I INTRODUCCIÓN. FUNDAMENTO TEORICO

La densidad es la *masa específica*, es decir, la masa por unidad de volumen

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Existen muchos procedimientos para determinar la densidad. Unos se basan en la medida del *empuje de Arquímedes* (sumergiendo un cuerpo en un líquido y midiendo la diferencia de peso), y otros en la medida de la masa y el volumen de manera independiente.

Cuando se trata de cuerpos con formas regulares y cierto tamaño, es posible, y quizá más fácil, calcular el volumen a partir de la medida de determinadas longitudes (p.e. en una *esfera* basta con medir el diámetro, y en un *cilindro* el diámetro y su longitud).

En esta práctica se determinarán las densidades de varias piezas de formas regulares. Para ello se pesarán en una *balanza* y se medirán longitudes con un *calibre* y un *palmer*

1. EL NONIUS

El *nonius* o *vernier* es un elemento auxiliar de medida de longitudes. Su función principal consiste en determinar el valor de la medida con una cierta precisión, especialmente la parte fraccionaria de la misma. Básicamente está constituido por dos escalas, una que podemos considerar fija, graduada en partes iguales que se toma como referencia, y otra móvil que nos dará el resultado de la medida.

El fundamento de un *nonius* es sencillo: se toman $n - 1$ unidades de medida de la regla fija y se dividen en n partes iguales, de manera que la longitud de estas nuevas divisiones serán más pequeñas que la unidad usada en la regla fija, y su valor d será

$$d = \frac{n - 1}{n}\, u$$ siendo u la unidad de medida

Es muy común tomar 9 unidades y dividirlas en 10 partes (*nonius decimal*)

Se llama *precisión* de un nonius a ***la diferencia entre la longitud de una división de la escala fija*** *(en general la unidad de medida)* ***y la longitud de una división del nonius***. Su valor p será

$$p = u - d = u - \frac{n-1}{n}\,u = \frac{1}{n}\,u$$

Es decir, si se han tomado 9 mm y se han dividido en 10 partes (nonius decimal), su precisión será de 1/10 mm = 0.1 mm; si se hubieran tomado 19 mm, su precisión sería de 1/20 mm = 0.05 mm.

La medida se realiza de la siguiente forma (Figura 1): sobre la escala fija se determina la parte entera de la medida, que será la unidad situada a la izquierda de aquéllas entre las que se encuentra el cero del nonius, en nuestro ejemplo 235 mm. Al no coincidir exactamente con una división de la regla fija, tendremos que calcular su parte fraccionaria, para lo cual buscamos la <u>división del nonius que coincide exactamente con una división entera de la regla fija</u>, en el ejemplo la número 7. Se debe hacer notar que <u>*no importa el valor de la división de la regla con la que coincida*</u>. El resultado de la medida será la parte entera ya determinada y el producto de la división del nonius por la *precisión* del mismo, como parte fraccionaria. En el ejemplo, la medida será 235.7 mm.

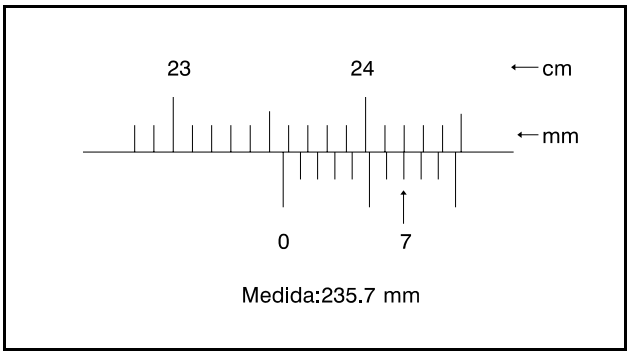


Figura 1 *Ejemplo de medida con un nonius*

En efecto, desde la división 7 del nonius hasta el cero del mismo hay una distancia igual a $7\,d$; desde la división 235 de la regla hasta la 7 del nonius hay una distancia igual a $7\,u$. La diferencia será, evidentemente, $7\,u - 7\,d = 7\,(u - d) = 7\,p$. Dicho de otra forma, la división 6 del nonius estará desplazada hacia la derecha de la división de la regla en p unidades; la anterior (5) estará desplazada $2\,p$ unidades, y así sucesivamente hasta el cero, que estará desplazado $7\,p$ unidades.

