INGENIERÍA QUÍMICA
1er curso

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

PRÁCTICA 3

ESTUDIO DEL PÉNDULO SIMPLE

Departamento de Física Aplicada
Escuela Politécnica Superior de la Rábida.

III. Péndulo simple

1. Objetivos

- Estudiar la dependencia entre el periodo de oscilación y:
  - (a) la amplitud del movimiento.
  - (b) la masa del péndulo.
  - (c) la longitud del péndulo.
- Medir el valor de la aceleración de la gravedad.

2. Fundamento teórico

Un *péndulo* es un sistema material que consiste en un hilo de longitud L y masa M, suspendido verticalmente por uno de sus extremos y del que pende, por el extremo opuesto, una masa m. Un caso particular es el denominado *péndulo simple*. Un péndulo se dice que es simple bajo los siguientes supuestos:

- El hilo es inextensible (no se alarga ni se comprime su longitud durante el movimiento) y su masa es despreciable frente a m (por lo que consideramos $M = 0$).
- Las dimensiones de m son despreciables frente a la longitud del hilo, por lo que se considera que m es puntual.

El péndulo simple, por tanto, es un modelo idealizado (simplificado) de un sistema más complejo. La situación de equilibrio corresponde a la posición vertical, posición en la que la tensión de la cuerda es igual al peso. Si separamos el sistema de su posición de equilibrio un cierto ángulo ϕ_0 y soltamos el péndulo (con velocidad inicial nula), el sistema describe un movimiento periódico. Suele utilizarse la coordenada angular ϕ para fijar la posición del péndulo en cualquier instante (dicho ángulo se mide respecto a la posición de equilibrio), por lo que si bien ϕ depende del tiempo, se verifica que en cualquier instante $|\phi| \leq \phi_0$. Si la resistencia con el aire fuera despreciable y si en el punto O de suspensión el rozamiento con el hilo fuera despreciable, la *amplitud del movimiento* (máxima separación angular respecto a la posición de equilibrio) no variaría durante el movimiento y sería igual al valor inicial ϕ_0.

Analicemos el movimiento del péndulo. Las dos únicas fuerzas que actúan son la tensión y el peso. Aplicando la segunda ley de Newton y usando los ejes normal y tangencial para descomponer los vectores, se tiene que:

$$T - mg\cos\phi = ma_n \tag{1}$$

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\phi = ma_t \tag{2}$$

donde a_t y a_n corresponden a las componentes tangencial y normal de la aceleración. Dado que m describe un arco de circunferencia de radio l y, recordando que la aceleración tangencial es la aceleración angular (α) por el radio, la ecuación (2) equivale a:

$$\alpha = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{3}$$

Recordemos que un cuerpo realiza un *movimiento armónico simple* (MAS) si la aceleración es proporcional (y de signo contrario) a la correspondiente coordenada que determina la posición:

$$\text{aceleracion} = -\omega^2 \times \text{posicion} \tag{4}$$

donde ω es una constante característica del MAS denominada *frecuencia angular* del movimiento. Según (3), el péndulo **no** realiza un MAS, ya que la aceleración angular no es proporcional al ángulo, sino al seno del ángulo. Sin embargo, si ϕ es suficientemente pequeño, se verifica la aproximación $\mathrm{sen}\,\phi \approx \phi$ (donde ϕ

debe ir expresado en radianes). Cuando esta aproximación es válida, se dice que el péndulo se encuentra en el *límite de pequeñas oscilaciones*.[1] En dicha situación, se verifica entonces:

$$\alpha = -\frac{g}{l}\phi \tag{5}$$

Por tanto, **dentro del límite de pequeñas oscilaciones, el péndulo simple describe (aproximadamente) un MAS**. Según la expresión (5), la frecuencia angular del movimiento viene dada por:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6}$$

y el *periodo de las oscilaciones*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{7}$$

Por tanto, el periodo de las oscilaciones de un péndulo simple sólo depende de la longitud del hilo y del valor local de la aceleración de la gravedadr, $T = T(l, g)$. Esta afirmación es cierta siempre que podamos aproximar el movimiento del péndulo por un MAS, es decir, siempre que las oscilaciones sean suficientemente pequeñas.

