

# 1. Formulario Básico

## 1.1. Algunas relaciones matemáticas útiles

$$\begin{aligned}
 a^{-x} &= \frac{1}{a^x} & ; & & a^{x+y} &= a^x a^y & ; & & a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\
 \ln a = A &\rightarrow e^A = a & ; & & \ln(a+b) &= (\ln a)(\ln b) & ; & & \ln(a^n) &= n \ln a \\
 \frac{d}{dx} f(x)^n &= n f(x)^{n-1} \frac{d}{dx} f(x) & ; & & \frac{d}{dx} e^{ax} &= a e^{ax} & ; & & \frac{d}{dx} \ln ax &= \frac{a}{x} \\
 \int dx x^n &= \frac{x^{n+1}}{n+1} & ; & & \int dx \frac{1}{x} &= \ln x & ; & & \int dx e^{ax} &= \frac{1}{a} e^{ax}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

## 1.2. Geometría

$$\begin{aligned}
 \text{Área de un círculo} &= \pi R^2 & ; & & \text{Perímetro de un círculo} &= 2\pi R \\
 \text{Área de una esfera} &= 4\pi R^2 & ; & & \text{Volumen de una esfera} &= 4/3\pi R^3
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

## 1.3. Tipos de magnitudes

- **ESCALARES** Se describen por completo con un número y la unidad correspondiente. Ejemplos: Temperatura, Masa, Carga eléctrica.
- **VECTORIALES** Además de la magnitud y la unidad requieren que se especifique una *dirección*. Ejemplos: Desplazamiento, Velocidad, Fuerza, Campo Eléctrico.

**Notación:** Las cantidades vectoriales se representan en negrita (**v**) o con una flecha sobre ellos ( $\vec{v}$ ). El módulo del vector  $\vec{v}$  se indica como  $v$  ó  $|\vec{v}|$ .

## 1.4. Fórmulas básicas de trigonometría plana

### 1.4.1. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

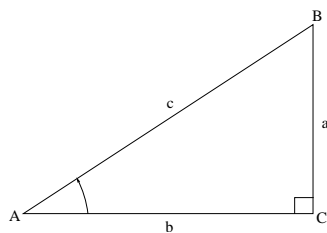


Figura 1:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } A &= \frac{a}{c} & ; & & \text{cos } A &= \frac{b}{c} & ; & & \text{tan } A &= \frac{a}{b} \\
 \text{cosec } A &= \frac{1}{\text{sen } A} = \frac{c}{a} & ; & & \text{sec } A &= \frac{1}{\text{cos } A} = \frac{c}{b} & ; & & \text{cotan } A &= \frac{1}{\text{tan } A} = \frac{b}{a}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

### 1.4.2. Extensión de las fórmulas para ángulos mayores del ángulo recto

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} & & & 2\pi \text{ rad} &\rightarrow 360^\circ \\
 \text{sen } A &= \frac{y}{r} & ; & & \text{cos } A &= \frac{x}{r} & ; & & \text{tan } A &= \frac{y}{x} \\
 \text{cosec } A &= \frac{r}{y} & ; & & \text{sec } A &= \frac{r}{x} & ; & & \text{cotan } A &= \frac{x}{y}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

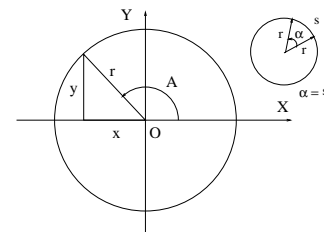


Figura 2:

### 1.4.3. Relaciones entre las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \text{tan } A &= \frac{\text{sen } A}{\text{cos } A} & & & \text{cotan } A &= \frac{\text{cos } A}{\text{sen } A} \\
 \text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A &= 1 & ; & & \text{sec}^2 A - \text{tan}^2 A &= 1 & ; & & \text{cosec}^2 A - \text{cotan}^2 A &= 1 \\
 \text{sen}(-A) &= -\text{sen } A & ; & & \text{cos}(-A) &= \text{cos } A & ; & & \text{tan}(-A) &= -\text{tan } A
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

