TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 1
))))))

El valor de una magnitud física se obtiene siempre a través de su medida, la cual se encuentra siempre sujeta a errores de diversa índole, de manera que, al comparar la magnitud con su patrón, surgen inevitablemente imprecisiones. Se admite el siguiente postulado: **Es imposible conocer el verdadero valor o valor exacto de una magnitud**. Llamaremos ***A*** al **valor verdadero** (en general no conocido) de cierta magnitud y ***a*** al **valor representativo** o asignado.

IMPRECISIÓN ABSOLUTA es el valor absoluto de la diferencia entre el valor verdadero y el valor representativo (hallado experimentalmente).

$$\mathbf{e}(a) = |A - a|$$

La imprecisión absoluta es imposible conocerla. Sí podemos, a través de la teoría de errores, estimar su **límite superior** y su **probabilidad**. La imprecisión es una estimación que también se encuentra afectada de incertidumbre; por tanto no tiene mucho sentido expresarla con mucha precisión; una cifra significativa o dos suelen ser suficientes para designar el error final de una medida.

Lo que se suele conocer es el valor representativo ***a*** y su incertidumbre **e(*a*)**; de aquí en adelante, toda cantidad medida vendrá expresada por un valor representativo (su valor medio normalmente) y su incertidumbre (existen varios métodos para su estimación).

El resultado de la medida se expresará: {*a* ± e(*a*)} (u), lo que significa que ***A***, el verdadero valor de la magnitud, se encuentra en el intervalo $a - e(a) < A < a + e(a)$, donde ***a*** es el valor representativo y **u** la unidad de la medida. La incertidumbre **e(*a*)** es una cantidad del mismo tipo que la magnitud medida y debe tener la misma unidad. En general debe ser $e(a) << a$, ya que si la incertidumbre es del mismo orden que el valor determinado, la medida "carece de sentido" (no siempre es así). Ejemplo {- 0.08 ± 0.48} puede expresarse como {0 ± 0.5}.

Ejemplo: Si al medir una longitud con una regla graduada obtenemos ***L***, tal que 13 < ***L*** < 14 mm, entonces la longitud determinada se expresaría de la siguiente manera:

$$L = \{13.5 \pm 0.5\} \text{ mm ó bien } L = 13.5\ (0.5) \text{ cm}$$

Al dar una medida es la última cifra la que se encuentra afectada por el error. ***m*** ={34.3±0.1} g indica que es la cifra de las décimas (el 3) la que va afectada de error.

Ejemplos: ***L*** = (**34.276 ± 0.4**) u se expresa correctamente ***L*** = (**34.3 ± 0.4**) u.
M = (**77.213 ± 0.365**) u se expresa correctamente ***M*** = (**77.2 ± 0.4**) u.

ERROR RELATIVO es el cociente entre la imprecisión absoluta y el valor verdadero.

$$\varepsilon_R(a) = e(a)/A$$

En general es un número mucho menor que la unidad, no tiene dimensiones y suele expresarse en tanto por ciento, lo que le convierte en un parámetro útil para evaluar la calidad de la medida realizada.

$$\varepsilon_R(a) = 100\,|e(a)/A| \ \%$$

El error relativo ε_R no es posible conocerlo, ya que no podemos saber el valor verdadero de la medida; pero sí podemos conocer su límite superior, aumentando **e(*a*)** y disminuyendo ***A***.

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 3
))))))

***L* = {15.0 ± 0.5} mm**, ya que 0.5 mm es la precisión de la regla.

1.3.2.- MEDIDAS CON RESULTADOS DIFERENTES.

Supongamos que al medir **n** (con **n** muy grande) veces una magnitud ***X*** resultan $x_1, x_2, \ldots x_p$ valores de frecuencias respectivas $N_1, N_2, \ldots N_p$.

Si sólo hay errores accidentales y éstos cumplen las condiciones:

a) Cada error accidental es producido por un gran número de errores elementales iguales, independientes y pequeños.

b) Para cualquier error accidental los errores elementales pueden aparecer con la misma probabilidad con signo **positivo** o **negativo**.

