Modelos Avanzados de Computación

Ejercicios del Tema 4

Ejercicio 4.1

Desarrolle un autómata de pila que reconozca el lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Ejercicio 4.2

Demuestre que el lengueje formado por cadenas de ‘a’ con una longitud potencia de dos (es decir, ‘aa’, ‘aaaa’, ‘aaaaaaaa’, ...) es un lenguaje sensible al contexto.

Ejercicio 4.3

Considere la siguiente gramática que describe expresiones aritméticas formadas por sumas y productos de números o variables.

$E \rightarrow E$ **plus** T

$E \rightarrow T$

$T \rightarrow T$ **prod** F

$T \rightarrow F$

$F \rightarrow$ **lpar** E **rpar**

$F \rightarrow$ **num**

$F \rightarrow$ **id**

a) Transforme la gramática en Forma Normal de Chomsky.

b) Realice la traza del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami sobre la entrada.

num prod id plus id

Ejercicio 4.4

Considere la siguiente gramática descrita en Forma Normal de Chomsky.

$S \rightarrow A\ B$

$S \rightarrow B\ C$

$A \rightarrow B\ A$

$A \rightarrow$ **a**

$B \rightarrow C\ C$

$B \rightarrow$ **b**

$C \rightarrow A\ B$

$C \rightarrow$ **a**

Realice la traza del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami sobre la entrada “ **b b a b** ”.

Ejercicio 4.5

Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky.

S → **number**
S → **id**
S → L N
N → B R
L → **lparen**
R → **rparen**
B → S B
B → **number**
B → **id**
B → L N

Verifique que la cadena “(a (b (2)) (c))” pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 4.6

Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky.

S → B M	M → O B	Q → L S
S → T M	M → O T	T → **term**
S → Q R	N → A B	A → **and**
S → **term**	N → A T	O → **or**
M → N M	N → O B	L → **lparen**
M → A B	N → O T	R → **rparen**
M → A T	B → Q R	

Verifique que la cadena "**lparen term or term rparen and term**" pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 4.7

Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky, donde E es el símbolo inicial.

E → A L	Q → **parce**
E → **id**	A → **parab**
L → E Q	C → **coma**
Q → C L	

Verifique que la cadena "**parab id coma parab id coma id parce parce**" pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 4.8

Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky, donde L es el símbolo inicial.

L → NM F	MT → SM T	T → **producto**	RP → **rpar**
L → LP LC	MT → SM L	F → ML T	NM → **num**
L → T MT	T → NM F	LC → L RP	SM → **plus**
L → **producto**	T → LP LC	LP → **lpar**	ML → **mul**

Verifique que la cadena "**num mul lpar producto plus num mul producto rpar**" pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 4.9

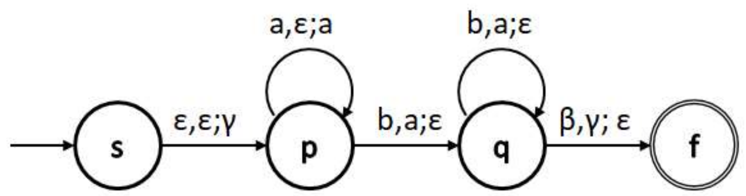
Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky, donde C es el símbolo inicial.

C → S P	P → TP S	L → TS B	LL → B L
C → B L	S → B L	B → TL CC	TP → **paralelo**
C → TL CC	S → TL CC	B → **id**	TS → **serie**
C → **id**	S → **id**	CC → C TR	TL → **parab**
P → TP PP	L → TS LL	PP → S P	TR → **parce**

Verifique que la cadena "**id serie parab id paralelo id parce**" pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 4.10

Genere la gramática libre de contexto asociada al siguiente Autómata de Pila por medio del algoritmo presentado en el temario.



Ejercicio 4.11

Demuestre que los siguientes lenguajes no son libres de contexto:

(a) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

(b) $L = \{0^n \mid \text{n es primo}\}$

(c) $L = \{\omega\ \omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$

SOLUCIONES

Ejercicio 4.1

Desarrolle un autómata de pila que reconozca el lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Ejercicio 4.2

Se demuestra describiendo el lenguaje por medio de una gramática creciente.

