Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a/S.

(Zweiter Artikel.)

§ 12.

Die wohlgeordneten Mengen.

Unter den einfach geordneten Mengen gebührt den *wohlgeordneten Mengen* eine ausgezeichnete Stelle; ihre Ordnungstypen, die wir ‚*Ordnungszahlen*‘ nennen, bilden das natürliche Material für eine genaue Definition der höheren transfiniten Cardinalzahlen oder Mächtigkeiten, einer Definition, die durchaus conform ist derjenigen, welche uns für die kleinste transfinite Cardinalzahl *Alef-null* durch das System aller endlichen Zahlen ν geliefert worden ist (§ 6).

‚*Wohlgeordnet*‘ nennen wir eine einfach geordnete Menge F (§ 7), wenn ihre Elemente f von einem niedersten f_1 an *in bestimmter Succession aufsteigen*, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

I. „*Es giebt in F ein dem Range nach niederstes Element f_1*“.

II. „*Ist F' irgend eine Theilmenge von F und besitzt F ein oder mehrere Elemente höheren Ranges als alle Elemente von F', so existirt ein Element f' von F, welches auf die Gesammtheit F' zunächst folgt, so dass keine Elemente in F vorkommen, die ihrem Range nach zwischen F' und f' fallen.*“ *)

Im Besondern folgt auf jedes einzelne Element f von F, *falls es nicht das höchste ist*, ein bestimmtes anderes Element f' dem Range nach als *nächsthöheres;* dies ergiebt sich aus der Bedingung II, wenn man für F' das einzelne Element f setzt. Ist ferner beispielsweise in F eine unendliche Reihe auf einander folgender Elemente

$$e' \prec e'' \prec e''' \cdots e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \cdots$$

enthalten, doch so, dass es in F auch solche Elemente giebt, die

*) Es stimmt diese Definition der ‚wohlgeordneten Menge‘, abgesehen vom Wortlaut, durchaus mit derjenigen überein, welche in Bd. XXI der Math. Ann. pag. 548 (Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre pag. 4) eingeführt wurde.

höheren Rang haben *als alle* $e^{(\nu)}$, so muss nach der Bedingung II, wenn man darin für F' die Gesammtheit $\{e^{(\nu)}\}$ setzt, ein Element f' existiren, so dass nicht nur

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werthe von ν, sondern dass es auch *kein Element* g in F giebt, welches den beiden Bedingungen genügt

$$g \prec f',$$
$$g \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werthe von ν.

So sind z. B. die drei Mengen

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

wo

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3$$

wohlgeordnet. Die beiden ersten haben kein höchstes Element, die dritte hat das höchste Element c_3; in der zweiten und dritten folgt auf sämmtliche Elemente a_ν zunächst b_1, in der dritten auf sämmtliche Elemente a_ν und b_μ zunächst c_1.

Im Folgenden wollen wir die in § 7 erklärten Zeichen $\prec$ und $\succ$, welche dort zum Ausdruck der Rangbeziehung je zweier Elemente gebraucht wurden, auf Gruppen von Elementen ausdehnen, so dass die Formeln

$$M \prec N,$$
$$M \succ N$$

der Ausdruck dafür seien, dass in einer vorliegenden Rangordnung alle Elemente der Menge M niederen resp. höheren Rang haben, als alle Elemente der Menge N.

A. *„Jede Theilmenge F_1 einer wohlgeordneten Menge F hat ein niederstes Element.“*

Beweis. Gehört das niederste Element f_1 von F zu F_1, so ist es zugleich das niederste Element von F_1.

Andernfalls sei F' die Gesammtheit aller Elemente von F, welche niederen Rang haben als alle Elemente von F_1, so ist eben deshalb kein Element von F zwischen F' und F_1 gelegen.

Folgt also f' (nach II) zunächst auf F' so gehört es nothwendig zu F_1 und nimmt hier den niedersten Rang ein.

B. *„Ist eine einfach geordnete Menge F so beschaffen, dass sowohl F, wie auch jede ihrer Theilmengen ein niederstes Element haben, so ist F eine wohlgeordnete Menge.“*

Beweis. Da F ein niederstes Element hat, so ist die Bedingung I erfüllt.

Sei F' eine Theilmenge von F derart, dass es in F ein oder mehrere Elemente $\succ F'$ giebt; F_1 sei die Gesammtheit aller dieser Elemente und f' das niederste Element von F_1, so ist offenbar f' das auf F' zunächst folgende Element von F. Somit ist auch die Bedingung II erfüllt und es ist daher F eine wohlgeordnete Menge.

C. *„Jede Theilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge."*

Beweis. Nach Satz A hat F' sowohl, wie jede Theilmenge F'' von F' (da sie zugleich Theilmenge von F ist) ein niederstes Element; daher ist nach Satz B F' eine wohlgeordnete Menge.

D. *„Jede einer wohlgeordneten Menge F ähnliche Menge G ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge."*

Beweis. Ist M eine Menge, welche ein niederstes Element besitzt, so hat, wie aus dem Begriffe der Aehnlichkeit (§ 7) unmittelbar folgt, auch jede ihr ähnliche Menge N ein niederstes Element.

Da nun $G \simeq F$ sein soll und F als wohlgeordnete Menge ein niederstes Element hat, so gilt dasselbe von G.

Ebenso hat jede Theilmenge G' von G ein niederstes Element; denn bei einer Abbildung von G auf F entspricht der Menge G' als Bild eine Theilmenge F' von F, so dass

$$G' \simeq F'.$$

F' hat aber nach Satz A ein niederstes Element, daher auch G'. Es haben also sowohl G, wie auch jede Theilmenge G' von G ein niederstes Element; nach Satz B ist daher G eine wohlgeordnete Menge.

E. *„Werden in einer wohlgeordnete Menge G an Stelle ihrer Elemente g wohlgeordnete Mengen substituirt in dem Sinne, dass wenn F_g und $F_{g'}$ die an Stelle der beiden Elemente g und g' tretenden wohlgeordneten Mengen sind und $g \prec g'$, alsdann auch $F_g \prec F_{g'}$, so ist die auf diese Weise durch Zusammensetzung aus den Elementen sämmtlicher Mengen F_g hervorgehende Menge H eine wohlgeordnete."*

Beweis. Sowohl H, wie auch jede Theilmenge H_1 von H haben ein niederstes Element, was nach Satz B H als wohlgeordnete Menge kennzeichnet. Ist nämlich g_1 das niederste Element von G, so ist das niederste Element von F_{g_1} zugleich niederstes Element von H. Hat man ferner eine Theilmenge H_1 von H, so gehören ihre Elemente zu bestimmten Mengen F_g, die zusammengenommen eine Theilmenge der aus den Elementen F_g bestehenden, der Menge G ähnlichen wohlgeordneten Menge $\{F_g\}$ bilden; ist etwa F_{g_0} das niederste Element dieser Theilmenge, so ist das niederste Element der in F_{g_0} enthaltenen Theilmenge von H_1 zugleich niederstes Element von H_1.

§ 13.

Die Abschnitte wohlgeordneter Mengen.

Ist f irgend ein *vom Anfangselement* f_1 *verschiedenes* Element der wohlgeordneten Menge F, so wollen wir die Menge A aller Elemente von F, welche $\prec f$, einen ‚*Abschnitt von* F' und zwar den *durch das Element* f *bestimmten* Abschnitt von F nennen. Dagegen heisse die Menge R aller übrigen Elemente von F *mit Einschluss von* f ein ‚*Rest von* F' und zwar der *durch das Element* f *bestimmte* Rest von F. Die Mengen A und R sind nach Satz C, § 12 *wohlgeordnet*, und wir können nach § 8 und § 12 schreiben:

$$F = (A, R), \tag{1}$$

$$R = (f, R'), \tag{2}$$

$$A \prec R. \tag{3}$$

R' ist der auf das Anfangselement f folgende Theil von R und reducirt sich auf 0, falls R ausser f kein anderes Element hat.

Nehmen wir als Beispiel die wohlgeordnete Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

so sind hier durch das Element a_3 der Abschnitt

$$(a_1, a_2)$$

und der zugehörige Rest

$$(a_3, a_4, \ldots a_{\nu+2}, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element b_1 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

und der zugehörige Rest

$$(b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element c_2 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1)$$

und der zugehörige Rest

$$(c_2, c_3)$$

bestimmt.

Sind A und A' zwei Abschnitte von F, f und f' die sie bestimmenden Elemente und ist

$$f' \prec f \tag{4}$$

so ist A' auch Abschnitt von A.

Wir nennen A' den *kleineren*, A den *grösseren* Abschnitt von F:

$$A' < A. \tag{5}$$

Dementsprechend können wir auch von jedem A von F sagen, dass er kleiner ist als F selbst:

$$A < F. \tag{6}$$

A. „*Sind zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F und G auf einander abgebildet, so entspricht jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G, und jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, und die Elemente f und g von F und G, durch welche die einander zugeordneten Abschnitte A und B bestimmt sind, entsprechen einander ebenfalls bei der Abbildung.*"

Beweis. Hat man zwei ähnliche einfach geordnete Mengen M und N auf einander abgebildet, sind m und n zwei zugeordnete Elemente und ist M' die Menge aller Elemente von M, welche $\prec m$, N' die Menge aller Elemente von N, welche $\prec n$, so entsprechen bei der Abbildung M' und N' einander. Denn jedem Element m' von M, das $\prec m$, muss (§ 7) ein Element n' von N entsprechen, das $\prec n$ und umgekehrt.

Wendet man diesen allgemeinen Satz auf die wohlgeordneten Mengen F und G an, so erhält man das zu Beweisende.

B. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keinem ihrer Abschnitte A ähnlich.*"

Beweis. Nehmen wir an, es sei $F \simeq A$, so denken wir uns eine Abbildung von F auf A hergestellt. Nach Satz A entspricht alsdann dem Abschnitt A von F als Bild ein Abschnitt A' von A, so dass $A' \simeq A$. Es wäre also auch $A' \simeq F$ und es ist $A' < A$. Aus A' würde sich in derselben Weise ein kleinerer Abschnitt A'' von F ergeben, so dass $A'' \simeq F$ und $A'' < A'$ u. s. w.

Wir erhielten so eine *nothwendig unendliche* Reihe

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)}, \ldots$$

von stets kleiner werdenden Abschnitten von F, die alle der Menge F ähnlich wären.

Bezeichnen wir mit $f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ die diese Abschnitte bestimmenden Elemente von F, so wäre

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)}, \ldots.$$

Wir würden also eine *unendliche* Theilmenge

$$(f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots)$$

von F haben, in welcher *kein Element den niedersten Rang* einnimmt.

Solche Theilmengen von F sind aber nach Satz A, § 12 *nicht möglich.* Die Annahme einer Abbildung von F auf einen ihrer Abschnitte führt also zu einem Widerspruch, und es ist daher die Menge F keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Ist auch nach Satz B eine wohlgeordnete Menge F keinem ihrer *Abschnitte* ähnlich, so giebt es doch immer, wenn F *unendlich* ist, *andere Theilmengen* von F, welchen F ähnlich ist. So ist z. B. die Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

jedem ihrer Reste

$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}, \ldots a_{\varkappa+\nu}, \ldots)$$

ähnlich. Es ist daher von Bedeutung, dass wir dem Satz B auch noch folgenden an die Seite stellen können:

C. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keiner Theilmenge irgend eines ihrer Abschnitte A ähnlich.*"

Beweis. Nehmen wir an, es sei F' Theilmenge eines Abschnittes A von F und $F' \simeq F$. Wir denken uns eine Abbildung von F auf F' zu Grunde gelegt; dabei wird nach Satz A dem Abschnitte A von F ein Abschnitt F'' der wohlgeordneten Menge F' als Bild entsprechen; dieser Abschnitt werde durch das Element f' von F' bestimmt. Es ist f' auch Element von A und bestimmt einen Abschnitt A' von A, von welchem F'' eine Theilmenge ist.

