\frac{df}{dt} = 2at - \frac{b}{2\sqrt{t}}$$

En el caso más general, la función f no dependerá de una sóla variable, sino de varias, dependencia que simbolizamos como $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En este caso, decimos que f es una función de n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, la densidad de un cilindro es una función de tres variables (m, R y h), de forma que:

$$\rho = \rho(m, R, h) = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Dada una función f de n variables, se pueden definir n funciones que nos indiquen la variación de la función f ante pequeñas variaciones (infinitesimales) de una de las variables *permaneciendo las restantes variables constantes*. Así, si una función f depende de tres variables $f = f(x, y, z)$, podemos definir las funciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial z};$$

denominadas, respectivamente, *derivadas parciales de* f respecto a x, y, y z. Al igual que la derivada de una función de una variable depende, en general, de la variable, se tiene que las derivadas parciales de una función de varias variables dependen, en general, de todas las variables. En el caso anterior, se tiene que cada una de las derivadas parciales serán a su vez funciones de x, y y z.

Formalmente, la definición de derivada parcial es análoga a la definición de derivada de una función de una variable. Así, si $f = f(x, y, z)$, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En la práctica, para obtener la derivada parcial de una función respecto a una variable (la x, por ejemplo), bastará aplicar las reglas habituales de derivación a la función f *como si fuese una función sólo de la variable* x*: el resto de las variables se consideran como constantes en el cálculo.*

Ejemplo A.1

Para el cálculo del error de la densidad de un cilindro tenemos que obtener las derivadas parciales de ρ respecto a las tres variables de las que depende dicha función. Teniendo en cuenta la forma de $\rho(m, R, h)$:

$$\rho(m, R, h) = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{\pi R^2 h}$$

donde simplemente hemos derivado respecto m considerando que tanto R como h son constantes. De igual forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{-2m}{\pi R^3 h}$$

donde hemos derivado respecto a R considerando que tanto m como h son constantes; por último:

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{-m}{\pi R^2 h^2}$$

donde hemos derivado ρ respecto a h considerando que m y R son constantes. Obsérvese que las derivadas parciales son funciones que dependen de las mismas variables que la función que se deriva.