S → aa

S → D S F

DaaF -> aaaa

Da -> aaD

Ejercicio 4.3

$E \rightarrow E\ \textbf{plus}\ T$

$E \rightarrow T$

$T \rightarrow T\ \textbf{prod}\ F$

$T \rightarrow F$

$F \rightarrow \textbf{lpar}\ E\ \textbf{rpar}$

$F \rightarrow \textbf{num}$

$F \rightarrow \textbf{id}$

$E \rightarrow E\ E1$	$T1 \rightarrow P\ F$
$E \rightarrow T\ E2$	$T2 \rightarrow E\ R$
$E \rightarrow L\ E3$	$F \rightarrow L\ F1$
$E \rightarrow \textbf{num}$	$F \rightarrow \textbf{num}$
$E \rightarrow \textbf{id}$	$F \rightarrow \textbf{id}$
$E1 \rightarrow M\ T$	$F1 \rightarrow E\ R$
$E2 \rightarrow P\ F$	$M \rightarrow \textbf{plus}$
$E3 \rightarrow E\ R$	$P \rightarrow \textbf{prod}$
$T \rightarrow T\ T1$	$L \rightarrow \textbf{lpar}$
$T \rightarrow L\ T2$	$R \rightarrow \textbf{rpar}$
$T \rightarrow \textbf{num}$	
$T \rightarrow \textbf{id}$	

num	prod	id	plus	id
E,T,F	-	E, T	-	E
	P	E2, T1	-	-
		E, T, F	-	E
			M	E1
				E, T, F

Ejercicio 4.4

Considere la siguiente gramática libre de contexto, expresada en Forma Normal de Chomsky.

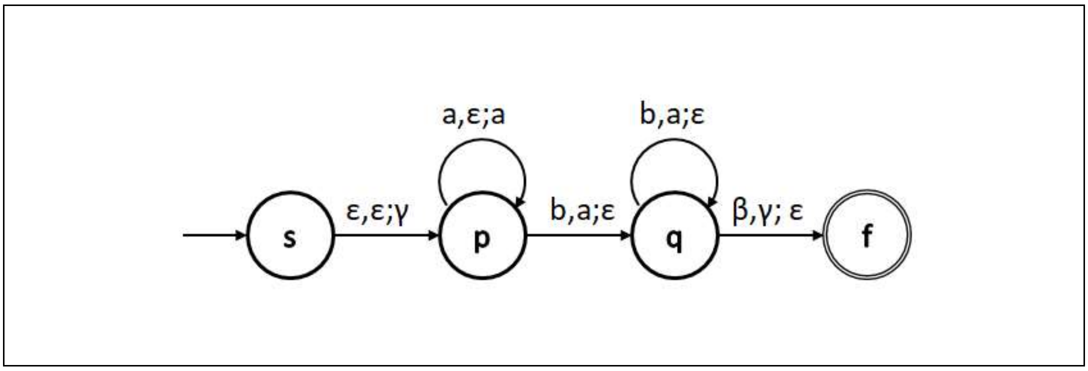
S → B M	M → O B	Q → L S
S → T M	M → O T	T → **term**
S → Q R	N → A B	A → **and**
S → **term**	N → A T	O → **or**
M → N M	N → O B	L → **lparen**
M → A B	N → O T	R → **rparen**
M → A T	B → Q R	

Verifique que la cadena "**lparen term or term rparen and term**" pertenece al lenguaje definido por la gramática por medio del algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

lparen	term	or	term	rparen	and	term
L	Q	-	Q	S,B	-	S
	S,T	-	S	-	-	-
		O	M,N	-	-	-
			S,T	-	-	-
				R	-	-
					A	M,N
						S,T

Ejercicio 4.10

Genere la gramática libre de contexto asociada al siguiente Autómata de Pila por medio del algoritmo presentado en el temario.