Die Annahme einer Theilmenge F' eines Abschnittes A von F, so dass $F' \simeq F$, führt uns daher zu einer Theilmenge F'' eines Abschnittes A' von A, so dass $F'' \simeq A$.

Dieselbe Schlussweise ergiebt eine Theilmenge F''' eines Abschnittes A'' von A', so dass $F''' \simeq A'$. Und wir erhalten so fortgehend, wie im Beweise des Satzes B, eine *nothwendig unendliche* Reihe immer kleiner werdender Abschnitte von F

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

und damit die *unendliche* Reihe der diese Abschnitte bestimmenden Elemente

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \ldots$$

in welcher kein niederstes Element vorhanden wäre, was nach dem Satze A, § 12 unmöglich ist. Es giebt daher keine Theilmenge F' eines Abschnittes A von F, so dass $F' \simeq F$. —

D. „*Zwei verschiedene Abschnitte A und A' einer wohlgeordneten Menge F sind nicht einander ähnlich.*"

Beweis. Ist $A' < A$, so ist A' auch Abschnitt der wohlgeordneten Menge A, kann daher nach Satz B nicht A ähnlich sein.

E. „*Zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F und G lassen sich nur auf eine einzige Weise auf einander abbilden.*"

Beweis. Setzen wir zwei verschiedene Abbildungen von F auf G voraus und sei f ein Element von F, dem bei den beiden Abbildungen verschiedene Bilder g und g' in G entsprächen. A sei der Abschnitt von F, der durch f bestimmt ist, B und B' seien die Abschnitte von G, die durch g und g' bestimmt sind. Nach Satz A ist sowohl $A \simeq B$, wie auch $A \backsim B'$, und es wäre daher auch $B \backsim B'$, was gegen den Satz D streitet. —

F. „*Sind F und G zwei wohlgeordnete Mengen, so kann ein Abschnitt A von F höchstens einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*“

Beweis. Würde der Abschnitt A von F zwei ihm ähnliche Abschnitte B und B' in G haben, so wären auch B und B' ähnlich, was nach Satz D unmöglich ist. —

G. „*Sind A und B ähnliche Abschnitte zweier wohlgeordneter Mengen F und G, so giebt es auch zu jedem kleineren Abschnitt $A' < A$ von F einen ähnlichen Abschnitt $B' < B$ von G und zu jedem kleineren Abschnitt $B' < B$ von G einen ähnlichen Abschnitt $A' < A$ von F.*“

Beweis folgt aus Satz A, wenn derselbe auf die ähnlichen Mengen A und B angewandt wird.

H. „*Sind A und A' zwei Abschnitte einer wohlgeordneten Menge F, B und B' ihnen ähnliche Abschnitte einer wohlgeordneten Menge G, und ist $A' < A$, so ist $B' < B$.*“

Beweis folgt aus den Sätzen F und G.

I. „*Ist ein Abschnitt B einer wohlgeordneten Menge G keinem Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F ähnlich, so ist sowohl jeder Abschnitt $B' > B$ von G als auch G selbst weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich.*“

Beweis folgt aus Satz G.

K. „*Giebt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, aber auch umgekehrt zu jedem Abschnitt B von G einen ihm ähnlichen Abschnitt A von F, so ist $F \backsim G$.*“

Beweis. Wir können F und G nach folgendem Gesetz auf einander abbilden:

das niederste Element f_1 von F entspreche dem niedersten Element g_1 von G. Ist $f \succ f_1$ irgend ein anderes Element von F, so bestimmt es einen Abschnitt A von F; zu diesem gehört der Voraussetzung nach ein bestimmter ähnlicher Abschnitt B von G; das den Abschnitt B bestimmende Element g von G sei das Bild von f. Und ist g irgend ein Element von G, das $\succ g_1$, so bestimmt es einen Abschnitt B von G, zu dem voraussetzungsgemäss ein ähnlicher Abschnitt A von F gehört; das Element f, welches diesen Abschnitt A bestimmt, sei das Bild von g.

Dass die auf diese Weise definirte gegenseitig eindeutige Zuordnung von F und G eine *Abbildung* im Sinne von § 7 ist, folgt leicht. Sind nämlich f und f' zwei beliebige Elemente von F, g und g'

die ihnen entsprechenden Elemente von G, A und A' die durch f und f', B und B' die durch g und g' bestimmten Abschnitte, und ist etwa

$$f' \prec f,$$

so ist

$$A' < A;$$

nach Satz H ist daher auch

$$B' < B$$

und folglich

$$g' \prec g.$$

L. „*Giebt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, ist hingegen mindestens ein Abschnitt von G vorhanden, zu dem es keinen ähnlichen Abschnitt von F giebt, so existirt ein bestimmter Abschnitt B_1 von G, so dass $B_1 \simeq F$.*“

Beweis. Wir fassen die Gesammtheit aller Abschnitte von G ins Auge, zu denen es keine ähnlichen Abschnitte in F giebt; unter ihnen muss es einen *kleinsten* Abschnitt geben, den wir B_1 nennen. Dies folgt daraus, dass nach Satz A, § 12 die Menge der alle diese Abschnitte bestimmenden Elemente ein niederstes Element besitzt; der durch letzteres bestimmte Abschnitt B_1 von G ist der kleinste aus jener Gesammtheit. Nach Satz I ist *jeder* Abschnitt von G, der $> B_1$ ist, derartig, dass zu ihm kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist, es müssen daher die Abschnitte B von G, welchen ähnliche Abschnitte von F gegenüberstehen, alle $< B_1$ sein, und zwar gehört zu jedem Abschnitt $B < B_1$ ein ähnlicher Abschnitt A von F, weil eben B_1 der kleinste Abschnitt von G ist unter denen, welchen keine ähnlichen Abschnitte in F entsprechen.

Somit giebt es zu jedem Abschnitt A von F einen ähnlichen Abschnitt B von B_1 und zu jedem Abschnitt B von B_1 einen ähnlichen Abschnitt A von F; nach Satz K ist daher

$$F \simeq B_1. \text{ —}$$

M. „*Hat die wohlgeordnete Menge G mindestens einen Abschnitt, zu dem kein ähnlicher Abschnitt in der wohlgeordneten Menge F vorhanden ist, so muss jeder Abschnitt A von F einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*“

Beweis. Sei B_1 der kleinste Abschnitt in G von allen, zu denen keine ähnlichen in F vorhanden sind. (M. s. den Beweis von L). Würde es Abschnitte in F geben, denen keine ähnlichen Abschnitte in G gegenüberstehen, so würde auch unter diesen einer der kleinste sein, wir nennen ihn A_1. Zu jedem Abschnitt von A_1 würde alsdann ein ähnlicher Abschnitt von B_1 und zu jedem Abschnitt von B_1 ein ähnlicher Abschnitt von A_1 existiren. Nach Satz K wäre daher

$$B_1 \simeq A_1.$$

Dies widerspricht aber dem, dass zu B_1 kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist. Es kann daher in F keinen Abschnitt geben, dem nicht ein ähnlicher in G gegenübersteht. —

N. „*Sind F und G zwei beliebige wohlgeordnete Mengen, so sind entweder* 1) *F und G einander ähnlich, oder es giebt* 2) *einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, welcher F ähnlich ist, oder es giebt* 3) *einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, welcher G ähnlich ist; und jeder dieser drei Fälle schliesst die Möglichkeit der beiden anderen aus.*“

Beweis. Das Verhalten von F zu G kann ein *dreifaches* sein.

1) Es gehört zu jedem Abschnitte A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G und umgekehrt zu jedem Abschnitte B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F.

2) es gehört zu jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G, dagegen giebt es mindestens einen Abschnitt von G, dem kein ähnlicher Abschnitt in F entspricht.

3) Es gehört zu jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, dagegen giebt es mindestens einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher Abschnitt in G entspricht.

Der Fall, dass es sowohl einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher in G entspricht, wie auch einen Abschnitt von G giebt, dem kein ähnlicher in F entspricht, ist nicht möglich; er wird durch den Satz M ausgeschlossen.

Nach Satz K ist im *ersten* Falle

$$F \simeq G.$$

Nach Satz L giebt es im *zweiten* Falle einen bestimmten Abschnitt B_1 von B, so dass

$$B_1 \simeq F,$$

und im *dritten* Falle einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so dass

$$A_1 \simeq G.$$

Es kann aber nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $F \simeq B_1$ sein, da alsdann auch $G \simeq B_1$ wäre, gegen den Satz B, und aus demselben Grunde kann nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $G \simeq A_1$ sein.

Aber auch das Zusammenbestehen von $F \simeq B_1$ und $G \simeq A_1$ ist unmöglich; denn nach Satz A würde aus $F \simeq B_1$ die Existenz eines Abschnitts B_1' von B_1 folgen, so dass $A_1 \simeq B_1'$. Es wäre daher auch $G \simeq B_1'$ gegen den Satz B. —

O. „*Ist eine Theilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F keinem Abschnitt von F ähnlich, so ist sie F selbst ähnlich.*“

Beweis. F' ist eine wohlgeordnete Menge nach Satz C, § 12. Wäre F' weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich, so gäbe es nach Satz N einen Abschnitt F_1' von F', der F ähnlich wäre. F_1' ist aber eine Theilmenge desjenigen Abschnitts A von F, der durch dasselbe Element bestimmt ist, wie der Abschnitt F_1' von F'. Es müsste also die Menge F einer Theilmenge eines ihrer Abschnitte ähnlich sein, was dem Satz C widerspricht.

§ 14.

Die Ordnungszahlen wohlgeordneter Mengen.

Nach § 7 hat jede einfach geordnete Menge M einen bestimmten *Ordnungstypus* $\overline{M}$; es ist dies der Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergiebt, wenn unter Festhaltung der Rangordnung ihrer Elemente von der Beschaffenheit der letzteren abstrahirt wird, so dass aus ihnen lauter Einsen werden, die in einem bestimmten Rangverhältniss zu einander stehen. *Allen einander ähnlichen Mengen, und nur solchen, kommt ein und derselbe Ordnungstypus zu.*

Den Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge F nennen wir die ihr zukommende ‚*Ordnungszahl*'.

Sind α und β zwei beliebige *Ordnungszahlen*, so können sie ein *dreifaches* Verhalten zu einander haben. Sind nämlich F und G zwei wohlgeordnete Mengen derart, dass

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

so sind nach dem Satze N, § 13 *drei* sich gegenseitig ausschliessende Fälle möglich:

1) $$F \simeq G.$$

2) Es giebt einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, so dass
$$F \simeq B_1.$$

3) Es giebt einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so dass
$$G \simeq A_1.$$

Wie man leicht sieht, bleibt jeder dieser drei Fälle bestehen, wenn F und G durch ihnen ähnliche Mengen F' und G' ersetzt werden; demnach haben wir es auch mit drei sich gegenseitig ausschliessenden Beziehungen der Typen α und β zu einander zu thun.

Im ersten Falle ist $\alpha = \beta$; im zweiten sagen wir, dass $\alpha < \beta$, im dritten, dass $\alpha > \beta$.