En general, y para cualquier nonius, la medida v será tal que $x \# v < x+1$, siendo x la división situada a la izquierda del cero del nonius. La parte fraccionaria será $m\,p$, siendo m <u>el número de la división del nonius</u> que coincide exactamente con una división de la regla. Definitivamente, la medida valdrá

$$v = x + m\,p = x + \frac{m}{n}$$

2. EL CALIBRE

El calibre es un instrumento de precisión para medida de pequeñas longitudes, hasta unos 30 cm. Tiene la forma que se puede ver en la Figura 2. Está compuesto por un par de piezas deslizantes, una de las cuales lleva la regla fija graduada (generalmente en milímetros y/o en pulgadas); la otra lleva un nonius.

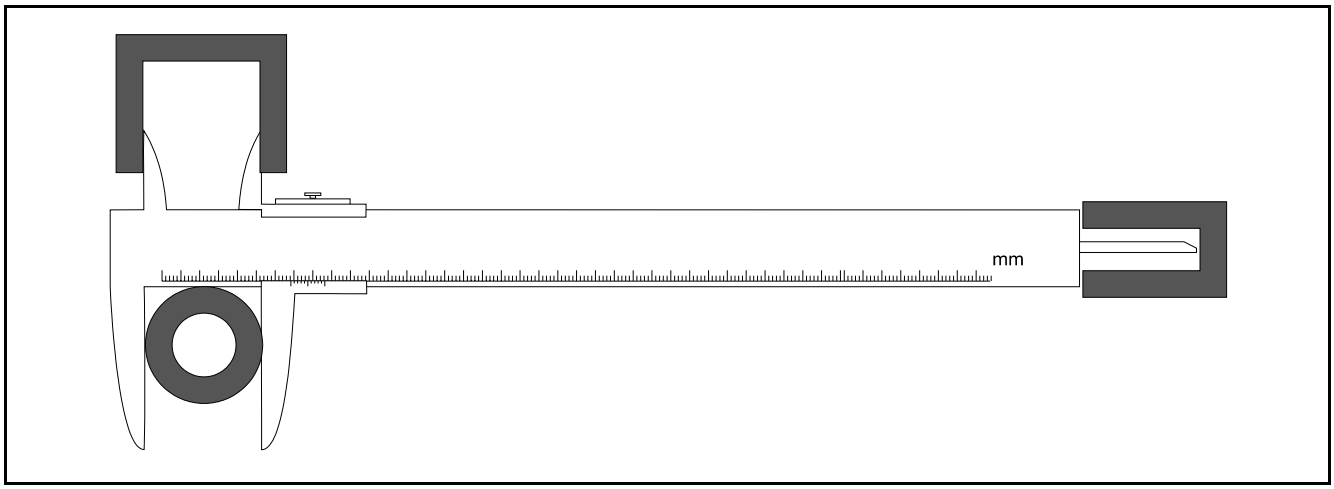


Figura 2 *Calibre y forma de medir*

Se pueden medir interiores, exteriores y profundidades. Las puntas forman parte de la misma pieza, por lo que se mueven simultáneamente. En esta misma figura se muestra la forma de realizar cada una de estas medidas.

Como ya sabemos, es importante reducir al mínimo los errores de medida. Resulta casi imposible determinar el error de escala de un calibre, por lo que tendremos que asumir la certeza de sus medidas; ahora bien, el *error de cero* es fácil determinarlo, y deberemos tenerlo en cuenta siempre que usemos este aparato de medida. Para ello basta con cerrar el calibre y comprobar el resultado; si no marca cero, habrá que restarlo de la medida si es positivo, o sumarlo cuando resulte negativo.

Siempre se deberá repetir la medida como mínimo 5 veces, en orden a tener un valor representativo, despreciando los valores que se encuentren muy separados de la media.

Para medir exteriores se deben abrir las puntas de forma que excedan el valor de la medida, cerrándolas después, sin presionar, para no forzar las puntas. Para los interiores, en cambio, se deben cerrar, y abrirlas una vez metidas en el hueco.