Estados = { s, p, q, f }

Σ = { a, b }

Γ = { a , γ }

Transiciones

(s, ϵ, ϵ; p, γ)	(q, b, a; q, ϵ)
(p, a, ϵ; p, a)	(q, β, γ; f, ϵ)
(p, b, a; q, ϵ)	

GRAMATICA:

Σ = { a, b }

N = { S ,

N01 = <s, a; s>	N13 = <p, a; s>	N25 = <q, a; s>	N37 = <f, a; s>
N02 = <s, a; p>	N14 = <p, a; p>	N26 = <q, a; p>	N38 = <f, a; p>
N03 = <s, a; q>	N15 = <p, a; q>	N27 = <q, a; q>	N39 = <f, a; q>
N04 = <s, a; f>	N16 = <p, a; f>	N28 = <q, a; f>	N40 = <f, a; f>
N05 = <s, γ; s>	N17 = <p, γ; s>	N29 = <q, γ; s>	N41 = <f, γ; s>
N06 = <s, γ; p>	N18 = <p, γ; p>	N30 = <q, γ; p>	N42 = <f, γ; p>
N07 = <s, γ; q>	N19 = <p, γ; q>	N31 = <q, γ; q>	N43 = <f, γ; q>
N08 = <s, γ; f>	N20 = <p, γ; f>	N32 = <q, γ; f>	N44 = <f, γ; f>
N09 = <s, ϵ; s>	N21 = <p, ϵ; s>	N33 = <q, ϵ; s>	N45 = <f, ϵ; s>
N10 = <s, ϵ; p>	N22 = <p, ϵ; p>	N34 = <q, ϵ; p>	N46 = <f, ϵ; p>
N11 = <s, ϵ; q>	N23 = <p, ϵ; q>	N35 = <q, ϵ; q>	N47 = <f, ϵ; q>
N12 = <s, ϵ; f>	N24 = <p, ϵ; f>	N36 = <q, ϵ; f>	N48 = <f, ϵ; f>

Reglas:

1: S → <s, ϵ, f> .... S → N12

2: <s, ϵ, s> → ϵ .... N09 → ϵ

<p, ϵ, p> → ϵ .... N22 → ϵ

<r, ϵ, r> → ϵ .... N35 → ϵ

<f, ϵ, f> → ϵ .... N48 → ϵ

3: Para la transición (p, b, a; q, ϵ)

<p, a, s> → b <q, ϵ, s> .... N13 → b N33

<p, a, p> → b <q, ϵ, p> .... N14 → b N34

<p, a, q> → b <q, ϵ, q> .... N15 → b N35

<p, a, f> → b <q, ϵ, f> .... N16 → b N36

3: Para la transición (q, b, a; q, ϵ)

<q, a, s> → b <q, ϵ, s> .... N25 → b N33

<q, a, p> → b <q, ϵ, p> .... N26 → b N34

<q, a, q> → b <q, ϵ, q> .... N27 → b N35

<q, a, f> → b <q, ϵ, f> .... N28 → b N36

3: Para la transición (q, β, γ; f, ϵ)

<q, γ, s> → β <f, ϵ, s> .... N29 → β N45

<q, γ, p> → β <f, ϵ, p> .... N30 → β N46

<q, γ, q> → β <f, ϵ, q> .... N31 → β N47

<q, γ, f> → β <f, ϵ, f> .... N32 → β N48

4: Para la transición (s, ϵ, ϵ; p, γ)