Entonces las frecuencias con las que aparecen las medidas de la magnitud ***X*** se distribuyen alrededor del valor medio según la distribución normal o de Gauss (Figura 1-1)

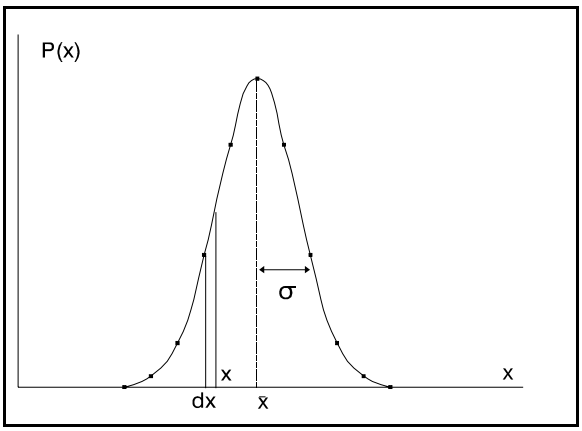


Figura 1-1

El valor medio & es el valor más probable y la desviación normal F representa cómo están dispersos los valores experimentales alrededor de &.

La desviación típica media $\sigma_{\bar{x}}$, se toma como una estimación del error de la cantidad ***X*** medida.

En la Figura 1-2 se observa que **la distribución de mayor F_2 tiene los valores más dispersos que la de menor F_1**.

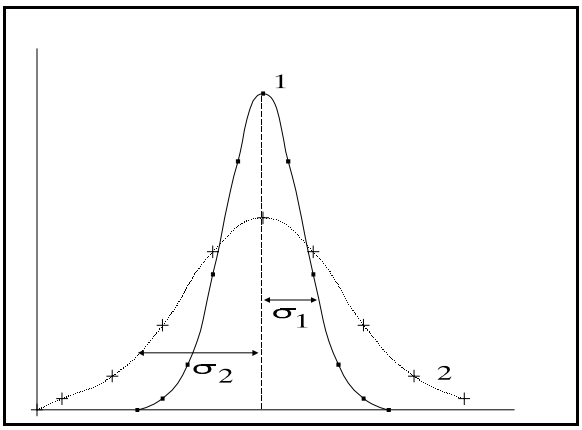


Figura 1-2

La distribución de Gauss se utiliza para interpretar muchos tipos de mediciones físicas.

Se demuestra que el área comprendida entre las ordenadas **& - F**, **& + F** y el eje de abcisas es igual a **0.683**, análogamente entre **& - 2.F**, **& + 2.F** es **0.954** y entre **& - 3.F**, **& + 3.F** es **0.997**; siendo 1 el área total encerrada en la campana, ver Figura 1-3.

Teniendo en cuenta la distribución normal de Gauss, tomamos como:

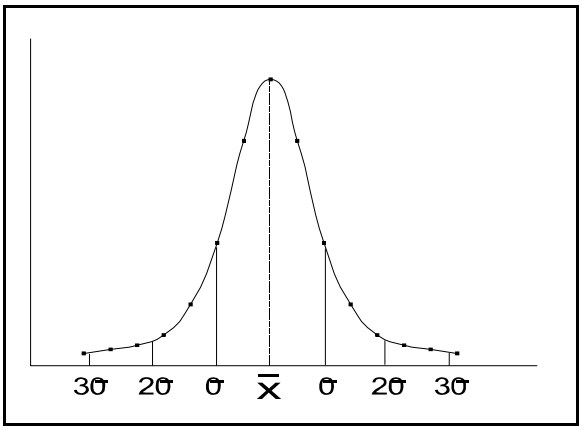


Figura 1-3

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 5
))))))

Ejemplo: Al medir **n = 20** veces la masa de una muestra se obtienen los valores:

m (g)	3.69	3.70	3.71	3.72	3.73
N_i	2	5	8	3	2
$*_i$	-0.02	-0.01	-0.00	0.01	0.02
$**_i*$	0.02	0.01	0.00	0.01	0.02
$**_i*^2$	$4A10^{-4}$	$1A10^{-4}$	0	$1A10^{-4}$	$4A10^{-4}$