Wir haben also den Satz:

A. „*Sind α und β zwei beliebige Ordnungszahlen, so ist entweder $\alpha = \beta$, oder $\alpha < \beta$, oder $\alpha > \beta$.*"

Aus der Erklärung des Kleiner- und Grösserseins folgt leicht:

B. „*Hat man drei Ordnungszahlen α, β, γ und ist $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, so ist auch $\alpha < \gamma$.*"

Die Ordnungszahlen bilden also in ihrer *Grössenordnung* eine einfach geordnete Menge; später wird sich zeigen, dass es eine *wohlgeordnete* Menge ist. —

Die in § 8 definirten Operationen der *Addition* und *Multiplication* von Ordnungstypen beliebiger einfach geordneter Mengen sind natürlich auch auf die Ordnungszahlen anwendbar.

Ist $\alpha = \overline{F}$, $\beta = \overline{G}$, wo F und G zwei wohlgeordnete Mengen sind, so ist

(1) $$\alpha + \beta = \overline{(F, G)}.$$

Die Vereinigungsmenge (F, G) ist offenbar auch eine wohlgeordnete Menge; wir haben also den Satz:

C. „*Die Summe zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.*"

In der Summe $\alpha + \beta$ heisst α der ‚*Augendus*', β der ‚*Addendus*'.

Da F ein *Abschnitt* von (F, G), so hat man stets:

(2) $$\alpha < \alpha + \beta.$$

Hingegen ist G nicht ein *Abschnitt*, sondern ein *Rest* von (F, G), kann daher, wie wir in § 13 sahen, der Menge (F, G) ähnlich sein; trifft dies nicht ein, so ist G nach Satz O, § 13 einem Abschnitt von (F, G) ähnlich. Es ist also

(3) $$\beta \leqq \alpha + \beta.$$

Sonach haben wir:

D. „*Die Summe zweier Ordnungszahlen ist stets grösser als der Augendus, dagegen grösser oder gleich dem Addendus. Hat man* $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, *so folgt hieraus immer, dass* $\beta = \gamma$."

Im Allgemeinen sind $\alpha + \beta$ *und* $\beta + \alpha$ *nicht gleich.* Dagegen hat man, wenn γ eine dritte Ordnungszahl ist

(4) $$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

D. h.

E. „*Bei der Addition von Ordnungszahlen ist das associative Gesetz gültig.*"

Substituirt man in der Menge G vom Typus β für *jedes* Element g je eine Menge F_g vom Typus α, so erhält man nach Satz E, § 12 eine *wohlgeordnete* Menge H, deren Typus durch die Typen α und β völlig bestimmt und das *Product* $\alpha \, . \, \beta$ genannt wird:

(5) $$\overline{F}_g = \alpha,$$

(6) $$\alpha \, . \, \beta = \overline{H}.$$

F. „*Das Product zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.*"

In dem Product $\alpha \, . \, \beta$ heisst α der ‚*Multiplicandus*', β der ‚*Multiplicator*'.

Im Allgemeinen sind $\alpha \, . \, \beta$ *und* $\beta \, . \, \alpha$ *nicht gleich.* Man hat aber (§ 8)

(7) $$(\alpha \, . \, \beta) \, . \, \gamma = \alpha \, . \, (\beta \, . \, \gamma).$$

D. h.

G. „*Bei der Multiplication von Ordnungszahlen gilt das associative Gesetz.*“

Das *distributive* Gesetz hat im Allgemeinen (§ 8) nur in folgender Form hier Gültigkeit

$$\alpha \,.\, (\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma. \tag{8}$$

In Bezug auf die Grösse des Products gilt, wie man leicht sieht, der Satz:

H. „*Ist der Multiplicator grösser als* 1, *so ist das Product zweier Ordnungszahlen stets grösser als der Multiplicandus, dagegen grösser oder gleich dem Multiplicator. Hat man* $\alpha\beta = \alpha\gamma$, *so folgt hieraus immer, dass* $\beta = \gamma$.“

Andrerseits ist offenbar:

$$\alpha \,.\, 1 = 1 \,.\, \alpha = \alpha. \tag{9}$$

Es kommt hier noch die Operation der *Subtraction* hinzu. Sind α und β zwei Ordnungszahlen und $\alpha < \beta$, so existirt immer eine bestimmte Ordnungszahl, die wir $\beta - \alpha$ nennen, welche der Gleichung genügt

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \tag{10}$$

Denn ist $\overline{G} = \beta$, so hat G einen Abschnitt B, so dass $\overline{B} = \alpha$; den zugehörigen Rest nennen wir S und haben

$$G = (B, S),$$

$$\beta = \alpha + \bar{S},$$

also

$$\beta - \alpha = \bar{S}. \tag{11}$$

Die Bestimmtheit von $\beta - \alpha$ erhellt daraus, dass der Abschnitt B von G ein völlig bestimmter (Satz D, § 13), daher auch S eindeutig gegeben ist. — Wir heben folgende, aus (4), (8) und (10) fliessende Formeln hervor:

$$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha, \tag{12}$$

$$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha. \tag{13}$$

Von Bedeutung ist es, dass die Ordnungszahlen stets auch in unendlicher Anzahl sich summiren lassen, so dass ihre Summe eine bestimmte, von der Reihenfolge ihrer Summanden abhängige Ordnungszahl ist.

Ist etwa

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$$

eine beliebige einfach unendliche Reihe von Ordnungszahlen und hat man

$$\beta_\nu = \overline{G}_\nu, \tag{14}$$

so ist (Satz E, § 12) auch

(15) $$G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots)$$

eine wohlgeordnete Menge, deren Ordnungszahl β die Summe der β_ν darstellt. Wir haben also

(16) $$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta$$

und man hat, wie aus der Definition des Productes leicht hervorgeht, stets

(17) $$\gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots) = \gamma \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \beta_2 + \cdots + \gamma \cdot \beta_\nu + \cdots.$$

Setzen wir

(18) $$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu,$$

so ist

(19) $$\alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \ldots G_\nu)}.$$

Es ist

(20) $$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu,$$

und wir können nach (10) die Zahlen β_ν durch die Zahlen α_ν wie folgt ausdrücken:

(21) $$\beta_1 = \alpha_1; \quad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu.$$

Die Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

stellt daher eine *beliebige* unendliche Reihe von Ordnungszahlen dar, welche *die Bedingung* (20) erfüllen; wir nennen sie eine ‚*Fundamentalreihe*' von Ordnungszahlen (§ 10); zwischen ihr und β besteht eine Beziehung, die sich folgendermassen aussprechen lässt:

1) β ist $> \alpha_\nu$ für jedes ν, weil die Menge $(G_1, G_2, \ldots G_\nu)$, deren Ordnungszahl α_ν ist, ein *Abschnitt* der Menge G ist, welche die Ordnungszahl β hat.

2) Ist β' *irgend eine* Ordnungszahl $< \beta$, so ist von einem gewissen ν an stets

$$\alpha_\nu > \beta'.$$

Denn da $\beta' < \beta$, so giebt es einen Abschnitt B' der Menge G vom Typus β'. Das diesen Abschnitt bestimmende Element von G muss einer von den Theilmengen G_ν, wir wollen sie G_{ν_0} nennen, angehören. Dann ist aber B' auch Abschnitt von $(G_1, G_2, \ldots G_{\nu_0})$ und folglich $\beta' < \alpha_{\nu_0}$, daher

$$\alpha_\nu > \beta'$$

für $\nu \geqq \nu_0$.

Somit ist β die auf alle α_ν der Grösse nach nächstfolgende Ordnungszahl; wir wollen sie daher die ‚*Grenze*' der α_ν für wachsende ν nennen und mit $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$ bezeichnen, so dass nach (16) und (21):

(22) $$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) + \cdots.$$

Wir können das Vorangehende in folgendem Satze aussprechen:

I. „*Zu jeder Fundamentalreihe* $\{\alpha_\nu\}$ *von Ordnungszahlen gehört eine Ordnungszahl* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$, *welche auf alle* α_ν *der Grösse nach zunächst folgt; sie wird dargestellt in der Formel* (22)."

Wird unter γ irgend eine constante Ordnungszahl verstanden, so beweist man leicht mit Hülfe der Formeln (12), (13), (17) die in folgenden Formeln enthaltenen Sätze:

$$\operatorname{Lim}_\nu (\gamma + \alpha_\nu) = \gamma + \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\operatorname{Lim}_\nu \gamma \cdot \alpha_\nu \quad = \gamma \cdot \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu. \tag{24}$$

Wir haben in § 7 bereits erwähnt, dass alle einfach geordneten Mengen von gegebener *endlicher* Cardinalzahl ν einen und denselben Ordnungstypus haben. Dies lässt sich hier wie folgt beweisen. Jede einfach geordnete Menge von *endlicher* Cardinalzahl ist eine *wohlgeordnete* Menge; denn sie muss, ebenso wie jede ihrer Theilmengen ein niederstes Element haben, was sie nach Satz B, § 12 als eine wohlgeordnete Menge kennzeichnet.

Die Typen endlicher einfach geordneter Mengen sind daher nichts Anderes als *endliche Ordnungszahlen.* Zwei verschiedenen Ordnungszahlen α und β kann aber nicht eine und dieselbe *endliche* Cardinalzahl ν zukommen. Ist nämlich etwa $\alpha < \beta$ und $\overline{G} = \beta$, so existirt, wie wir wissen, ein Abschnitt B von G, so dass $\overline{B} = \alpha$.

Es würde also der Menge G und ihrer Theilmenge B dieselbe endliche Cardinalzahl ν eignen. Dies ist nach Satz C, § 6 unmöglich.

Die *endlichen Ordnungszahlen* stimmen daher in ihren Eigenschaften mit den *endlichen Cardinalzahlen* überein.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungszahlen;* zu einer und derselben transfiniten Cardinalzahl $\mathfrak{a}$ giebt es eine *unendliche* Anzahl von Ordnungszahlen, die ein einheitliches zusammenhängendes System bilden, welches wir die ‚Zahlenclasse $Z(\mathfrak{a})$' nennen. Sie ist ein Theil der *Typenclasse* $[\mathfrak{a}]$ (§ 7).

Den nächsten Gegenstand unserer Betrachtung bildet die Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$, welche wir die *zweite Zahlenclasse* nennen wollen.

In diesem Zusammenhange verstehen wir nämlich unter der *ersten Zahlenclasse* die Gesammtheit $\{\nu\}$ aller *endlichen* Ordnungszahlen. —

§ 15.

Die Zahlen der zweiten Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$.

Die zweite Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$ ist die Gesammtheit $\{\alpha\}$ aller Ordnungstypen α wohlgeordneter Mengen von der Cardinalzahl $\aleph_0$ (§ 6).

A. „*Die zweite Zahlenclasse hat eine kleinste Zahl $\omega = \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \nu$.*"

Beweis. Unter ω verstehen wir den Typus der wohlgeordneten Menge

(1) $$F_0 = (f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots)$$

wo ν alle endlichen Ordnungszahlen durchläuft und

(2) $$f_\nu \prec f_{\nu+1}.$$

Es ist also (§ 7)

(3) $$\omega = \overline{F}_0$$

und (§ 6)

(4) $$\overline{\omega} = \aleph_0.$$

ω ist daher eine Zahl der zweiten Zahlenclasse und zwar die *kleinste*. Denn ist γ irgend eine Ordnungszahl $< \omega$, so muss sie (§ 14) Typus eines *Abschnitts* von F_0 sein. F_0 hat aber nur Abschnitte

$$A = (f_1, f_2, \ldots f_\nu)$$

mit *endlicher* Ordnungszahl ν. Es ist daher $\gamma = \nu$.

Es giebt also keine *transfiniten* Ordnungszahlen, welche kleiner wären als ω, die daher die kleinste von ihnen ist. Nach der in § 14 gegebenen Erklärung von $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$ ist offenbar $\omega = \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \nu$.