<s, a, R> → <p, γ, T> <T, a, R>

<s, γ, R> → <p, γ, T> <T, γ, R>

<s, ϵ, R> → <p, γ, T> <T, ϵ, R>

donde R={s,p,q,f} y T={s,p,q,f}

<s, a, s> → <p, γ, s> <s, a, s>	<s, a, q> → <p, γ, s> <s, a, q>
<s, γ, s> → <p, γ, s> <s, γ, s>	<s, γ, q> → <p, γ, s> <s, γ, q>
<s, ϵ, s> → <p, γ, s> <s, ϵ, s>	<s, ϵ, q> → <p, γ, s> <s, ϵ, q>
<s, a, s> → <p, γ, p> <p, a, s>	<s, a, q> → <p, γ, p> <p, a, q>
<s, γ, s> → <p, γ, p> <p, γ, s>	<s, γ, q> → <p, γ, p> <p, γ, q>
<s, ϵ, s> → <p, γ, p> <p, ϵ, s>	<s, ϵ, q> → <p, γ, p> <p, ϵ, q>
<s, a, s> → <p, γ, q> <q, a, s>	<s, a, q> → <p, γ, q> <q, a, q>
<s, γ, s> → <p, γ, q> <q, γ, s>	<s, γ, q> → <p, γ, q> <q, γ, q>
<s, ϵ, s> → <p, γ, q> <q, ϵ, s>	<s, ϵ, q> → <p, γ, q> <q, ϵ, q>
<s, a, s> → <p, γ, f> <f, a, s>	<s, a, q> → <p, γ, f> <f, a, q>
<s, γ, s> → <p, γ, f> <f, γ, s>	<s, γ, q> → <p, γ, f> <f, γ, q>
<s, ϵ, s> → <p, γ, f> <f, ϵ, s>	<s, ϵ, q> → <p, γ, f> <f, ϵ, q>
<s, a, p> → <p, γ, s> <s, a, p>	<s, a, f> → <p, γ, s> <s, a, f>
<s, γ, p> → <p, γ, s> <s, γ, p>	<s, γ, f> → <p, γ, s> <s, γ, f>
<s, ϵ, p> → <p, γ, s> <s, ϵ, p>	<s, ϵ, f> → <p, γ, s> <s, ϵ, f>
<s, a, p> → <p, γ, p> <p, a, p>	<s, a, f> → <p, γ, p> <p, a, f>
<s, γ, p> → <p, γ, p> <p, γ, p>	<s, γ, f> → <p, γ, p> <p, γ, f>
<s, ϵ, p> → <p, γ, p> <p, ϵ, p>	<s, ϵ, f> → <p, γ, p> <p, ϵ, f>
<s, a, p> → <p, γ, q> <q, a, p>	<s, a, f> → <p, γ, q> <q, a, f>
<s, γ, p> → <p, γ, q> <q, γ, p>	<s, γ, f> → <p, γ, q> <q, γ, f>
<s, ϵ, p> → <p, γ, q> <q, ϵ, p>	<s, ϵ, f> → <p, γ, q> <q, ϵ, f>
<s, a, p> → <p, γ, f> <f, a, p>	<s, a, f> → <p, γ, f> <f, a, f>
<s, γ, p> → <p, γ, f> <f, γ, p>	<s, γ, f> → <p, γ, f> <f, γ, f>
<s, ϵ, p> → <p, γ, f> <f, ϵ, p>	<s, ϵ, f> → <p, γ, f> <f, ϵ, f>

4: Para la transición (p, a, ϵ; p, a)