3. ***EL PALMER***

El *Palmer* o *Tornillo Micrométrico* es un instrumento de precisión para medidas de longitudes exteriores hasta 20 mm., con precisiones del orden de 0.01 mm. Se compone, básicamente, de un tornillo con un *paso de rosca* conocido (principalmente 0.5 mm ó 1 mm), que pasa por una tuerca situada en un extremo de una mordaza, en la que se introduce en cuerpo a medir. Lleva incorporada una escala graduada, solidaria con la tuerca y las mordazas, que coincide con el paso de rosca del tornillo, y en la que se mira el número de vueltas completas que se ha debido girar el tornillo para abrir sus puntas la distancia que queremos medir. Adicionalmente lleva un limbo graduado en fracciones de vuelta (generalmente 100), que nos indicará la parte decimal de la medida.

La pieza a medir se introduce entre las puntas abiertas; el Palmer se cierra sujetándolo por la pieza giratoria hasta notar la presión que ejerce sobre el objeto incógnita, momento en que aquélla deslizará permitiendo continuar el giro sin apretar excesivamente el tornillo, y evitando así introducir errores en la medida, especialmente cuando el material es blando.

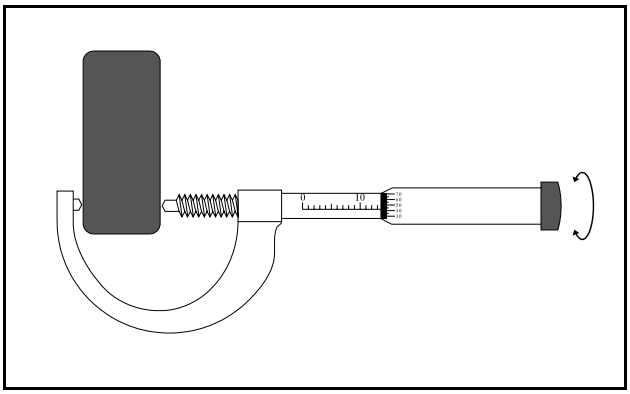


Figura 3 *Palmer y forma de medir*

La lectura se hace en la escala lineal, para la parte entera, y sobre el limbo para la fraccionaria. La Figura muestra en detalle la escala lineal y el limbo, con un ejemplo de medida. Es importante hacer notar que, para que resulten plenamente visibles cuando la medida está cercana a la unidad, las marcas de la escala lineal suelen aparecer a partir de fracciones superiores a 0.75, es decir, *antes* de la unidad completa.

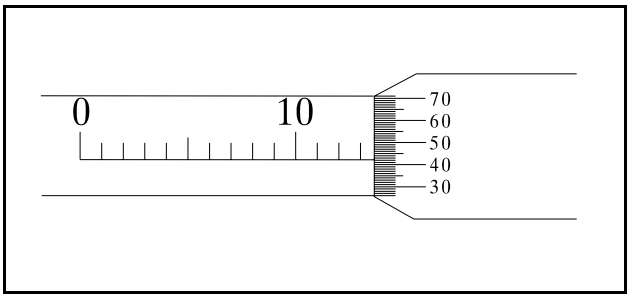


Figura 4 *Detalle de la escala de un Palmer*

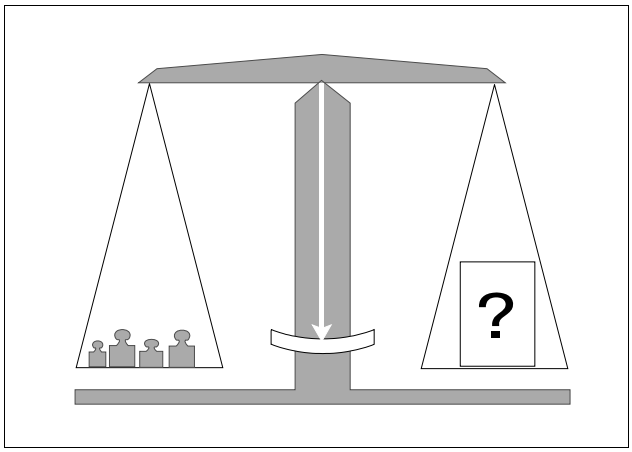
Se debe tener en cuenta el *error de cero*, que se determinará en cada medida con el Palmer cerrado, sumando o restando su valor, según sea negativo o positivo, respectivamente.