{ $*_i$ **= *m*$_i$ - valor medio de las *m*$_i$** (en el ejemplo 3.71 g)}

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{24\cdot 10^{-4}}{20\cdot 19}} = 2.5\cdot 10^{-3} \qquad \sigma_{\bar{x}} \approx 3\cdot 10^{-3} \approx 10^{-2}$$

El resultado de la medida lo podemos expresar:

m = {3.71 ± 0.01} g [68.3 % de probabilidad] (8 = 1)

m = {3.71 ± 0.02} g [95.4 % de probabilidad] (8 = 2)

m = {3.71 ± 0.03} g [99.7 % de probabilidad] (8 = 3)

PARA TRATAR CORRECTAMENTE LOS RESULTADOS DE LAS MEDIDAS TOMADAS ES NECESARIO TENER EN CUENTA LA PRECISIÓN DEL APARATO Y LA POSIBLE EXISTENCIA DE ERRORES SISTEMÁTICOS. SUPONIENDO QUE LOS ERRORES SISTEMÁTICOS HAN SIDO ELIMINADOS, EL ERROR TOTAL SE EXPRESARÁ COMO SUMA DE LOS ERRORES ACCIDENTALES Y DE ESCALA.

$$g_{\mathbf{TOTAL}} = g_{\mathbf{ESCALA}} + g_{\mathbf{ACCIDENTAL}}$$

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 7
))))))

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{25520 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 99}} \approx 0.017 \approx 0.02$$

El resultado final sería t = {2.436 ± 0.017} s.

Teniendo en cuenta el error total suma del error de escala y el error accidental calculado con un 68.3 % de probabilidad, el resultado después de redondear sería:

$$t = \{2.44 \pm 0.12\} \text{ s}$$

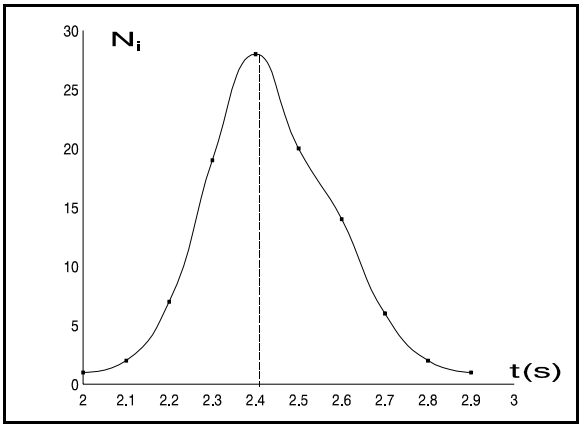


Figura 1-12.

1.4.- PROPAGACIÓN DE ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS.

Veamos cómo se manipulan datos inciertos en operaciones aritméticas sencillas: mostrándonos prudentes, supondremos que los verdaderos valores de los datos iniciales son aquellos que conducen al mayor error en el resultado final, es decir, nos pondremos en el caso más desfavorable.

Sean $a \pm e(a)$ y $b \pm e(b)$ los datos iniciales de partida.

1.4.1.- ERROR ABSOLUTO DE SUMA Y DIFERENCIA.

a) Sea $z = a + b$. Tratemos de averiguar su incertidumbre:

El mayor valor que z puede tener es $z = a + e(a) + b + e(b)$

El menor valor que z puede tener es $z = a - e(a) + b - e(b)$

El error de z será por tanto: $e(z) = e(a) + e(b)$

b) Sea $z = a - b$. Tratemos de averiguar su incertidumbre:

El mayor valor que z puede tener es $z = a + e(a) - [b - e(b)] = a - b + [e(a) + e(b)]$, lo que ocurrirá cuando el valor de a sea el mayor dentro de su margen, y el valor de b sea el menor dentro de su margen.

El menor valor que z puede tener es $z = a - e(a) - [b+e(b)] = a - b - [e(a) + e(b)]$, lo que ocurrirá cuando el valor de a sea el menor dentro de su margen y el valor de b sea el mayor dentro de su margen.

El error de z será por tanto: $e(z) = e(a) + e(b)$

El error absoluto de una suma o diferencia es la suma de los errores absolutos de los sumandos.

