1. Objetivos.

a) Comprobar la relación entre el momento que actúa sobre un péndulo de torsión y el ángulo girado: constante de torsión.

b) Comprobar la relación que existe entre el momento de inercia del cuerpo que oscila y la constante de torsión.

c) Calcular el momento de inercia de varios cuerpos a partir de la relación anterior.

d) Comprobar el Teorema de *Steiner*.

e) Calibrado de un péndulo de torsión.

2. Fundamento teórico.

La *ecuación fundamental de la dinámica de la rotación* establece que el momento externo (M) que actúa sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo es proporcional a la aceleración angular (") que le produce, denominándose a dicha constante *momento de inercia* (I) del cuerpo respecto a dicho eje.

$$M = I\,\alpha$$

El momento de inercia se puede calcular como la suma de los productos de todos los elementos de masa *dm* del cuerpo por el cuadrado de su distancia *r* al eje de giro.

$$I = \int r^2\, dm$$

Si el cuerpo se puede descomponer en otros más simples, el momento de inercia resultante será la suma de los momentos de inercia de cada uno de los cuerpos simples en los que se descompuso, ya que es una cantidad aditiva.

Hacia 1779, Coulomb abordaba el estudio del péndulo de torsión con ocasión de estar buscando la mejor técnica para la brújula marina. En esencia, el *péndulo de torsión* está formado por un hilo "inextensible", anclado en un extremo, mientras que en el otro extremo cuelga de él un cuerpo físico con un momento de inercia determinado.

Si se aplica un momento al péndulo de torsión el alambre se retuerce y reacciona *elásticamente* con un momento recuperador en sentido contrario al aplicado, denominado *momento de torsión.* Para ángulos de torsión de pequeña amplitud, el valor del momento **M** es proporcional al ángulo 2 girado por el extremo desde la posición de equilibrio, de modo que se cumple

$$\vec{M} = -\,K\,\vec{\theta}$$

Al suprimir el par externo aplicado, el par recuperador hace oscilar el sistema. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación se demuestra que es un *movimiento armónico simple*, cuyo período T es igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

Si al cuerpo de oscilación, cuyo momento de inercia es I_o, le añadimos otro cuerpo de momento I' respecto al mismo eje de rotación, y debido a que los momentos de inercia son aditivos, el nuevo período T' valdrá

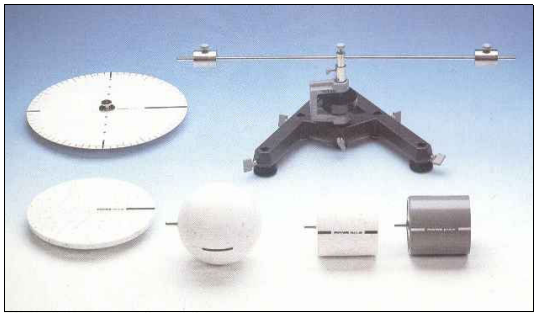
$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + I'}{K}}$$

3. Material.

- Soporte de trípode.
- Varilla soporte.
- Nueces doble.
- Soporte de torsión.
- Resorte en espiral.
- Varilla y disco de torsión.
- Cronómetro y contador
- Varios cuerpos para momento de inercia.
- Juego de pesas.

4. Procedimiento experimental.

4.1. Determinación de la constante elástica de torsión.



1. Montar el péndulo de torsión según la figura.
2. Con ayuda de un dinamómetro de **1 N** dispuesto perpendicularmente a la varilla a una distancia r del eje de rotación (centro de la varilla), tomar las fuerzas necesarias para girar diferentes ángulos 2 el péndulo de torsión.
3. Calcular el momento $M = F\ r$ para cada ángulo y representarlo frente al mismo.
4. Repetir las etapas 2 y 3 para diferentes radios.
5. Calcular por mínimos cuadrados la constante de torsión K en cada una de las experiencias anteriores.
6. La constante de torsión del péndulo será la media aritmética de las obtenidas anteriormente.

4.2. Dependencia del período con el momento de inercia.

1. Determinar primero el momento I_o de la varilla, midiendo el período del péndulo de torsión varias veces cuando sólo está presente la varilla mediante la ecuación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

2. Colocar masas simétricamente a diferentes distancias r del centro de la varilla (**0.1 m**, **0.15 m**, **0.20 m**, **0.25 m**) y determinar el momento de inercia del conjunto para cada una de las distancias consideradas midiendo el período del péndulo.

3. Calcular el momento de inercia de las masas a cada una de las distancias mediante la relación:

$$I_{masas} = I_{varilla+masas} - I_{varilla}$$

4. Comprobar que los momentos de inercia de las masas son similares a los calculados mediante la definición de momento de inercia:

$$I_{masas} = 2\, m\, r^2$$

5. Obtener la expresión que relaciona el período del péndulo con el momento de inercia del cuerpo añadido a la varilla:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I_o}{K} + \frac{4\pi^2}{K} I \qquad a = \frac{4\pi^2 I_o}{K} \quad ,, \quad b = \frac{4\pi^2}{K}$$

$I_o =$ momento de inercia de la varilla; $I =$ momento de inercia de las pesas añadidas.

6. Construir una tabla y representar T^2 - I. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados determinar los valores de la ordenada en el origen y la pendiente de la ecuación anterior, la cual se denomina *recta de calibrado* del péndulo de torsión.

4.3. Comparación de momentos de inercia de cuerpos regulares determinados con el péndulo de torsión.

1. Determinar el período del péndulo cuando situamos un cilindro en su eje de rotación.

2. Calcular su momento de inercia mediante la recta de calibrado y mediante su masa y dimensiones ($I = ½\, m\, r^2$). ¿Son compatibles los resultados de ambos métodos?

3. Repetir los pasos anteriores para el cilindro hueco, la esfera maciza y el disco.

5. Análisis de los resultados.

Realizar un análisis de los resultados obtenidos siguiendo las sugerencias indicadas en el procedimiento experimental, indicándose las cantidades medidas y sus errores teniendo en cuenta la precisión de los instrumentos utilizados, así como las leyes experimentales obtenidas.

6. Cuestiones.

1. Indicar las causas de error de esta experiencia.

2. ¿Cuáles son las medidas que introducen más incertidumbre?

3. ¿El péndulo de torsión es un sistema mecánico conservativo?

4. ¿Es correcto decir que el momento de inercia de una esfera es $2/5\ m\ R^2$?

5. ¿A qué magnitud física corresponde la constante de torsión **K**?

6. ¿Cuál sería el momento de inercia de una capa de pintura que recubre un cuerpo cilíndrico?

7. De dos cilindros de igual altura, radio y masa, uno macizo y otro hueco, ¿cuál tendrá mayor momento de inercia respecto a un eje igual al de simetría?

8. Se disponen dos piezas cilíndricas idénticas, diametralmente opuestas sobre el plato de un péndulo de torsión y se determina su período T; luego se colocan las piezas una encima de la otra sobre el centro del plato y se vuelve a determinar T'. ¿Cuál es mayor? ¿Podrías determinar el momento de inercia de uno de los cilindros respecto a su eje de simetría?

9. Se trata de determinar el momento de inercia de una pala de juego de pelota respecto a un eje normal a la misma que pasa por el centro de su empuñadura. Puesta la pala sobre el plato del péndulo de torsión lo desequilibra y hace imposible el ensayo ¿Qué solución arbitraría para obtener el momento de inercia deseado?

10. ¿Cómo descubriría que un huevo está cocido o fresco sin romper la cáscara?

11. ¿Qué es el radio de giro de un cuerpo?

12. ¿Tiene sentido hablar de momento de inercia de un líquido en rotación?