B. „*Ist α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so folgt auf sie als nächstgrössere Zahl derselben Zahlenclasse die Zahl $\alpha + 1$.*"

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge vom Typus α und von der Cardinalzahl $\aleph_0$:

(5) $$\overline{F} = \alpha,$$

(6) $$\overline{\alpha} = \aleph_0.$$

Wir haben, wenn unter g ein neu hinzutretendes Element verstanden wird,

(7) $$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}.$$

Da F ein Abschnitt von (F, g) ist, so haben wir

(8) $$\alpha + 1 > \alpha.$$

Es ist

$$\overline{\alpha + 1} = \overline{\alpha} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (\S\ 6).$$

Die Zahl $\alpha + 1$ gehört also zur zweiten Zahlenclasse. Zwischen α und $\alpha + 1$ giebt es aber keine Ordnungszahlen; denn jede Zahl γ, die $< \alpha + 1$, entspricht als Typus einem Abschnitte von (F, g); ein solcher kann nur entweder F oder ein Abschnitt von F sein. γ ist also entweder $=$ oder $< \alpha$. —

C. „*Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ irgend eine Fundamentalreihe von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so gehört auch die auf sie der Grösse nach zunächst folgende Zahl $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$* (§ 14) *der zweiten Zahlenclasse an.*“

Beweis. Nach § 14 ergiebt sich aus der Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ die Zahl $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, indem man eine andere Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ herstellt, so dass

$$\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ldots$$

Sind dann $G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots$ wohlgeordnete Mengen derart, dass

$$\overline{G}_\nu = \beta_\nu,$$

so ist auch

$$G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots)$$

eine wohlgeordnete Menge und

$$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \overline{G}.$$

Es handelt sich daher nur um den Nachweis, dass

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_0.$$

Da aber die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehören, so ist

$$\overline{\overline{G}}_\nu \leqq \aleph_0,$$

daher

$$\overline{\overline{G}} \leqq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

G ist aber jedenfalls eine transfinite Menge, also ist der Fall $\overline{\overline{G}} < \aleph_0$ ausgeschlossen. —

Zwei *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha_\nu'\}$ von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse nennen wir (§ 10) ‚*zusammengehörig*‘, in Zeichen

(9) $$\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha_\nu'\},$$

wenn zu *jedem* ν endliche Zahlen λ_0, μ_0 vorhanden sind, so dass

(10) $$\alpha_\lambda' > \alpha_\nu, \quad \lambda \geqq \lambda_0,$$

und

(11) $$\alpha_\mu > \alpha_\nu', \quad \mu \geqq \mu_0.$$

D. „*Die zu zwei Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$, $\{\alpha_\nu'\}$ *gehörigen Grenzzahlen* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$ *und* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu'$ *sind dann und nur dann gleich, wenn* $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$."

Beweis. Der Kürze halber setzen wir $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu = \beta$, $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu' = \gamma$.

Nehmen wir zuerst an, es sei $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$ so behaupten wir, dass $\beta = \gamma$. Wäre nämlich β nicht gleich γ, so müsste eine von diesen beiden Zahlen die kleinere sein, etwa $\beta < \gamma$. Von einem gewissen ν an wäre $\alpha_\nu' > \beta$ (§ 14), daher auch wegen (11) von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \beta$. Dies ist aber unmöglich, weil $\beta = \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$, also für alle μ $\alpha_\mu < \beta$.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, dass $\beta = \gamma$, so muss, weil $\alpha_\nu < \gamma$, von einem gewissen λ an $\alpha_\lambda' > \alpha_\nu$, und weil $\alpha_\nu' < \beta$, von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \alpha_\nu'$ sein; d. h. es ist $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$.

E. „*Ist* α *irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse*, ν_0 *eine beliebige endliche Ordnungszahl, so ist* $\nu_0 + \alpha = \alpha$ *und daher auch* $\alpha - \nu_0 = \alpha$."

Beweis. Wir überzeugen uns zuerst von der Richtigkeit des Satzes wenn $\alpha = \omega$. Es ist

$$\omega = \overline{(f_1, f_2 \ldots f_\nu, \ldots)},$$
$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0})},$$

daher

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0}, f_1, f_2, \ldots f_\nu \ldots)} = \omega .$$

Ist aber $\alpha > \omega$, so haben wir

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega),$$
$$\nu_0 + \alpha = (\nu_0 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha .$$

F. „*Ist* ν_0 *irgend eine endliche Ordnungszahl, so ist* $\nu_0 \cdot \omega = \omega$."

Beweis. Um eine Menge vom Typus $\nu_0 \cdot \omega$ zu erhalten, hat man für die einzelnen Elemente f_ν der Menge $(f_1, f_2, \ldots f_\nu \ldots)$ Mengen $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0})$ vom Typus ν_0 zu substituiren. Man erhält die Menge

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \ldots g_{2,\nu_0}, \ldots g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0}, \ldots),$$

welche der Menge $\{f_\nu\}$ offenbar ähnlich ist; daher ist

$$\nu_0 \omega = \omega .$$

Kürzer ergiebt sich dasselbe wie folgt: nach (24) § 14 ist, da $\omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu$,

$$\nu_0 \omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu_0 \nu .$$

Andrerseits ist

$$\{\nu_0 \nu\} \| \{\nu\},$$

mithin

$$\operatorname{Lim}_\nu \nu_0 \nu = \operatorname{Lim}_\nu \nu = \omega,$$

also

$$\nu_0 \omega = \omega .$$

G. „*Man hat immer*

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega,$$

unter α *eine Zahl der zweiten, unter* ν_0 *eine solche der ersten Zahlenclasse verstanden.*“

Beweis. Wir haben

$$\operatorname{Lim}_{\nu} \nu = \omega.$$

Nach (24) § 14 ist daher

$$(\alpha+\nu_0)\omega = \operatorname{Lim}_{\nu} (\alpha+\nu_0)\nu.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(\alpha+\nu_0)\nu &= \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{2} + \cdots + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{\nu}\\ &= \alpha + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{1} + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{2} \cdots \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{\nu-1} + \nu_0\\ &= \overbrace{\alpha}^{1} + \overbrace{\alpha}^{2} + \cdots + \overbrace{\alpha}^{\nu} + \nu_0\\ &= \alpha\nu + \nu_0.\end{aligned}$$

Man hat nun, wie leicht zu sehen,

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \,||\, \{\alpha\nu\},$$

und folglich

$$\operatorname{Lim}_{\nu} (\alpha+\nu_0)\nu = \operatorname{Lim}_{\nu} (\alpha\nu+\nu_0) = \operatorname{Lim}_{\nu} \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. „*Ist* α *irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so bildet die Gesammtheit* $\{\alpha'\}$ *aller Zahlen* α' *der ersten und zweiten Zahlenclasse, welche kleiner sind als* α, *in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus* α.“

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge derart, dass $\overline{F} = \alpha$; f_1 sei das niederste Element von F. Ist α' eine beliebige Ordnungszahl $< \alpha$, so giebt es (§ 14) einen bestimmten Abschnitt A' von F, so dass

$$\overline{A'} = \alpha',$$

und umgekehrt bestimmt jeder Abschnitt A' durch seinen Typus $\overline{A'} = \alpha'$ eine Zahl $\alpha' < \alpha$ der ersten oder zweiten Zahlenclasse; denn, da $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, so kann $\overline{\overline{A'}}$ nur eine endliche Cardinalzahl oder $\aleph_0$ sein.

Der Abschnitt A' wird durch ein Element $f' \succ f_1$ von F bestimmt und umgekehrt bestimmt jedes Element $f' \succ f_1$ von F einen Abschnitt A' von F. Sind f' und f'' zwei Elemente $\succ f_1$ von F, A' und A'' die durch sie bestimmten Abschnitte von F, α' und α'' deren Ordnungstypen, und ist etwa $f' \prec f''$, so ist (§ 13) $A' < A''$ und daher $\alpha' < \alpha''$.

Setzen wir daher $F = (f_1, F')$, so wird, wenn man dem Element f' von F' das Element α' von $\{\alpha'\}$ zuordnet, eine Abbildung dieser beiden Mengen gewonnen. Es ist somit

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Nun ist aber $\overline{F'} = \alpha - 1$ und nach Satz E $\alpha - 1 = \alpha$, daher

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Da $\overline{\alpha} = \aleph_0$, so ist auch $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$; es gilt daher:

I. „*Die Menge* $\{\alpha'\}$ *aller Zahlen* α' *der ersten und zweiten Zahlenclasse, welche kleiner sind als eine Zahl* α *der zweiten Zahlenclasse, hat die Cardinalzahl* $\aleph_0$."

K. „*Jede Zahl* α *der zweiten Zahlenclasse ist entweder derart, dass sie aus einer nächst kleineren* $\underline{\alpha}_1$ *durch Hinzufügung der* 1 *hervorgeht:*

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1,$$

oder es lässt sich eine Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ *von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse angeben, so dass*

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu.\text{“}$$

Beweis. Sei $\alpha = \overline{F}$. Hat F ein dem Range nach höchstes Element g, so ist $F = (A, g)$, wo A der durch g bestimmte Abschnitt von F ist. Wir haben dann den ersten Fall, nämlich

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \underline{\alpha}_1 + 1.$$

Es existirt also eine *nächst kleinere* Zahl, die eben $\underline{\alpha}_1$ genannt wird.

Besitzt aber F kein höchstes Element, so fassen wir den Inbegriff $\{\alpha'\}$ aller Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse ins Auge, welche kleiner als α sind. Nach Satz H ist die Menge $\{\alpha'\}$ in ihrer Grössenordnung ähnlich der Menge F; unter den *Zahlen* α' ist daher keine die grösste. Nach Satz I lässt sich die Menge $\{\alpha'\}$ in die Form $\{\alpha_\nu'\}$ einer einfach unendlichen Reihe bringen. Gehen wir von α_1' aus, so werden im Allgemeinen in dieser von der Grössenordnung abweichenden Rangordnung die nächstfolgenden $\alpha_2', \alpha_3' \ldots$ kleiner sein als α_1'; jedenfalls aber kommen im weiteren Verlaufe Glieder vor, die $> \alpha_1'$; denn α_1' kann nicht grösser sein als alle anderen Glieder, weil unter den Zahlen $\{\alpha_\nu'\}$ keine grösste vorhanden ist. Die mit dem kleinsten Index versehene Zahl α_ν', welche grösser ist als α_1', sei α'_{ϱ_2}. Ebenso sei α'_{ϱ_3} die mit dem kleinsten Index versehene Zahl der Reihe $\{\alpha_\nu'\}$, welche grösser ist als α'_{ϱ_2}. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Reihe wachsender Zahlen, eine Fundamentalreihe:

$$\alpha'_1, \alpha'_{\varrho_2}, \alpha'_{\varrho_3}, \ldots \alpha'_{\varrho_\nu}, \ldots.$$

Es ist

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \cdots < \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \cdots,$$

$$\alpha_1' < \alpha'_{\varrho_2} < \alpha'_{\varrho_3} < \cdots < \alpha'_{\varrho_\nu} < \alpha'_{\varrho_{\nu+1}}, \cdots,$$

$$\alpha'_\mu < \alpha'_{\varrho_\nu} \quad \text{stets wenn} \quad \mu < \varrho_\nu,$$

und da offenbar $\nu \overline{\overline{<}} \varrho_\nu$, so haben wir immer

$$\alpha'_\nu \leqq \alpha'_{\varrho_\nu}.$$

Man sieht hieraus, dass jede Zahl α_ν', daher auch jede Zahl $\alpha' < \alpha$ von Zahlen α'_{ϱ_ν} für hinreichend grosse Werthe von ν übertroffen wird.