<p, a, R> → a <p, a, T> <T, a, R>

<p, γ, R> → a <p, a, T> <T, γ, R>

<p, ϵ, R> → a <p, a, T> <T, ϵ, R>

donde R={s,p,q,f} y T={s,p,q,f}

<p, a, s> → a <p, a, s> <s, a, s>	<p, a, q> → a <p, a, s> <s, a, q>
<p, γ, s> → a <p, a, s> <s, γ, s>	<p, γ, q> → a <p, a, s> <s, γ, q>
<p, ϵ, s> → a <p, a, s> <s, ϵ, s>	<p, ϵ, q> → a <p, a, s> <s, ϵ, q>
<p, a, s> → a <p, a, p> <p, a, s>	<p, a, q> → a <p, a, p> <p, a, q>
<p, γ, s> → a <p, a, p> <p, γ, s>	<p, γ, q> → a <p, a, p> <p, γ, q>
<p, ϵ, s> → a <p, a, p> <p, ϵ, s>	<p, ϵ, q> → a <p, a, p> <p, ϵ, q>
<p, a, s> → a <p, a, q> <q, a, s>	<p, a, q> → a <p, a, q> <q, a, q>
<p, γ, s> → a <p, a, q> <q, γ, s>	<p, γ, q> → a <p, a, q> <q, γ, q>
<p, ϵ, s> → a <p, a, q> <q, ϵ, s>	<p, ϵ, q> → a <p, a, q> <q, ϵ, q>
<p, a, s> → a <p, a, f> <f, a, s>	<p, a, q> → a <p, a, f> <f, a, q>
<p, γ, s> → a <p, a, f> <f, γ, s>	<p, γ, q> → a <p, a, f> <f, γ, q>
<p, ϵ, s> → a <p, a, f> <f, ϵ, s>	<p, ϵ, q> → a <p, a, f> <f, ϵ, q>
<p, a, p> → a <p, a, s> <s, a, p>	<p, a, f> → a <p, a, s> <s, a, f>
<p, γ, p> → a <p, a, s> <s, γ, p>	<p, γ, f> → a <p, a, s> <s, γ, f>
<p, ϵ, p> → a <p, a, s> <s, ϵ, p>	<p, ϵ, f> → a <p, a, s> <s, ϵ, f>
<p, a, p> → a <p, a, p> <p, a, p>	<p, a, f> → a <p, a, p> <p, a, f>
<p, γ, p> → a <p, a, p> <p, γ, p>	<p, γ, f> → a <p, a, p> <p, γ, f>
<p, ϵ, p> → a <p, a, p> <p, ϵ, p>	<p, ϵ, f> → a <p, a, p> <p, ϵ, f>
<p, a, p> → a <p, a, q> <q, a, p>	<p, a, f> → a <p, a, q> <q, a, f>
<p, γ, p> → a <p, a, q> <q, γ, p>	<p, γ, f> → a <p, a, q> <q, γ, f>
<p, ϵ, p> → a <p, a, q> <q, ϵ, p>	<p, ϵ, f> → a <p, a, q> <q, ϵ, f>
<p, a, p> → a <p, a, f> <f, a, p>	<p, a, f> → a <p, a, f> <f, a, f>
<p, γ, p> → a <p, a, f> <f, γ, p>	<p, γ, f> → a <p, a, f> <f, γ, f>
<p, ϵ, p> → a <p, a, f> <f, ϵ, p>	<p, ϵ, f> → a <p, a, f> <f, ϵ, f>

La gramática completa tiene 113 reglas y es la siguiente:

S $\rightarrow$ N12	N09 $\rightarrow$ N19 N33	N12 $\rightarrow$ N17 N12	N18 $\rightarrow$ a N15 N30
	N01 $\rightarrow$ N20 N37	N04 $\rightarrow$ N18 N16	N22 $\rightarrow$ a N15 N34
N09 $\rightarrow$ ϵ	N05 $\rightarrow$ N20 N41	N08 $\rightarrow$ N18 N20	N14 $\rightarrow$ a N16 N38
N22 $\rightarrow$ ϵ	N09 $\rightarrow$ N20 N45	N12 $\rightarrow$ N18 N24	N18 $\rightarrow$ a N16 N42
N35 $\rightarrow$ ϵ	N02 $\rightarrow$ N17 N02	N04 $\rightarrow$ N19 N28	N22 $\rightarrow$ a N16 N46
N48 $\rightarrow$ ϵ	N06 $\rightarrow$ N17 N06	N08 $\rightarrow$ N19 N32	N15 $\rightarrow$ a N13 N03
	N10 $\rightarrow$ N17 N10	N12 $\rightarrow$ N19 N36	N19 $\rightarrow$ a N13 N07
N13 $\rightarrow$ b N33	N02 $\rightarrow$ N18 N14	N04 $\rightarrow$ N20 N40	N23 $\rightarrow$ a N13 N11
N14 $\rightarrow$ b N34	N06 $\rightarrow$ N18 N18	N08 $\rightarrow$ N20 N44	N15 $\rightarrow$ a N14 N15
N15 $\rightarrow$ b N35	N10 $\rightarrow$ N18 N22	N12 $\rightarrow$ N20 N48	N19 $\rightarrow$ a N14 N19
N16 $\rightarrow$ b N36	N02 $\rightarrow$ N19 N26		N23 $\rightarrow$ a N14 N23
	N06 $\rightarrow$ N19 N30	N13 $\rightarrow$ a N13 N01	N15 $\rightarrow$ a N15 N27
N25 $\rightarrow$ b N33	N10 $\rightarrow$ N19 N34	N17 $\rightarrow$ a N13 N05	N19 $\rightarrow$ a N15 N31
N26 $\rightarrow$ b N34	N02 $\rightarrow$ N20 N38	N21 $\rightarrow$ a N13 N09	N23 $\rightarrow$ a N15 N35
N27 $\rightarrow$ b N35	N06 $\rightarrow$ N20 N42	N13 $\rightarrow$ a N14 N13	N15 $\rightarrow$ a N16 N39
N28 $\rightarrow$ b N36	N10 $\rightarrow$ N20 N46	N17 $\rightarrow$ a N14 N17	N19 $\rightarrow$ a N16 N43
	N03 $\rightarrow$ N17 N03	N21 $\rightarrow$ a N14 N21	N23 $\rightarrow$ a N16 N47
N29 $\rightarrow$ β N45	N07 $\rightarrow$ N17 N07	N13 $\rightarrow$ a N15 N25	N16 $\rightarrow$ a N13 N04
N30 $\rightarrow$ β N46	N11 $\rightarrow$ N17 N11	N17 $\rightarrow$ a N15 N29	N20 $\rightarrow$ a N13 N08
N31 $\rightarrow$ β N47	N03 $\rightarrow$ N18 N15	N21 $\rightarrow$ a N15 N33	N24 $\rightarrow$ a N13 N12
N32 $\rightarrow$ β N48	N07 $\rightarrow$ N18 N19	N13 $\rightarrow$ a N16 N37	N16 $\rightarrow$ a N14 N16
	N11 $\rightarrow$ N18 N23	N17 $\rightarrow$ a N16 N41	N20 $\rightarrow$ a N14 N20
N01 $\rightarrow$ N17 N01	N03 $\rightarrow$ N19 N27	N21 $\rightarrow$ a N16 N45	N24 $\rightarrow$ a N14 N24
N05 $\rightarrow$ N17 N05	N07 $\rightarrow$ N19 N31	N14 $\rightarrow$ a N13 N02	N16 $\rightarrow$ a N15 N28
N09 $\rightarrow$ N17 N09	N11 $\rightarrow$ N19 N35	N18 $\rightarrow$ a N13 N06	N20 $\rightarrow$ a N15 N32
N01 $\rightarrow$ N18 N13	N03 $\rightarrow$ N20 N39	N22 $\rightarrow$ a N13 N10	N24 $\rightarrow$ a N15 N36
N05 $\rightarrow$ N18 N17	N07 $\rightarrow$ N20 N43	N14 $\rightarrow$ a N14 N14	N16 $\rightarrow$ a N16 N40
N09 $\rightarrow$ N18 N21	N11 $\rightarrow$ N20 N47	N18 $\rightarrow$ a N14 N18	N20 $\rightarrow$ a N16 N44
N01 $\rightarrow$ N19 N25	N04 $\rightarrow$ N17 N04	N22 $\rightarrow$ a N14 N22	N24 $\rightarrow$ a N16 N48
N05 $\rightarrow$ N19 N29	N08 $\rightarrow$ N17 N08	N14 $\rightarrow$ a N15 N26	

Esta gramática se puede simplificar de varias formas. En primer lugar se pueden eliminar aquellos símbolos que no pueden producir secuencias de símbolos terminales. Para detectarlos se utiliza un algoritmo tipo "visitados" marcando los símbolos que sí son capaces de producir secuencias de símbolos terminales. La primera iteración señala a los símbolos N09, N22, N35 y N48. Las siguientes iteraciones van señalando los símbolos N15, N27, N32 (segunda iteración), N20, N23 (tercera iteración), N12 (cuarta iteración) y S (última iteración).