.- E D

= *a*

= *a/*

= *a*^{n}

enc o *b*

a/a - d*b/b*

d*a/a*

nie nta que tanto "*da*" como "d*b*" pueden
osi odemos escribir:

= *a*

= *a*

= *a*

ro s de cada uno de los términos del
uc

P

so una función $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$.
ng les x_i. Entonces la desviación típica
a c

s io de las variables independientes.

S

$z =$

Un problema frecuente que se presenta en los experimentos físicos es encontrar relaciones funcionales entre dos magnitudes x e y; una vez representados en el papel milimetrado los datos experimentales como puntos (x_i, y_i), se analiza si la nube de puntos obtenida obedece alguna ley que relacione las magnitudes x e y.

El caso más sencillo se presenta cuando la relación funcional es lineal; si los puntos experimentales (x_i, y_i) muestran una clara distribución en torno a una línea recta (regresión lineal), ésta recibe el nombre de **Recta de Regresión de Y sobre X**. Entre los puntos experimentales, representados, pueden pasar varias rectas; con el método de los mínimos cuadrados podemos encontrar la recta de ecuación $Y = a + b/X$ que mejor se ajusta a la nube de puntos experimentales.

Necesitamos determinar los parámetros a y b a partir de **n** medidas y_i correspondientes a los n valores fijos x_i; admitiremos que los valores x_i de la variable independiente están dados con error despreciable, mientras que los valores y_i son fluctuantes, ya que se encuentran afectados de errores aleatorios.

Si y_i es la ordenada experimental de un cierto punto se entiende por Y_i la ordenada teórica que se obtendría al sustituir en la ecuación $Y = a + b/X$ el valor experimental x_i de la abcisa para dicho punto.

$$Y_i = a + b\, x_i$$

Los parámetros a y b vienen dados por la siguientes ecuaciones:

$$a = \frac{\Sigma(y_i)\cdot\Sigma(x_i^2) - \Sigma(x_i)\cdot\Sigma(x_i\, y_i)}{n\cdot\Sigma(x_i^2) - \left(\Sigma x_i\right)^2}$$

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 11
))))))

Ejemplo: Expresaremos en notación científica los números de la tabla:

51.723 m 6 5.1723Å10^{1} m	0.0031 kg 6 3.1Å10^{-3} kg
0.083 ml 6 8.3Å10^{-2} ml	47.00 g 6 4.700Å10^{1} g
32000 km 6 3.2000Å10^{4} km	120.0 cm^3 6 1.200Å10^{2} cm^3
0.00006 s 6 6Å10^{-5} s	0.11 mol 6 1.1Å10^{-1} mol

En los cambios de unidades NO debe variar el número de cifras significativas del dato.

1.8.- REDONDEO.

Un dato se redondea hasta el número deseado de cifras significativas, eliminando uno o más dígitos a la derecha.

- En el caso de que el primer dígito suprimido sea superior a 5, el anterior se aumentará en una unidad.
- En el caso de que el primer dígito suprimido sea inferior a 5, el último dígito conservado se deja invariable.
- Si el dígito suprimido es el 5, se aumentará en una unidad el anterior dígito si es impar; si el dígito anterior es par se deja invariable.

Ejemplo: Los números de la tabla, si se estima necesario, pueden redondearse de la siguiente forma:

5.776 g . 5.78 g	45.17 s . 45.2 s	12.9 m . 13 m	12.43 s . 12.4 s	
1.3882 m . 1.388 m	46.54 N . 46.5 N	5.75 g . 5.8 g	5.65 mg . 5.6 mg	
2.85 J . 2.8 J	2.55 mg . 2.6 mg	2.45 W . 2.4 W	3.15 kg . 3.2 kg	

1.8.1. NORMAS PARA SUMAR Y RESTAR.

El resultado se expresará después del redondeo con tantas cifras decimales como el término que tenga menos cifras decimales.

25.340	58.0	4.20	415.5	5.5
5.465	0.0038	1.6523	3.64	1.65
0.322	0.00001	0.015	0.238	30.3
---	---	---	---	---
31.127	58.00381	5.8673	419.378	37.45
31.127	**58.0**	**5.87**	**419.4**	**37.4**

1.8.2.- NORMAS PARA MULTIPLICAR Y DIVIDIR.