α ist aber die auf alle Zahlen α' der Grösse nach zunächst folgende Zahl, mithin auch die nächst grössere Zahl in Bezug auf alle α'_{ϱ_ν}. Setzen wir daher $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha_{\varrho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, so ist

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu.$$

Aus den Sätzen B, C, ... K erhellt, dass die Zahlen der zweiten Zahlenclasse sich auf zwei Weisen aus kleineren Zahlen ergeben. Die einen, wir nennen sie *Zahlen erster Art*, erhält man aus einer nächstkleineren $\underline{\alpha}_1$ durch Hinzufügung der 1, nach der Formel

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1;$$

die anderen, wir nennen sie *Zahlen zweiter Art*, sind so beschaffen, dass es für sie *eine nächstkleinere* $\underline{\alpha}_1$ *gar nicht giebt;* diese gehen aber aus *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ als deren *Grenzzahlen* hervor, nach der Formel

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu.$$

α ist hier die auf sämmtliche Zahlen α_ν der Grösse nach *nächstfolgende* Zahl.

Diese beiden Weisen des Hervorgehens grösserer Zahlen aus kleineren nennen wir das *erste und das zweite Erzeugungsprincip* der Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

§ 16.

Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse ist gleich der zweitgrössten transfiniten Cardinalzahl Alef-eins.

Bevor wir uns in den folgenden Paragraphen einer eingehenderen Betrachtung der Zahlen der zweiten Zahlenclasse und der sie beherrschenden Gesetzmässigkeit zuwenden, wollen wir die Frage nach der Cardinalzahl beantworten, welche der Menge $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ aller dieser Zahlen zukommt.

A. „*Die Gesammtheit* $\{\alpha\}$ *aller Zahlen* α *der zweiten Zahlenclasse bildet in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge.*“

Beweis. Verstehen wir unter A_α die Gesammtheit aller Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse, die kleiner sind als eine gegebene Zahl α, in ihrer Grössenordnung, so ist A_α eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\alpha - \omega$. Dies geht aus Satz H, § 14 hervor. Die dort mit $\{\alpha'\}$ bezeichnete Menge aller Zahlen α' der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse ist aus $\{\nu\}$ und A_α zusammengesetzt, so dass

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\}, A_\alpha).$$

Daher ist

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A_\alpha}$$

und da

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha, \quad \overline{\{\nu\}} = \omega,$$

so ist

$$\overline{A_\alpha} = \alpha - \omega.$$

Sei J irgend eine Theilmenge von $\{\alpha\}$ derart, dass es Zahlen in $\{\alpha\}$ giebt, die grösser sind als alle Zahlen von J. Sei etwa α_0 eine dieser Zahlen. Dann ist auch J eine Theilmenge von A_{α_0+1} und zwar eine solche, dass mindestens die Zahl α_0 von A_{α_0+1} grösser ist, als alle Zahlen von J. Da A_{α_0+1} eine wohlgeordnete Menge ist, so muss (§ 12) eine Zahl α' von A_{α_0+1}, die daher auch eine Zahl von $\{\alpha\}$ ist, auf alle Zahlen von J zunächst folgen. Es ist somit die Bedingung II, § 12 an $\{\alpha\}$ erfüllt; die Bedingung I, § 12 ist auch erfüllt, weil $\{\alpha\}$ die kleinste Zahl ω hat. —

Wendet man nun auf die wohlgeordnete Menge $\{\alpha\}$ die Sätze A und C, § 12 an, so erhält man die folgenden Sätze:

B. „*Jeder Inbegriff von verschiedenen Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse hat eine kleinste Zahl, ein Minimum.*“

C. „*Jeder Inbegriff von verschiedenen, in ihrer Grössenordnung aufgefassten Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse bildet eine wohlgeordnete Menge.*“

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse von derjenigen der ersten, welche $\aleph_0$ ist, verschieden ist.

D. „*Die Mächtigkeit der Gesammtheit* $\{\alpha\}$ *aller Zahlen* α *der zweiten Zahlenclasse ist nicht gleich* $\aleph_0$.“

Beweis. Wäre $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$, so könnte man die Gesammtheit $\{\alpha\}$ in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$$

bringen, so dass $\{\gamma_\nu\}$ die Gesammtheit *aller* Zahlen der zweiten

Zahlenclasse in einer von der Grössenordnung abweichenden Rangordnung darstellen würde, und es enthielte $\{\gamma_\nu\}$ ebensowenig wie $\{\alpha\}$ eine grösste Zahl.

Von γ_1 ausgehend sei γ_{ϱ_2} das mit dem kleinsten Index versehene Glied jener Reihe $> \gamma_1$, γ_{ϱ_3} das mit dem kleinsten Index versehene Glied $> \gamma_{\varrho_2}$ u. s. w. Wir erhalten eine unendliche Reihe wachsender Zahlen

$$\gamma_1, \gamma_{\varrho_2}, \ldots \gamma_{\varrho_\nu}, \ldots,$$

so dass

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 \cdots \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \cdots,$$

$$\gamma_1 < \gamma_{\varrho_2} < \gamma_{\varrho_3} \cdots \gamma_{\varrho_\nu} < \gamma_{\varrho_{\nu+1}},$$

$$\gamma_\nu \leqq \gamma_{\varrho_\nu}.$$

Nach Satz C, § 14 würde es eine bestimmte Zahl δ der zweiten Zahlenclasse geben, nämlich

$$\delta = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma_{\varrho_\nu},$$

welche grösser wäre, als alle γ_{ϱ_ν}; folglich wäre auch

$$\delta > \gamma_\nu$$

für jedes ν.

Nun enthält aber $\{\gamma_\nu\}$ *alle* Zahlen der zweiten Zahlenclasse, folglich auch die Zahl δ; es wäre also für ein bestimmtes ν_0

$$\delta = \gamma_{\nu_0},$$

welche Gleichung mit der Relation $\delta > \gamma_{\nu_0}$ unverträglich ist. Die Annahme $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ führt also zu einem Widerspruch.

E. „*Ein beliebiger Inbegriff $\{\beta\}$ von verschiedenen Zahlen β der zweiten Zahlenclasse hat, wenn er unendlich ist, entweder die Cardinalzahl $\aleph_0$ oder die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ der zweiten Zahlenclasse.*"

Beweis. Die Menge $\{\beta\}$ in ihrer Grössenordnung ist als Theilmenge der wohlgeordneten Menge $\{\alpha\}$ nach Satz O, § 13 entweder einem Abschnitte A_{α_0} der letzteren (d. h. dem Inbegriffe aller Zahlen der zweiten Zahlenclasse, welche $< \alpha_0$, in ihrer Grössenordnung) oder der Gesammtheit $\{\alpha\}$ selbst ähnlich. Wie im Beweise von Satz A gezeigt wurde, ist $\overline{A_{\alpha_0}} = \alpha_0 - \omega$.

Wir haben also entweder $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$ oder $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$, daher auch $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist aber $\overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ entweder eine endliche Cardinalzahl oder $= \aleph_0$ (Satz I, § 15). Der erste Fall ist hier ausgeschlossen, weil $\{\beta\}$ als unendliche Menge vorausgesetzt ist. Somit ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \aleph_0$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. „*Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse $\{\alpha\}$ ist die zweitgrösste transfinite Cardinalzahl Alef-eins.*"

Beweis. Es giebt keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche $> \aleph_0$ und $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$ wäre. Denn sonst müsste nach § 2 eine unendliche Theilmenge $\{\beta\}$ von $\{\alpha\}$ existiren, so dass $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \mathfrak{a}$.

Dem soeben bewiesenen Satze E zufolge hat aber die Theilmenge $\{\beta\}$ entweder die Cardinalzahl $\aleph_0$ oder die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist daher die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ nothwendig die auf $\aleph_0$ der Grösse nach nächstfolgende Cardinalzahl, welche wir $\aleph_1$ nennen.

In der zweiten Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$ besitzen wir daher den natürlichen *Repräsentanten* für die zweitgrösste transfinite Cardinalzahl *Alef-eins*.

§ 17.

Die Zahlen von der Form $\omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu$.

Es ist zweckmässig, sich zunächst mit denjenigen Zahlen von $Z(\aleph_0)$ vertraut zu machen, welche ganze algebraische Functionen endlichen Grades von ω sind. Jede derartige Zahl lässt sich, und dies nur auf eine Weise, in die Form bringen

$$(1) \qquad \varphi = \omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu,$$

wo μ, ν_0 endlich und von Null verschieden sind, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ aber auch Null sein können. Dies beruht darauf, dass

$$(2) \qquad \omega^{\mu'} \nu' + \omega^\mu \nu = \omega^\mu \nu,$$

falls $\mu' < \mu$ und $\nu > 0$, $\nu' > 0$.

Denn nach (8), § 14 ist

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

und nach Satz E, § 15

$$\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Es können daher in einem Aggregate von der Form

$$\cdots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu + \cdots$$

alle Glieder fortgelassen werden, denen nach rechts hin Glieder höheren Grades in ω folgen. Dies Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis die in (1) gegebene Form erreicht ist. Wir heben noch hervor, dass

$$(3) \qquad \omega^\mu \nu + \omega^\mu \nu' = \omega^\mu(\nu + \nu').$$

Vergleichen wir nun die Zahl φ mit einer Zahl ψ derselben Art

$$(4) \qquad \psi = \omega^\lambda \varrho_0 + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Sind μ und λ verschieden und etwa $\mu < \lambda$, so haben wir nach (2)

$$\varphi + \psi = \psi,$$

daher

$$\varphi < \psi.$$

Sind $\mu = \lambda$, ν_0 und ϱ_0 verschieden, und etwa $\nu_0 < \varrho_0$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^\lambda(\varrho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\mu\right) = \psi,$$

daher auch

$$\varphi < \psi.$$

Ist endlich

$$\mu = \lambda, \quad \nu_0 = \varrho_0, \; \nu_1 = \varrho_1, \ldots \nu_{\sigma-1} = \varrho_{\sigma-1}, \quad \sigma \overline{\gtrless} \mu,$$

dagegen ν_σ von ϱ_σ verschieden und etwa $\nu_\sigma < \varrho_\sigma$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^{\lambda-\sigma}(\varrho_\sigma - \nu_\sigma) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\varrho_{\sigma+1} + \cdots + \varrho_\mu\right) = \psi,$$

daher wieder

$$\varphi < \psi.$$

Wir sehen also, dass nur bei völliger Identität der Ausdrücke φ und ψ die durch sie dargestellten Zahlen gleich sein können.