S $\rightarrow$ N12	N48 $\rightarrow$ ϵ	N12 $\rightarrow$ N20 N48
N09 $\rightarrow$ ϵ	N15 $\rightarrow$ b N35	N15 $\rightarrow$ a N15 N27
N22 $\rightarrow$ ϵ	N27 $\rightarrow$ b N35	N23 $\rightarrow$ a N15 N35
N35 $\rightarrow$ ϵ	N32 $\rightarrow$ β N48	N20 $\rightarrow$ a N15 N32

Esta gramática se puede simplificar aún más si se eliminan los símbolos que no se pueden alcanzar desde el símbolo inicial. En este caso eliminaríamos los símbolos N09, N22 y N23.

S $\rightarrow$ N12	N15 $\rightarrow$ b N35	N32 $\rightarrow$ β N48
N12 $\rightarrow$ N20 N48	N15 $\rightarrow$ a N15 N27	N35 $\rightarrow$ ϵ
N20 $\rightarrow$ a N15 N32	N27 $\rightarrow$ b N35	N48 $\rightarrow$ ϵ

Los símbolos que solo generan la cadena vacía también pueden eliminarse (N35 y N48).

S $\rightarrow$ N12	N15 $\rightarrow$ b	N32 $\rightarrow$ β
N12 $\rightarrow$ N20	N15 $\rightarrow$ a N15 N27	
N20 $\rightarrow$ a N15 N32	N27 $\rightarrow$ b	

Los símbolos que solo producen un símbolo terminal también se pueden sustituir (N27 y N32).

S $\rightarrow$ N12	N15 $\rightarrow$ b
N12 $\rightarrow$ N20	N15 $\rightarrow$ a N15 b
N20 $\rightarrow$ a N15 β	

Los símbolos que solo producen una regla también se pueden sustituir (N12 y N20).

S $\rightarrow$ a N15 β
N15 $\rightarrow$ b
N15 $\rightarrow$ a N15 b

La gramática final se puede expresar con solo tres reglas. Podemos comprobar que esta gramática reconoce el lenguaje $a^n b^n \beta$.

Ejercicio 4.11

Demuestre que los siguientes lenguajes no son libres de contexto:

(a) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

(b) $L = \{0^n \mid \text{n es primo}\}$

(c) $L = \{\omega\ \omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$

SOLUCIÓN:

(a) Se puede demostrar comprobando que el lenguaje no cumple el lema de bombeo. Si dividimos una cadena del lenguaje (por ejemplo, "aaaa bbbb cccc") en las subcadenas w = r s t u v, las subcadenas a bombear no pueden tener dos letras distintas (por ejemplo s= "aab") porque al bombear aparecerían letras salteadas (por ejemplo, ss = "aabaab"). Por tanto, las subcadenas a bombear solo pueden tener un tipo de letra, pero entonces solo se pueden bombear dos letras y el lenguaje exije que se bombeen las tres. Por tanto el lenguaje no cumple el lema de bombeo y no es libre de contexto.

(b) Se puede demostrar comprobando que el lenguaje no cumple el lema de bombeo. Si troceamos una subcadena del lenguaje (formada por un número primo de 0s) en las subcadenas r s t u v podemos calcular el tamaño de la cadena como

|w| = |0000.....00000| = |rtv| + |su| = L + M

Es decir, el tamaño de las subcadenas rtv es L y el de las subcadenas a bombear su es M. Si bombeamos L veces tendríamos una cadena de tamaño

|w'| = L + L*M = (M+1)*L

Pero ese tamaño no es un número primo ya que es múltiplo de L y de (M+1). Por tanto, no se puede bombear la cadena manteniendo la propiedad de que toda cadena bombeada sea un número primo. Luego el lenguaje no cumple el lema de bombeo.

(c) En este caso el lenguaje sí cumple el lema de bombeo pero eso no quiere decir que sea libre de contexto. Para demostrar que no es libre de contexto podemos demostrar que no puede reconocerse por medio de ningún autómata de pila. Una característica de la pila es que cuando desapilamos la información se pierde. Para comprobar que la segunda cadena tiene el mismo contenido que la primera hay que desapilar los símbolos finales para comprobar que el primero es correcto pero entonces perdemos la información del resto de dígitos de w. Por tanto no es posible reconocer el lenguaje por medio de un autómata de pila, luego no es un lenguaje libre de contexto.