### 1.4.4. Fórmulas de adición, ángulo doble y ángulo mitad

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(A \pm B) &= \text{sen } A \text{cos } B \pm \text{cos } A \text{sen } B & ; & & \text{cos}(A \pm B) &= \text{cos } A \text{cos } B \mp \text{sen } A \text{sen } B \\
 \text{tan}(A \pm B) &= \frac{\text{tan } A \pm \text{tan } B}{1 \mp \text{tan } A \text{tan } B} & ; & & & & & & & \\
 \text{sen}(2A) &= 2 \text{sen } A \text{cos } A & ; & & \text{cos}(2A) &= \text{cos}^2 A - \text{sen}^2 A \\
 \text{sen}(A/2) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } A}{2}} & ; & & \text{cos}(A/2) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } A}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

### 1.4.5. Derivadas e integrales de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \text{sen}(ax) &= a \text{cos}(ax) & ; & & \frac{d}{dx} \text{cos}(ax) &= -a \text{sen}(ax) & ; & & \frac{d}{dx} \text{tan}(ax) &= \frac{a}{\text{cos}^2(ax)} \\
 \int dx \text{sen}(ax) &= -\frac{\text{cos}(ax)}{a} & ; & & \int dx \text{cos}(ax) &= \frac{\text{sen}(ax)}{a} & ; & & \int dx \text{tan}(ax) &= -\frac{1}{a} \ln|\text{cos}(ax)|
 \end{aligned}$$

## 1.5. Definiciones fundamentales en análisis vectorial

1. Dos vectores son *iguales* si tienen la misma magnitud -también llamada módulo- y dirección.

- Si  $m$  es un escalar, entonces  $m\vec{A}$  es un vector con módulo  $|m|$  veces el módulo de  $\vec{A}$  y cuya dirección es la misma que la de  $\vec{A}$  si  $m > 0$  u opuesta si  $m < 0$ .
- La suma, adición o resultante de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es un vector  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  que se construye haciendo coincidir el origen de  $\vec{B}$  con el extremo de  $\vec{A}$  y uniendo luego el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$ . Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo. El vector  $\vec{A} - \vec{B}$  se define como  $\vec{A} + (-\vec{B})$ .

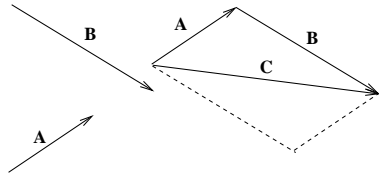


Figura 3:

- Un vector *unitario* es un vector con módulo unidad. Si  $\vec{A}$  es un vector cualquiera entonces  $\vec{a} = \vec{A}/|\vec{A}|$  es un vector unitario con la misma dirección que  $\vec{A}$ .
- Propiedades: Si  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  son vectores y  $\alpha$  y  $\beta$  escalares, entonces
 
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad ; \quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \quad ; \quad \alpha(\beta\vec{A}) = (\alpha\beta)\vec{A}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A} \quad ; \quad \alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B} \quad (7)$$
- Componentes de un vector:* Un vector  $\vec{A}$  se puede representar colocando su origen en el origen  $O$  de un sistema de referencia cartesiano. Si  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  representan vectores unitarios cuya dirección es la dirección positiva de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  entonces

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad , \quad (8)$$

donde  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  son las llamadas componentes de  $\vec{A}$ .

### 1.6. Producto escalar

Definimos el producto escalar de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  como un escalar igual a

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\alpha) \quad , \quad (9)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Algunas propiedades del producto escalar son

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad ; \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

### 1.7. Producto vectorial

El resultado del producto vectorial de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es un vector igual a

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin(\alpha) \vec{u} \quad , \quad (10)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y  $\vec{u}$  es un vector unitario perpendicular al plano que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de tal manera que los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{u}$  forman un sistema dextrógiro. Algunas propiedades del producto vectorial son

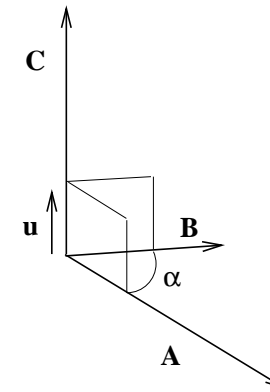


Figura 4:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \text{Área del paralelogramo con lados } A, B. \quad (11)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \quad (12)$$