Die *Addition* von φ und ψ führt zu folgendem Resultat:

1) ist $\mu < \lambda$, so ist, wie schon oben bemerkt wurde,

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Ist $\mu = \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^\lambda(\nu_0 + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

3) Ist $\mu > \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^\mu\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^\lambda(\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Um die Multiplication von φ und ψ auszuführen, bemerken wir, dass, wenn ϱ eine endliche von Null verschiedene Zahl ist, die Formel besteht:

(5) $$\varphi\varrho = \omega^\mu\nu_0\varrho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu.$$

Sie ergiebt sich leicht durch Ausführung der aus ϱ Gliedern bestehenden Summe $\varphi + \varphi + \cdots + \varphi$.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes G, § 15 erhält man ferner, unter Berücksichtigung von F, § 15

(6) $$\varphi\omega = \omega^{\mu+1},$$

daher auch

(7) $$\varphi\omega^\lambda = \omega^{\mu+\lambda}.$$

Nach dem distributiven Gesetze [(8), § 14] ist

$$\varphi\psi = \varphi\omega^\lambda\varrho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varphi\omega\varrho_{\lambda-1} + \varphi\varrho_\lambda.$$

Die Formeln (4), (5) und (7) liefern daher folgendes Resultat:

1) Ist $\varrho_\lambda = 0$, so hat man

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} = \omega^\mu\psi.$$

2) Ist ϱ_λ nicht $= 0$, so ist

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} + \omega^\mu\nu_0\varrho_\lambda + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu.$$

Zu einer bemerkenswerthen Zerlegung der Zahlen φ kommen wir auf folgende Weise: Es sei

$$\varphi = \omega^{\mu} \varkappa_0 + \omega^{\mu_1} \varkappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_\tau} \varkappa_\tau, \tag{8}$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\tau \geqq 0$$

und $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ von Null verschiedene endliche Zahlen sind. Wir haben dann

$$\varphi = (\omega^{\mu_1} \varkappa_1 + \omega^{\mu_2} \varkappa_2 + \cdots + \omega^{\mu_\tau} \varkappa_\tau)(\omega^{\mu - \mu_1} \varkappa_0 + 1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhalten wir

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau} \varkappa_\tau (\omega^{\mu_{\tau-1} - \mu_\tau} \varkappa_{\tau-1} + 1)(\omega^{\mu_{\tau-2} - \mu_{\tau-1}} \varkappa_{\tau-2} + 1) \cdots (\omega^{\mu - \mu_1} \varkappa_0 + 1).$$

Nun ist aber

$$\omega^{\lambda} \varkappa + 1 = (\omega^{\lambda} + 1) \varkappa,$$

falls $\varkappa$ eine von Null verschiedene endliche Zahl ist, daher:

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau} \varkappa_\tau (\omega^{\mu_{\tau-1} - \mu_\tau} + 1) \varkappa_{\tau-1} (\omega^{\mu_{\tau-2} - \mu_{\tau-1}} + 1) \varkappa_{\tau-2} \cdots \\ \cdots (\omega^{\mu - \mu_1} + 1) \varkappa_0. \tag{9}$$

Die hier vorkommenden Factoren $\omega^{\lambda} + 1$ sind sämmtlich *unzerlegbar*, und es lässt sich eine Zahl φ in dieser Productform nur *auf eine einzige Weise* darstellen. Ist $\mu_\tau = 0$, so ist φ von der *ersten* Art, in allen anderen Fällen von der *zweiten* Art.

Die scheinbare Abweichung der Formeln dieses Paragraphen von denjenigen, welche bereits in Bd. XXI, pag. 585 (Grundl. pag. 41) gegeben wurden, hängt nur mit der veränderten Schreibweise des Productes zweier Zahlen zusammen, da wir nun den Multiplicandus links, den Multiplicator rechts setzen, damals jedoch die entgegengesetzte Regel befolgten.

§ 18.

Die Potenz γ^{α} im Gebiete der zweiten Zahlenclasse.

Es sei ξ eine *Veränderliche*, deren Gebiet aus den Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der 0 besteht. γ und δ seien zwei demselben Gebiete angehörige *Constanten* und zwar

$$\delta > 0, \quad \gamma > 1.$$

Wir können dann folgenden Satz begründen:

A. „*Es giebt eine einzige, völlig bestimmte eindeutige Function* $f(\xi)$ *der Veränderlichen* ξ, *welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1) $f(0) = \delta$.

2) *Sind* ξ' *und* ξ'' *zwei beliebige Werthe von* ξ, *und ist*

$$\xi' < \xi'',$$

so ist

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

3) *Für jeden Werth von* ξ *ist*

$$f(\xi+1)=f(\xi)\gamma.$$

4) *Ist* $\{\xi_\nu\}$ *eine beliebige Fundamentalreihe, so ist auch* $\{f(\xi_\nu)\}$ *eine solche und hat man*

$$\xi=\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

so ist

$$f(\xi)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\xi_\nu).\text{“}$$

Beweis. Nach 1) und 3) haben wir

$$f(1)=\delta\gamma,\ f(2)=\delta\gamma\gamma,\ f(3)=\delta\gamma\gamma\gamma,\ldots$$

und man hat, wegen $\delta>0$, $\gamma>1$

$$f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(\nu)<f(\nu+1),\cdots.$$

Somit ist die Function $f(\xi)$ für das Gebiet $\xi<\omega$ völlig bestimmt.

Nehmen wir nun an, es stehe der Satz fest für alle Werthe von ξ, die $<\alpha$ sind, wo α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse ist, so ist er auch gültig für $\xi\leqq\alpha$. Denn ist α von der *ersten* Art, so folgt aus 3):

$$f(\alpha)=f(\underline{\alpha}_1)\gamma>f(\underline{\alpha}_1);$$

es sind also auch die Bedingungen 2), 3), 4) für $\xi\leqq\alpha$ erfüllt. Ist aber α von der *zweiten* Art und $\{\alpha_\nu\}$ eine Fundamentalreihe derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu=\alpha$, so folgt aus 2), dass auch $\{f(\alpha_\nu)\}$ eine Fundamentalreihe ist, und aus 4), dass $f(\alpha)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu)$. Nimmt man eine andere Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu'\}$ derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu'=\alpha$, so sind wegen 2) die beiden Fundamentalreihen $\{f(\alpha_\nu)\}$ und $\{f(\alpha_\nu')\}$ zusammengehörig; es ist daher auch $f(\alpha)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu')$. Der Werth $f(\alpha)$ ist also auch in diesem Falle *eindeutig* bestimmt.

Ist α' irgend eine Zahl $<\alpha$, so überzeugt man sich leicht, dass $f(\alpha')<f(\alpha)$. Es sind also die Bedingungen 2), 3), 4) auch für $\xi\overline{\gtrless}\alpha$ erfüllt. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes *für alle Werthe* von ξ.

Denn gäbe es Ausnahmewerthe von ξ, für welche er nicht bestände, so müsste nach Satz B, § 16 einer derselben, wir nennen ihn α, der *kleinste* sein. Es wäre dann der Satz gültig für $\xi<\alpha$, nicht aber für $\xi\leqq\alpha$, was mit dem soeben Bewiesenen in Widerspruch stehen würde.

Es giebt daher für das ganze Gebiet von ξ *eine* und nur eine Function $f(\xi)$, welche die Bedingungen 1) bis 4) erfüllt.

Legt man der Constanten δ den Werth 1 bei, und wird alsdann die Function $f(\xi)$ mit

$$\gamma^\xi$$

bezeichnet, so können wir folgenden Satz formuliren:

B. „*Ist* γ *eine beliebige der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Constante* > 1, *so giebt es eine ganz bestimmte Function* γ^ξ *von* ξ, *so dass*

1) $\gamma^0 = 1$.

2) *Wenn* $\xi' < \xi''$, *so ist* $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.

3) *Für jeden Werth von* ξ *ist* $\gamma^{\xi+1} = \gamma^\xi \gamma$.

4) *Ist* $\{\xi_\nu\}$ *eine Fundamentalreihe, so ist auch* $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ *eine solche, und man hat, falls* $\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, *auch*

$$\gamma^\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma^{\xi_\nu}.\text{“}$$

Wir können aber auch den Satz aussprechen:

C. „*Ist* $f(\xi)$ *die in Satz* A *charakterisirte Function von* ξ, *so ist*

$$f(\xi) = \delta\gamma^\xi.\text{“}$$

Beweis. Im Hinblick auf (24), § 14 überzeugt man sich leicht, dass die Function $\delta\gamma^\xi$ nicht nur den Bedingungen 1), 2), 3) des Satzes A, sondern auch der Bedingung 4) desselben genügt. Wegen der Einzigkeit der Function $f(\xi)$ muss sie daher mit $\delta\gamma^\xi$ identisch sein.

D. „*Sind* α *und* β *zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.\text{“}$$

Beweis. Wir betrachten die Function $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$.

Im Hinblick darauf, dass nach Formel (23), § 14

$$\operatorname*{Lim}_\nu (\alpha + \xi_\nu) = \alpha + \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

erkennen wir, dass $\varphi(\xi)$ folgende vier Bedingungen erfüllt:

1) $\varphi(0) = \gamma^\alpha$.

2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$.

3) Für jeden Werth von ξ ist $\varphi(\xi+1) = \varphi(\xi)\gamma$.

4) Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu = \xi$, so ist

$$\varphi(\xi) = \operatorname*{Lim}_\nu \varphi(\xi_\nu).$$

Nach Satz C ist daher, $\delta = \gamma^\alpha$ gesetzt,

$$\varphi(\xi) = \gamma^\alpha \gamma^\xi.$$

Setzen wir hierin $\xi = \beta$, so folgt

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.$$

E. „*Sind* α *und* β *zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta.\text{“}$$

Beweis. Betrachten wir die Function $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha \xi}$ und bemerken, dass nach (24), § 14 stets $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha\xi_\nu = \alpha \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, so können wir auf Grund des Satzes D Folgendes behaupten:

1) $\psi(0) = 1$.

2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$.

3) Für jeden Werth von ξ ist $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)\gamma^\alpha$.

4) Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe, so ist auch $\{\psi(\xi_\nu)\}$ eine solche und man hat, falls $\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, auch $\psi(\xi) = \operatorname*{Lim}_\nu \psi(\xi_\nu)$.

Man hat daher nach Satz C, wenn darin $\delta = 1$ und γ^α für γ gesetzt wird:

$$\psi(\xi) = (\gamma^\alpha)^\xi. \text{ —}$$

Ueber die *Grösse* von γ^ξ im Vergleich mit ξ lässt sich der folgende Satz aussprechen:

F. „*Ist* $\gamma > 1$, *so hat man für jeden Werth von* ξ

$$\gamma^\xi \geqq \xi.\text{“}$$

Beweis. In den Fällen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ leuchtet der Satz unmittelbar ein. Wir zeigen nun, dass, wenn er für alle Werthe von ξ gilt, die kleiner sind als eine gegebene Zahl $\alpha > 1$, er auch für $\xi = \alpha$ richtig ist.

Ist α von der *ersten* Art, so ist vorausgesetztermassen

$$\underline{\alpha}_1 \leqq \gamma^{\underline{\alpha}_1},$$

daher auch

$$\underline{\alpha}_1 \gamma \overline{\overline{<}} \gamma^{\underline{\alpha}_1} \gamma = \gamma^\alpha,$$

mithin

$$\gamma^\alpha \geqq \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_1(\gamma - 1).$$

Da sowohl $\underline{\alpha}_1$ wie $\gamma - 1$ mindestens $= 1$ sind und $\underline{\alpha}_1 + 1 = \alpha$ ist, so folgt

$$\gamma^\alpha \geqq \alpha.$$

Ist dagegen α von der *zweiten* Art und zwar

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu,$$

so ist, wegen $\alpha_\nu < \alpha$, der Voraussetzung gemäss

$$\alpha_\nu \leqq \gamma^{\alpha_\nu},$$

daher auch

$$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu \leqq \operatorname*{Lim}_\nu \gamma^{\alpha_\nu},$$

d. h.

$$\alpha \leqq \gamma^\alpha.$$

Würde es nun Werthe von ξ geben, für welche

$$\xi > \gamma^\xi,$$

so müsste unter ihnen nach Satz B, § 16 einer der *kleinste* sein; wird dieser mit α bezeichnet, so hätte man für $\xi < \alpha$

$$\xi \leqq \gamma^{\xi},$$

dagegen

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

was dem vorhin Bewiesenan widerspricht. Somit haben wir für alle Werthe von ξ

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

§ 19.