4. *LA BALANZA*

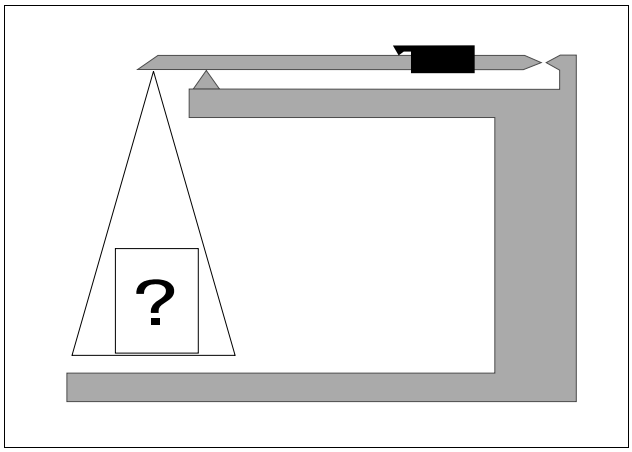
La balanza es una *palanca de primer género*. Como tal, se fundamenta en el equilibrio de *momentos*, el ejercido por el peso del cuerpo incógnita y el ejercido por el de un cuerpo cuya masa es de valor conocido (*pesas*). Puesto que el *momento* es el producto de una *fuerza* por una *distancia*, bastará con variar el valor de una de ellas manteniendo fijo el de la otra variable, aunque en determinados casos se realizan ambas operaciones.

Las balanzas mecánicas son, básicamente, de dos tipos:

1) las que tienen dos platillos simétricos situados a distancias iguales del punto de apoyo. En éstas, el equilibrio se consigue poniendo el cuerpo incógnita en uno de los platillos y *pesas* de valor conocido en el contrario. El peso se obtiene sumando el valor de todas las *pesas* que se han utilizado. Su precisión es de hasta 0.0001 g y suelen estar encerradas en *vitrinas* para evitar que incluso la respiración del operador las perturbe. Las más sofisticadas llevan amortiguadores de aire para frenar la oscilación del brazo.



2) las que tienen un platillo único (*monoplatos*). En éstas el equilibrio se puede conseguir de dos formas: a) colocando unas *pesas*, cuya suma nos da el valor de la pesada (suelen ser automáticas, y el peso se indica de forma numérica) y b) colocando unas *pesas* de valor fijo, pero variando la distancia. Vienen graduadas de forma que la posición de la *pesa* ya nos indica el valor de la pesada. Su precisión no es muy buena (generalmente 0.01 g), por lo que se les llama *granatarias*.



También hay balanzas *opto-mecánicas* o *electrónicas*, con precisiones muy buenas (mejor que 0.001 g), pero cuyo funcionamiento se sale del objetivo de esta práctica.

II MATERIAL NECESARIO PARA LA PRACTICA

- Calibre
- Palmer
- Balanza
- Cilindros hueco y macizo
- Bolas
- Varillas y piezas con formas diversas

III PROCEDIMIENTO PRACTICO

1. Determinación de errores de cero de los instrumentos de medida.
2. Determinación de todas las longitudes que sean necesarias para calcular el volumen de cada pieza.
3. Cálculo de volumen de todas y cada una de las piezas.
4. Cálculo de errores de todas y cada una de las medidas realizadas.
5. Expresión de todas los resultados en función de los valores medios y las desviaciones estándar, con el número de cifras significativas correctas.
6. Propagación de errores accidentales y de escala hasta el resultado final (densidad)

IV CUESTIONES

1. ¿Cuáles son las precisiones del Calibre y el Palmer usados en esta práctica? ¿Por qué?

2. ¿Por qué es necesario realizar varias medidas para cada longitud?

3. ¿Cuál es la menor longitud que se puede medir con el Calibre y el Palmer usados? ¿Por qué?

4. Al medir la altura y el diámetro de un cilindro, ¿cuál debe ser determinado con mayor precisión para calcular el volumen, y por qué?

5. ¿Cuáles son las posibles fuentes de error en esta experiencia?

6. ¿Es arbitrario el haber elegido piezas metálicas para esta experiencia, o bien obedece a determinadas razones? Razonar la respuesta.

V DENSIDADES. CALCULO Y PROPAGACION DE ERRORES.