En una situación real (tamaño de la masa no despreciable, rozamientos no despreciable, ángulos de oscilación grandes, etc.) la expresión del periodo es más compleja y dependerá, además, de m y del ángulo inicial ϕ_0. La dependencia del periodo respecto a estas variables no es trivial y se estudiará de forma experimental a lo largo de esta práctica.

3. Material

- Pies soporte para varillas largas (2) y corta (1).
- Portanueces.
- Fotocélulas para cronometraje (precisión hasta milésima de segundo).
- Hilo fino y resistente ($L = 1.5$ m).
- Esferita metálica con gancho o sistema para fijar el hilo.
- Portapesas y juego de pesas.
- Cinta métrica graduada en mm.
- Transportador de ángulos.

4. Procedimiento práctico

Para estudiar la (posible) dependencia del periodo de las oscilaciones respecto a la masa m y el ángulo inicial ϕ_0 utilizamos la técnica denominada *de control de variables*. Dado que el periodo, en la situación más general, dependerá de varias magnitudes (l, g, m y ϕ_0), para estudiar la dependencia con una variable se mantienen fijas todas las magnitudes restantes. Seguiremos los siguientes pasos:

a) <u>Montaje</u>

1. Montar los soportes de varilla con el péndulo colgado de su punto de oscilación cerca del borde de la mesa de trabajo de forma que pueda oscilar sin estorbos incluso para oscilaciones y longitudes grandes.

[1] Para $\phi = 10° = 0.17453$ rad, la aproximación $\operatorname{sen}\phi \approx \phi = 0.174533$ supone un error del 0.5% respecto al verdadero valor $\operatorname{sen}\phi = 0.17365$; a medida que aumenta ϕ, la aproximación, obivamente, empeora. Para $\phi = 15° = 0.26180$ rad, la aproximación $\operatorname{sen}\phi \approx \phi = 0.26180$ supone un error del 1.1% respecto al valor exacto.

2. Montar el sistema de detección de oscilaciones de forma que no entorpezca las mismas para ángulos elevados (unos 70°).
3. Colocar el transportador de ángulos en el soporte del péndulo de forma que se puedan medir cómodamente los ángulos de oscilación.

b) Medida del periodo de las oscilaciones

1. Para unas condiciones dadas, las oscilaciones del péndulo deben hacerse de forma tal que:
   – el péndulo esté tenso;
   – la velocidad inicial sea nula;
   – las oscilaciones se realicen en un plano que no varíe durante las medidas.

   Si no se verifican las condiciones anteriores, detener las oscilaciones y repetir la medida correspondiente.
2. Una vez conectada la célula a la red, y una vez que el péndulo oscile, el contador registra valores de tiempo de paso del hilo por la vertical. **La diferencia, Δt registrada entre dos pasos consecutivos por la vertical corresponde a un semiperiodo**, por lo que el periodo de las oscilaciones es $T = 2\Delta t$.
3. Se debe dejar que el péndulo realice varias oscilaciones completas (4 ó 5 para ángulos inferiores a 30° y sólo 2 oscilaciones para ángulos superiores) con objeto de que el péndulo se estabilice. Una vez estabilizado, se procede a la toma de datos del periodo.

4.1 Dependencia del periodo con la amplitud inicial

Mantenemos fijas todas las variables de las que puede depender el periodo de las oscilaciones, y variamos ϕ_0. El valor de g también se supone fijo y de valor $g = 9.81$ m/s^2.

1. Mide (y anota) el valor de la masa m de la esferita.
2. Mide (y anota) el valor de la longitud l del péndulo. Dicha distancia corresponde a la distancia desde el punto de suspensión al centro de la esfera.
3. Determina el valor de T para los valores de ϕ_0 indicados en la tabla.

   m(g) = l(cm) =

ϕ_0 (°)	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70
T(ms)										

4. Representa gráficamente el valor experimental del periodo frente al valor del ángulo (expresado en radianes). A la vista de los resultados, comenta si T depende de ϕ_0 y, si es así, bajo qué condiciones. Discute los resultados.