En cálculos de multiplicación, división y extracción de raíces el resultado se debe expresar con tantas cifras significativas como el dato que menor número de ellas tenga. Los números exactos (1/2) m v^2 se consideran constituidos por un número infinito de cifras significativas.

Ejemplos. NOTA: En todos los ejemplos supondremos que los errores están calculados por sus desviaciones típicas medias.

EJEMPLO 1.1.- Elevar al cubo y extraer la raíz cuadrada del número **x = 5.3 ± 0.2**

$y = x^3$ | $\sigma_{\bar{y}}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2 = [3\bar{x}^2]^2 \cdot [0.2]^2$ | $\sigma_{\bar{y}} = 3 \cdot \bar{x}^2 \cdot 0.2$ $\sigma_{\bar{y}} = 3 \cdot 5.3^2 \cdot 0.2 = 16.86 \approx 17 \Rightarrow y = 149 \pm 17$

y = %& | $\sigma_{\bar{y}}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2$ | $\sigma_{\bar{y}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{2\sqrt{5.3}} 0.2 \approx 0.044$ | $\sigma_{\bar{y}} \approx 0.04 \Rightarrow y = 2.30 \pm 0.04$

EJEMPLO 1.2.- Hallar el logaritmo neperiano y la exponencial $\mathbf{e}^x$ de **x = 2.25 ± 0.04.**

a) **y = Ln(x)** | $\sigma_{\bar{y}}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ | | y = 0.811 ± 0.018

CUESTIONES

1.- *Calcular la densidad de una pieza cilíndrica maciza de determinado material. La medida de sus parámetros R; h; y m se refleja en la tabla adjunta:* Calcular los errores teniendo en cuenta el error de escala. Propagar errores para el cálculo de la incertidumbre asociada a la densidad de la pieza

R (cm)	m (g)	h (cm)
0.80	15.2	1.01
0.82	15.3	1.02
0.79	15.2	1.02
0.80	15.1	1.02
0.81	15.2	1.01
0.81	15.2	1.02
0.81	15.2	1.03
0.82		1.02
0.80		1.01
0.80		1.03

2.- *La tabla de datos siguiente permite deducir el valor de la eficiencia de un detector de partículas alfa, colocado a una determinada distancia de la muestra. Para ello, se ha medido el número de cuentas detectadas por el sistema (N) en diferentes intervalos de tiempo (t) procedentes de una muestra de* ^{241}*Am con actividad conocida A = 276 Bq. Empleando la expresión para la actividad de una muestra radiactiva:*

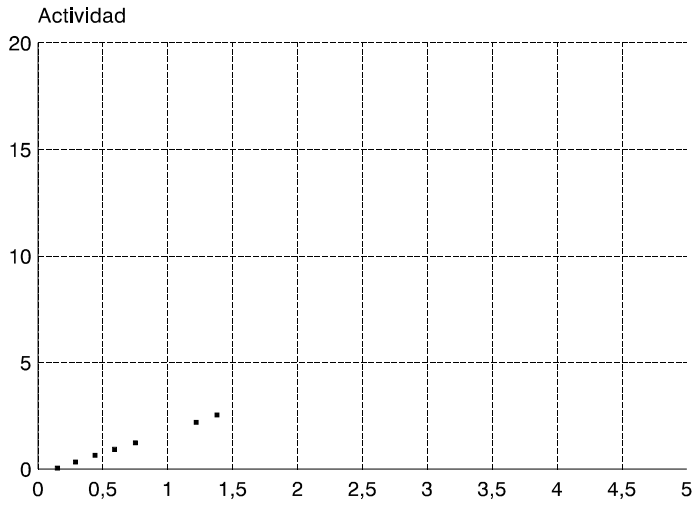
$$A = \frac{N}{I\,\epsilon\,t} \Rightarrow \epsilon = 100\,\frac{N}{I\,A\,t}\ (\%)$$

y tomando I = 1, deducir con sus errores la eficiencia del detector analizado. ***NOTA****: 1 Bq = 1 cuenta/s*$^{-1}$