1. *ALAMBRE*: ρ = m/L

$$m = \overline{m} \pm \Delta\overline{m} \qquad L = \overline{L} \pm \Delta\overline{L}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{L} = \frac{\rho}{m} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial L} = \frac{-1}{L^2} = -\frac{\rho}{L} \qquad \Delta\overline{\rho}^2 = \sum_i^n \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2 \Delta\overline{x}_i^2$$

$$\Delta\overline{\rho}^2 = \frac{\rho^2}{m^2}\Delta\overline{m}^2 + \frac{\rho^2}{L^2}\Delta\overline{L}^2 \qquad \Delta\overline{\rho} = \rho\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{m}}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\overline{L}}{L}\right)^2}$$

2. *ESFERA*: ρ = m/V

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6} \qquad \rho = \frac{6\,m}{\pi D^3}$$

$$m = \overline{m} \pm \Delta\overline{m} \qquad D = \overline{D} \pm \Delta\overline{D}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{V} = \frac{\rho}{m} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial D} = \frac{6\,m}{\pi}\,\frac{-3\,D^2}{D^6} = -\rho\,\frac{3}{D} \qquad \Delta\overline{\rho}^2 = \sum_i^n \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2 \Delta\overline{x}_i^2$$

$$\Delta\overline{\rho}^2 = \frac{\rho^2}{m^2}\Delta\overline{m}^2 + \frac{9\,\rho^2}{D^2}\Delta\overline{D}^2 \qquad \Delta\overline{\rho} = \rho\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{m}}{m}\right)^2 + \left(\frac{3\,\Delta\overline{D}}{D}\right)^2}$$

3. *ARANDELA Y CILINDRO*:

$$V = \pi\,(R^2 - r^2)\,e = \frac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2)\,e \qquad \rho = \frac{4\,m}{\pi(D^2 - d^2)\,e}$$

$$m = \overline{m} \pm \Delta\overline{m} \qquad D = \overline{D} \pm \Delta\overline{D} \qquad d = \overline{d} \pm \Delta\overline{d} \qquad e = \overline{e} \pm \Delta\overline{e}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial D} = \frac{4m}{\pi e} \frac{-2D}{(D^2 - d^2)^2} = \frac{-2D\,D}{(D^2 - d^2)} \qquad \frac{\partial D}{\partial d} = \frac{4m}{\pi e} \frac{2d}{(D^2 - d^2)^2} = \frac{2d\,D}{(D^2 - d^2)}$$

$$\frac{\partial D}{\partial e} = \frac{4m}{\pi(D^2 - d^2)^2} \frac{-1}{e^2} = \frac{-D}{e^2} \qquad \frac{\partial D}{\partial m} = \frac{4}{\pi (D^2 - d^2)\, e} = \frac{D}{m}$$

$$\sigma_D^2 = \frac{4D^2 D^2}{(D^2 - d^2)^2} \sigma_D^2 + \frac{4d^2 D^2}{(D^2 - d^2)^2} \sigma_d^2 + \frac{D^2}{e^2} \sigma_e^2 + \frac{D^2}{m^2} \sigma_m^2$$

$$\sigma_D = D \sqrt{4 \frac{D^2 \sigma_D^2 + d^2 \sigma_d^2}{(D^2 - d^2)^2} + \frac{\sigma_e^2}{e^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2}}$$

4. *ERRORES DE ESCALA*.

Los errores de escala se propagan de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{esc}(D) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial D}{\partial x_i} \right| \varepsilon_{esc}(x_i)$$

Si se quieren aplicar en esta práctica, para el caso de la arandela o del cilindro hueco la fórmula sería:

$$\varepsilon_{esc}(D) = \left| \frac{\partial D}{\partial m} \right| \varepsilon_{esc}(m) + \left| \frac{\partial D}{\partial D} \right| \varepsilon_{esc}(D) + \left| \frac{\partial D}{\partial d} \right| \varepsilon_{esc}(d) + \left| \frac{\partial D}{\partial e} \right| \varepsilon_{esc}(e)$$

El error total se obtendrá sumando este error ε_{esc} al error accidental σ_D calculado mediante la propagación de errores accidentales $\varepsilon_{TOTAL} = \varepsilon_{esc} + \sigma_D$