4.2 Dependencia del periodo con la masa del péndulo

Para determinar la posible dependencia de T con m, mantenemos fijas todas las magnitudes y variamos el valor de m. Por tanto ahora fijamos la longitud del péndulo (por comodidad, sigue utilizando el mismo valor de l que en la sección anterior), el valor de g (mismo valor que antes) y el ángulo inicial ϕ_0 (elige un valor cualquiera de entre los que considerastes en la sección anterior). **Anota el valor de ϕ_0 con el que vayas a trabajar**.

1. Sustituye la bolita por el portapesas vacío ($m = 5$) y determina el periodo.
2. Repite la operación añadiendo sucesivamente pesas (de 5 g) en el portapesas.

3. Determina el periodo de las oscilaciones para los valores de m indicados en la tabla. **Anota en cada caso el valor de m empleado**.

   l(cm) = $\phi_0(°)$ =

masa	bolita	Porta	Porta + 1 pesa	Porta + 2 pesas	Porta + 3 pesas
m (g)					
T (ms)					

4. Representa el valor experimental del periodo T frente a la masa del péndulo. A la vista de la gráfica obtenida, ¿depende el periodo de la masa? Discute este punto teniendo en cuenta el valor de ϕ_0 que hayas considerado (es decir, si los datos se han obtenido o no dentro del límite de pequeñas oscilaciones).

4.3 Dependencia del periodo con la longitud del péndulo y determinación del valor de g

Para determinar la posible dependencia de T con l, mantenemos fijas la masa del péndulo (m) y el ángulo inicial (ϕ_0) e iremos midiendo el valor de T para distintos valores de l.

1. Quita el portapesas y trabaja con la esferita (que no se te olvide apuntar el correspondiente valor de m).
2. **Considera siempre un valor inicial de ϕ_0 dentro del límite de pequeñas oscilaciones**, es decir, **considera siempre un valor $\phi_0 < 15°$.**
3. Comienza con un valor $l \approx 30$ cm.
4. Mide el valor de l (en cm) con la mayor precisión posible. **El valor de l corresponde a la distancia desde el punto de suspensión al centro de la esferita.**
5. Mide el periodo de las oscilaciones (valor medio obtenido a partir de 5 medidas).
6. Incrementa la longitud del hilo (en unos 10 cm), mide con precisión la nueva longitud y vuelve a medir el periodo de las oscilaciones. Toma medidas para las longitudes incluidas en la siguiente tabla. **Recuerda que hay que permitir que el péndulo realice primero varias oscilaciones para que se estabilice antes de anotar la lectura**.

l aprox (mm)	300	400	500	600	700	800	900	1000
l real (mm)								
T_1 (ms)								
T_2 (ms)								
T_3 (ms)								
T_4 (ms)								
T_5 (ms)								
T (ms)								
σ_T (ms)								

7. Dado que los datos han sido tomado para valores pequeños de ϕ_0, esperamos que se verifique la relación (7). Según la expresión teórica (7), ¿qué tipo de relación esperas encontrar entre T^2 y l?
8. Representa gráficamente los valores experimentales de T^2 frente a los valores (reales) de l. A la vista de la gráfica ¿se verifica experimentalmente la relación teórica?
9. Realiza un análisis completo por mínimos cuadrados de los valores de T^2 frente a los de l, determinando la pendiente, ordenada en el origen (con sus errores correspondientes) y el coeficiente de correlación.

10. A partir del valor de la pendiente obtenido en el apartado anterior, determina el valor experimental de la aceleración de la gravedad (por supuesto, con su error correspondiente).

11. ¿Tiene sentido el valor de g que has obtenido experimentalmente? Discute las posibles causas relacionadas con el montaje experimental por las que el valor que hayas obtenido no coincida con el valor que todos conocemos de g. (Desde luego, no esperes obtener el valor esperado de 9.81 m/s^2: al grupo que le salga esto le invito a cerveza con derecho a tapa ....)