Die Normalform der Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

Es sei α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse. Die Potenz ω^{ξ} wird für hinreichend grosse Werthe von ξ grösser als α. Dies ist nach Satz F, § 18 stets der Fall für $\xi > \alpha$, im Allgemeinen wird es aber auch schon für kleinere Werthe von ξ eintreten.

Nach Satz B, § 16 muss unter den Werthen von ξ, für welche

$$\omega^{\xi} > \alpha$$

einer *der kleinste* sein; wir nennen ihn β und überzeugen uns leicht, dass er *nicht* eine Zahl der *zweiten* Art sein kann. Wäre nämlich

$$\beta = \operatorname*{Lim}_{\nu} \beta_{\nu}$$

so hätte man, da $\beta_{\nu} < \beta$,

$$\omega^{\beta_{\nu}} \overset{=}{<} \alpha,$$

daher auch

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\beta_{\nu}} \overset{=}{<} \alpha.$$

Es wäre also

$$\omega^{\beta} \overset{=}{<} \alpha,$$

während doch

$$\omega^{\beta} > \alpha.$$

Also ist β von der *ersten* Art. Wir bezeichnen $\underline{\beta}_1$ mit α_0, so dass $\beta = \alpha_0 + 1$, und können daher behaupten, *dass es eine völlig bestimmte Zahl α_0 der ersten oder zweiten Zahlenclasse giebt, welche die beiden Bedingungen erfüllt:*

$$\text{(1)} \qquad \omega^{\alpha_0} \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha.$$

Aus der zweiten Bedingung schliessen wir, dass *nicht für alle endlichen Zahlwerthe von ν*

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leqq \alpha,$$

da sonst auch $\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leqq \alpha$ wäre.

Die *kleinste endliche Zahl ν* für welche

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

bezeichnen wir mit $\varkappa_0 + 1$. Wegen (1) ist $\varkappa_0 > 0$.

Es giebt also auch eine völlig bestimmte Zahl $\varkappa_0$ der ersten Zahlenclasse, so dass

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0+1) > \alpha \tag{2}$$

ist. Setzen wir $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, so haben wir

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha' \tag{3}$$

und

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega. \tag{4}$$

Es lässt sich aber α nur auf *eine einzige* Weise unter den Bedingungen (4) in der Form (3) darstellen. Denn aus (3) und (4) folgen rückwärts zunächst die Bedingungen (2) und daraus die Bedingungen (1).

Den Bedingungen (1) genügt aber nur die Zahl $\alpha_0 = \beta_{-1}$, und durch die Bedingungen (2) ist die endliche Zahl $\varkappa_0$ eindeutig bestimmt. Aus (1) und (4) folgt noch mit Rücksicht auf Satz F, § 18, dass

$$\alpha' < \alpha, \qquad \alpha_0 \leqq \alpha. \tag{5}$$

Wir können daher die Richtigkeit des folgenden Satzes behaupten:

A. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenclasse lässt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise auf die Form bringen:*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha',$$

so dass

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega;$$

α' ist immer kleiner als α, dagegen α_0 kleiner oder gleich α."

Ist α' eine Zahl der *zweiten* Zahlenclasse, so lässt sich auch auf sie der Satz A anwenden und wir haben

$$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'', \tag{5}$$

$$0 \leqq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \qquad 0 < \varkappa_1 < \omega,$$

und es ist

$$\alpha_1 < \alpha_0, \qquad \alpha'' < \alpha'.$$

Im Allgemeinen erhalten wir eine weitere Folge analoger Gleichungen:

$$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\varkappa_2 + \alpha''', \tag{6}$$

$$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\varkappa_3 + \alpha^{\mathrm{IV}}. \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Diese Folge kann aber nicht unendlich sein, sie muss nothwendig abbrechen.

Denn die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ nehmen ihrer Grösse nach ab, es ist

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' \ldots.$$

Wäre eine Reihe von abnehmenden transfiniten Zahlen unendlich, so würde kein Glied derselben das kleinste sein; dies ist nach Satz B, § 16 unmöglich. Es muss daher für einen gewissen *endlichen* Zahlwert τ

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0$$

sein. Verbinden wir nun die Gleichungen (3), (5), (6), (7) mit einander, so erhalten wir den Satz:

B. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenclasse lässt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\tau$ Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse sind, welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\tau \geqq 0$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$, $\tau + 1$ von Null verschiedene Zahlen der ersten Zahlenclasse sind.“

Die hier nachgewiesene Form der Zahlen der zweiten Zahlenclasse wollen wir ihre *Normalform* nennen; α_0 heisse der ‚*Grad*‘, α_τ der ‚*Exponent*‘ von α; für $\tau = 0$ sind Grad und Exponent einander gleich.

Je nachdem der Exponent α_τ gleich oder grösser als 0, *ist α eine Zahl der ersten oder der zweiten Art.*

Nehmen wir eine andere Zahl β in der Normalform:

$$\beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma. \tag{8}$$

Sowohl zum Vergleich von α mit β, wie auch zur Ausführung ihrer Summe und Differenz, dienen die Formeln:

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha'}\varkappa = \omega^{\alpha'}(\varkappa' + \varkappa), \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha''}\varkappa'' = \omega^{\alpha''}\varkappa'', \quad \alpha' < \alpha'' \tag{10}$$

$\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ haben hier die Bedeutung endlicher Zahlen.

Es sind dies Verallgemeinerungen der Formeln (2) und (3), § 17.

Für die Bildung des Products $\alpha\beta$ kommen die folgenden Formeln in Betracht:

$$\alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau, \quad 0 < \lambda < \omega, \tag{11}$$

$$\alpha\omega = \omega^{\alpha_0+1}, \tag{12}$$

$$\alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0+\beta'}, \qquad \beta' > 0. \tag{13}$$

Die Potenzirung α^β ist leicht ausführbar auf Grund der folgenden Formeln:

$$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}\varkappa_0 + \cdots, \qquad 0 < \lambda < \omega. \tag{14}$$

Die auf der Rechten hinzukommenden Glieder haben niederen Grad als das erste. Hieraus folgt leicht, dass die Fundamentalreihen $\{\alpha^\lambda\}$ und $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ zusammengehörig sind, so dass

$$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \qquad \alpha_0 > 0. \tag{15}$$

Daher ist auch in Folge des Satzes E, § 18:

$$\alpha^{\omega\beta'} = \omega^{\alpha_0\omega\beta'}, \quad \alpha_0 > 0, \ \beta' > 0. \tag{16}$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich folgende Sätze beweisen:

C. *„Sind die ersten Glieder* $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ *der Normalformen der beiden Zahlen* α *und* β *nicht gleich, so ist* α *kleiner oder grösser als* β, *je nachdem* $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$ *kleiner oder grösser als* $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ *ist. Hat man aber*

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0,\ \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1,\ \ldots\ \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho = \omega^{\beta_\varrho}\lambda_\varrho,$$

und ist $\omega^{\alpha_{\varrho+1}}\varkappa_{\varrho+1}$ *kleiner oder grösser als* $\omega^{\beta_{\varrho+1}}\lambda_{\varrho+1}$, *so ist auch* α *entsprechend kleiner oder grösser als* β."

D. *„Ist der Grad* α_0 *von* α *kleiner als der Grad* β_0 *von* β, *so ist*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Ist $\alpha_0 = \beta_0$, *so ist*

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\varkappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Ist aber

$$\alpha_0 > \beta_0',\ \alpha_1 > \beta_0,\ \ldots\ \alpha_\varrho \geqq \beta_0,\ \alpha_{\varrho+1} < \beta_0,$$

so ist

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \cdots + \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.\text{“}$$

E. *„Ist* β *von der zweiten Art* ($\beta_\sigma > 0$), *so ist*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta;$$

ist aber β *von der ersten Art* ($\beta_\sigma = 0$), *so ist*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda_\sigma$$
$$+ \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau.\text{“}$$

F. *„Ist* β *von der zweiten Art* ($\beta_\sigma > 0$), *so ist*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

ist aber β *von der ersten Art* ($\beta_\sigma = 0$) *und zwar* $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$, *wo* β' *von der zweiten Art ist, so hat man:*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}.\text{“}$$

G. *„Jede Zahl* α *der zweiten Zahlenclasse lässt sich und zwar nur auf eine einzige Weise in der Productform darstellen:*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\varkappa_\tau(\omega^{\gamma_1} + 1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\gamma_2} + 1)\varkappa_{\tau-2} \cdots (\omega^{\gamma_\tau} + 1)\varkappa_0,$$

und es ist

$$\gamma_0 = \alpha_\tau,\ \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau,\ \gamma_2 = \alpha_{\tau-2} - \alpha_{\tau-1},\ \ldots\ \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1,$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ *dieselbe Bedeutung wie in der Normalform haben. Die Factoren* $\omega^\gamma + 1$ *sind alle unzerlegbar."*

H. *„Jede der zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl* α *zweiter Art lässt sich und zwar nur auf eine Weise in der Form*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\alpha'$$

darstellen, wo $\gamma_0 > 0$ *und* α' *eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl erster Art ist."*

I. „*Damit zwei Zahlen α und β der zweiten Zahlenclasse die Relation*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

erfüllen, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie die Form haben

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu,$$

wo μ und ν Zahlen der ersten Zahlenclasse sind."

K. „*Damit zwei Zahlen α und β der zweiten Zahlenclasse, welche beide von der ersten Art sind, die Relation*

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie die Form haben

$$\alpha = \gamma^\mu, \quad \beta = \gamma^\nu,$$

wo μ und ν Zahlen der ersten Zahlenclasse sind."

Um die Tragweite der nachgewiesenen *Normalform* und der mit ihr unmittelbar zusammenhängenden *Productform* der Zahlen der zweiten Zahlenclasse zu exemplificiren, mögen die sich darauf gründenden Beweise der beiden letzten Sätze I und K hier folgen.

Aus der Annahme

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

schliessen wir zunächst, dass der Grad α_0 von α dem Grade β_0 von β gleich sein muss. Denn wäre etwa $\alpha_0 < \beta_0$, so hätte man, nach Satz D,

$$\alpha + \beta = \beta,$$

daher auch

$$\beta + \alpha = \beta,$$

was nicht möglich ist, da [(2) § 14]

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Wir können daher setzen

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

wo die Grade der Zahlen α' und β' kleiner sind als α_0, μ und ν endliche von 0 verschiedene Zahlen sind.

Nach Satz D ist nun

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \quad \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha',$$

also

$$\omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta' = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha'.$$

Wegen Satz D, § 14 ist daher

$$\beta' = \alpha'.$$

Somit haben wir

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \alpha'$$

und wenn

$$\omega^{\alpha_0} + \alpha' = \gamma$$

gesetzt wird, nach (11):

$$\alpha = \gamma\mu, \qquad \beta = \gamma\nu.$$

Setzen wir andrerseits zwei der zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahlen der *ersten Art* α und β voraus, welche die Bedingung

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen und nehmen an, dass

$$\alpha > \beta.$$

Wir denken uns nach Satz G beide Zahlen in ihrer Productform und es sei

$$\alpha = \delta\alpha', \qquad \beta = \delta\beta',$$

wo α' und β' ohne gemeinsamen linksseitigen Endfactor (ausser 1) seien.

Man hat alsdann

$$\alpha' > \beta'$$

und

$$\alpha'\delta\beta' = \beta'\delta\alpha'.$$

Alle hier und im Weiteren vorkommenden Zahlen sind von der *ersten Art*, weil dies von α und β vorausgesetzt wurde.