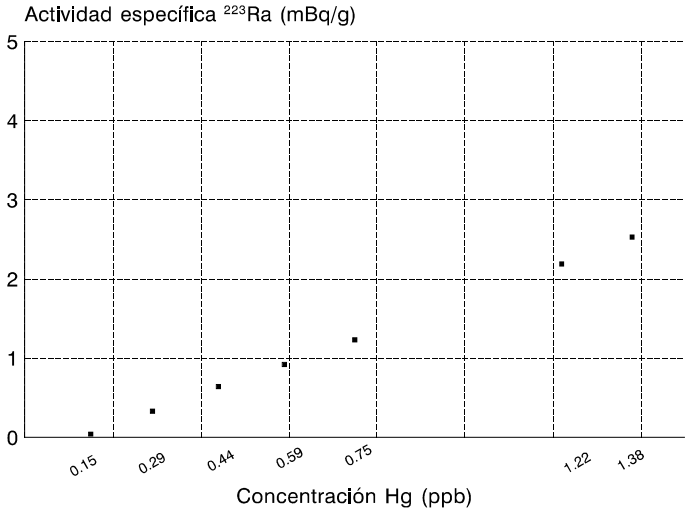
N (cuentas)	4062	6098	8057	10130
t_i (min)	1	1.5	2	2.5

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 15
))))))

A continuación mostramos varios ejemplos de una misma representación gráfica en la que se han cometido varios errores conforme a las normas expuestas:



En este primer ejemplo se han elegido mal las escalas, no aparecen las definiciones de los ejes con sus unidades y no se cuenta con el título de la gráfica.



Por su parte, este segundo ejemplo muestra una correcta definición de los ejes, una mejora en la elección de la escala de los ejes, si bien el eje Y no está correctamente dimensionado. Aparece un error muy común es la representación en alguno de los ejes (cuando no en los dos) de los valores obtenidos en la experiencia. Eso no debe hacerse. Finalmente, no aparece el título del gráfico, así como la función lineal que, por mínimos cuadrados, debe dar cuenta de la evidente correlación entre ambas magnitudes representadas.

TEORÍA DE ERRORES. GRÁFICAS Y OBTENCIÓN DE LEYES Pág 17
))))))

2.3.- CUESTIONES

1.- *Para la calibración de un determinado espectrómetro, se precisa saber qué "canal" asigna el sistema para una determinada energía (expresada en MeV). Dada la tabla de datos adjunta, se pide: a) Obtener por mínimos cuadrados la recta de calibración* ***energía*** *(como variable dependiente)* ***frente a "canal"*** *(variable independiente) Dar el coeficiente de correlación obtenido. b) Efectuar una representación gráfica de los valores obtenidos y dibujar la recta obtenida en el apartado a).*

Energía (MeV)	Canal
3.0	106
3.4	238
3.8	371
4.2	504
4.6	635
5.0	768
5.4	895
5.8	1024
6.2	1159
6.6	1289
7.0	1420
7.4	1551
7.8	1683
8.0	1747

2.- *Al atravesar determinados materiales, la intensidad de una radiación electromagnética se ve reducida en función del espesor de la barrera del material mencionado. En una determinada experiencia, se ha dispuesto de una fuente de rayos gamma y se ha hecho pasar por barreras de Pb con espesor variable. Tras las barreras se colocó un detector de radiación que daba la intensidad resultante de la emisión en "cuentas por minuto" (cpm). Los resultados obtenidos se expresan en la tabla siguiente:*

I (cpm)	1050	830	614	246
Espesor (mm)	0.5	1	2	4

Se pide: a) Representar gráficamente los valores obtenidos de la intensidad resultante frente al espesor. Dibujar una curva que una esos puntos. b) Elaborar una tabla de datos en la que se tenga el logaritmo neperiano de I frente al espesor. Obtener la recta de regresión expresando el correspondiente coeficiente de correlación. Representar gráficamente los puntos y recta obtenidos. Expresar claramente (con sus unidades) la pendiente de la recta y la ordenada en el origen. c) A tenor de lo efectuado, ¿qué clase de función de las comúnmente empleadas en Física crees que liga las dos variables de este problema?