Die letzte Gleichung lässt zunächst (im Hinblick auf Satz G) erkennen, dass α' und β' *nicht beide* transfinit sein können, weil ihnen in diesem Falle ein gemeinsamer linksseitiger Endfactor anhaften würde. Auch können sie *nicht* beide endlich sein; denn es wäre alsdann δ transfinit und, wenn $\varkappa$ der endliche linksseitige Endfactor von δ ist, so müsste

$$\alpha'\varkappa = \beta'\varkappa,$$

daher auch

$$\alpha' = \beta'$$

sein. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass

$$\alpha' > \omega, \qquad \beta' < \omega.$$

Die endliche Zahl β' muss aber 1 sein:

$$\beta' = 1,$$

weil sie sonst in dem endlichen linksseitigen Endfactor von α' als Theil enthalten wäre.

Wir kommen zu dem Resultat, dass $\beta = \delta$, folglich

$$\alpha = \beta\alpha',$$

wo α' eine der zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl der ersten Art ist, die kleiner als α sein muss:

$$\alpha' < \alpha.$$

Zwischen α' und β besteht die Relation

$$\alpha'\beta = \beta\alpha'.$$

Ist daher auch $\alpha' > \beta$, so schliesst man in derselben Weise auf die Existenz einer transfiniten Zahl *erster Art* $\alpha'' < \alpha'$, so dass

$$\alpha' = \beta\alpha'', \qquad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Falls auch α'' noch $> \beta$, existirt eine ebensolche Zahl $\alpha''' < \alpha''$, so dass

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \qquad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

u. s. w.

Die Reihe abnehmender Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ muss nach Satz B, § 16 *abbrechen*. Es wird daher für einen bestimmten endlichen Index ϱ_0

$$\alpha^{(\varrho_0)} \leqq \beta$$

sein. Ist

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta,$$

so hat man

$$\alpha = \beta^{\varrho_0+1}, \qquad \beta = \beta;$$

der Satz K wäre dann bewiesen, und man hätte

$$\gamma = \beta, \quad \mu = \varrho_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Ist aber

$$\alpha^{(\varrho_0)} < \beta,$$

so setzen wir

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta_1$$

und haben

$$\alpha = \beta^{\varrho_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta.$$

Daher giebt es auch eine endliche Zahl ϱ_1, so dass

$$\beta = \beta_1^{\varrho_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

Im Allgemeinen hat man analog:

$$\beta_1 = \beta_2^{\varrho_2}\beta_3, \quad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \quad \beta_3 < \beta_2$$

u. s. w.

Auch die Reihe abnehmender Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ muss nach Satz B, § 16 *abbrechen*.

Es existirt daher eine endliche Zahl $\varkappa$, so dass

$$\beta_{\varkappa-1} = \beta_\varkappa^{\varrho_\varkappa}.$$

Setzen wir

$$\beta_\varkappa = \gamma$$

so ist

$$\alpha = \gamma^\mu, \qquad \beta = \gamma^\nu,$$

wo μ und ν Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$\frac{\mu}{\nu} = \varrho_0 + \cfrac{1}{\varrho_1 + \cdots + \cfrac{1}{\varrho_\varkappa}}$$

sind.

§ 20.

Die ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

Der Grad α_0 einer Zahl α ist, wie aus der Normalform

(1) $$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots, \quad 0 < \varkappa_\nu < \omega$$

im Hinblick auf Satz F, § 18 sofort einleuchtet, niemals grösser als α; es fragt sich aber, ob es nicht Zahlen α giebt, für welche $\alpha_0 = \alpha$ ist.

Jedenfalls müsste sich in einem solchen Falle die Normalform von α auf das erste Glied reduciren und dieses $= \omega^\alpha$ sein, d. h. es müsste α Wurzel der Gleichung

(2) $$\omega^\xi = \xi$$

sein. Andrerseits würde jede Wurzel α dieser Gleichung zur Normalform ω^α haben; ihr Grad wäre ihr selbst gleich.

Die Zahlen der zweiten Zahlenclasse, die ihrem Grade gleich sind, stimmen also durchaus überein mit den Wurzeln der Gleichung (2). Es ist unsere Aufgabe, diese Wurzeln in ihrer Gesammtheit zu bestimmen. Um sie von allen übrigen Zahlen zu unterscheiden, nennen wir sie die ‚*ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse*'.

Dass es aber solche ε-Zahlen giebt, geht aus folgendem Satze hervor:

A. „*Ist γ irgend eine, der Gleichung* (2) *nicht genügende Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so bestimmt sie eine Fundamentalreihe $\{\gamma\ \}$ durch die Gleichungen*

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \ \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \cdots \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \cdots.$$

Die Grenze $\operatorname*{Lim}_\nu \gamma_\nu = E(\gamma)$ dieser Fundamentalreihe ist stets eine ε-Zahl."

Beweis. Da γ keine ε-Zahl ist, so ist $\omega^\gamma > \gamma$, d. h. $\gamma_1 > \gamma$. Nach Satz B, § 18 ist daher auch $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, d. h. $\gamma_2 > \gamma_1$ und in derselben Weise folgt, dass $\gamma_3 > \gamma_2$ u. s. w. Die Reihe $\{\gamma_\nu\}$ ist somit eine Fundamentalreihe. Ihre Grenze, die eine Function von γ ist, nennen wir $E(\gamma)$ und haben:

$$\omega^{E(\gamma)} = \operatorname*{Lim}_\nu \omega^{\gamma_\nu} = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

$E(\gamma)$ ist daher eine ε-Zahl. —

B. „*Die Zahl $\varepsilon_0 = E(1) = \operatorname*{Lim}_\nu \omega_\nu$, wo*

$$\omega_1 = \omega, \ \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \ \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \cdots \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

ist die kleinste von allen ε-Zahlen."

Beweis. Sei ε' irgend eine ε-Zahl, so dass

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Da $\varepsilon' > \omega$, so ist $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_1$. Hieraus folgt ebenso $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_1}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_2$, u. s. w.

Wir haben allgemein

$$\varepsilon' > \omega_\nu$$

daher

$$\varepsilon' \geqq \operatorname*{Lim}_{\nu} \omega_\nu,$$

d. h.

$$\varepsilon' \geqq \varepsilon_0.$$

Es ist also $\varepsilon_0 = E(1)$ die kleinste von allen ε-Zahlen.

C. *„Ist ε' irgend eine ε-Zahl, ε'' die nächstgrössere ε-Zahl und γ irgend eine zwischen beiden liegende Zahl*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

so ist $E(\gamma) = \varepsilon''$.“

Beweis. Aus

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

folgt

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$

d. h.

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

Hieraus schliessen wir ebenso

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon''$$

u. s. w. Wir haben allgemein

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

daher

$$\varepsilon' < E(\gamma) \leqq \varepsilon''.$$

$E(\gamma)$ ist nach Satz A eine ε-Zahl. Da ε'' die auf ε' der Grösse nach nächstfolgende ε-Zahl ist, so kann nicht $E(\gamma) < \varepsilon''$ sein, und es muss daher

$$E(\gamma) = \varepsilon''$$

sein. —

Da $\varepsilon' + 1$ schon aus dem Grunde keine ε-Zahl ist, weil alle ε-Zahlen, wie aus der Definitionsgleichung $\xi = \omega^{\xi}$ folgt, von der *zweiten* Art sind, so ist $\varepsilon' + 1$ sicherlich kleiner als ε'' und wir haben daher folgenden Satz:

D. *„Ist ε' irgend eine ε-Zahl, so ist $E(\varepsilon' + 1)$ die nächstgrössere ε-Zahl.“*

Auf die kleinste ε-Zahl ε_0 folgt also die nächstgrössere, die wir ε_1 nennen,

$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1)$$

auf diese die nächstgrössere

$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1)$$

u. s. w.

Allgemein haben wir für die der Grösse nach $(\nu+1)^{\text{te}}$ ε-Zahl die Recursionsformel

$$\varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \tag{3}$$

Dass aber die unendliche Reihe

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

keineswegs die Gesammtheit aller ε-Zahlen umfasst, geht aus folgendem Satze hervor:

E. *„Ist $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ irgend eine unendliche Reihe von ε-Zahlen derart, dass*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \cdots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)}, \ldots$$

so ist auch $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ eine ε-Zahl und zwar die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Grösse nach nächstfolgende ε-Zahl."

Beweis.

$$\omega^{\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname{Lim}_\nu \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}.$$

Dass aber $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Grösse nach *nächstfolgende ε-Zahl* ist, geht daraus hervor, dass $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Grösse nach *nächstfolgende Zahl der zweiten Zahlenclasse* ist.

F. *„Die Gesammtheit aller ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse bildet in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus Ω der in ihrer Grössenordnung aufgefassten zweiten Zahlenclasse und hat daher die Mächtigkeit Alef-eins."*

Beweis. Die Gesammtheit aller ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse bildet nach Satz C, § 16 in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge:

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega+1}, \ldots \varepsilon_{\alpha'}, \ldots \tag{4}$$

deren Bildungsgesetz in den Sätzen D und E ausgesprochen liegt.

Würde nun der Index α' nicht alle Zahlen der zweiten Zahlenclasse durchlaufen, so müsste es eine kleinste Zahl α geben, die er nicht erreicht. Dies widerspräche aber dem Satze D, wenn α von der ersten Art und dem Satze E, wenn α von der zweiten Art wäre. Es nimmt daher α' alle Zahlwerthe der zweiten Zahlenclasse an.

Bezeichnen wir den Typus der zweiten Zahlenclasse mit Ω, so ist der Typus von (4)

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

da aber $\omega + \omega^2 = \omega^2$, so folgt hieraus

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

Daher ist auch

$$\overline{\omega + \Omega} = \overline{\Omega} = \aleph_1.$$

G. „*Ist ε irgend eine ε-Zahl und α eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, die kleiner ist als ε:*

$$\alpha < \varepsilon,$$

so genügt ε den drei Gleichungen:

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon.\text{“}$$

Beweis. Ist α_0 der Grad von α, so ist $\alpha_0 \leqq \alpha$, daher ist wegen $\alpha < \varepsilon$ auch $\alpha_0 < \varepsilon$. Der Grad von $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ ist aber ε; es hat also α einen kleineren Grad als ε, mithin ist nach Satz D, § 19

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon,$$

daher auch

$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Andrerseits haben wir nach Formel (13), § 19

$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^\varepsilon = \omega^{\alpha_0 + \varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon,$$

und daher auch

$$\alpha_0\varepsilon = \varepsilon.$$

Endlich ist im Hinblick auf Formel (16), § 19

$$\alpha^\varepsilon = \alpha^{\omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0\omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0\varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon.$$

H. „*Ist α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so hat die Gleichung*

$$\alpha^\xi = \xi$$

keine anderen Wurzeln als die ε-Zahlen, welche grösser sind als α.“

Beweis. Sei β eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^\xi = \xi,$$

also

$$\alpha^\beta = \beta,$$

so folgt zunächst aus dieser Formel, dass

$$\beta > \alpha.$$

Andrerseits muss β von der zweiten Art sein, da sonst

$$\alpha^\beta > \beta$$

wäre. Wir haben daher nach Satz F, § 19

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta},$$

mithin

$$\omega^{\alpha_0\beta} = \beta.$$

Es ist nach Satz F, § 19

$$\omega^{\alpha_0 \beta} \geqq \alpha_0 \beta,$$

daher

$$\beta \geqq \alpha_0 \beta.$$

Es kann aber nicht $\beta > \alpha_0 \beta$ sein; daher ist

$$\alpha_0 \beta = \beta,$$

und mithin

$$\omega^{\beta} = \beta.$$

β ist also eine ε-Zahl, die grösser ist als α.

Halle, März 1897.