

Prácticas I-II:
PRESENTACIÓN DE LAS PRÁCTICAS,
TEORÍA DE ERRORES

1. Sección I: PRESENTACIÓN DE LAS PRÁCTICAS

En esta práctica daremos algunas instrucciones a las que es necesario prestar atención para lograr una presentación adecuada de los resultados obtenidos en el laboratorio.

1.1. ¿Qué se debe incluir en la memoria de una práctica?

La memoria de una práctica **NO** consiste en copiar el boletín entregado. En su lugar debe realizarse una **BREVE** narración de lo que se hizo en el laboratorio para llevar a cabo la práctica. Cuál es el objetivo de la práctica, qué magnitudes se midieron, con qué fin y cuáles fueron los resultados obtenidos. Lo principal es una correcta presentación de los datos obtenidos y del resultado final, siendo posible omitir los pasos intermedios cuando estos sean evidentes. Es necesario incluir información suficiente para permitir al profesor seguir el proceso y repetir los cálculos que se lleven a cabo en la práctica.

1.2. Unidades

TODOS los datos deberán ir acompañados de sus correspondientes unidades, salvo, por supuesto, aquellos que correspondan a magnitudes adimensionales. En la siguiente sección se dará una introducción a la *Teoría de errores*. A continuación damos las normas básicas necesarias para una correcta presentación de los datos (medidas, resultados intermedios o resultados finales) que aparezcan en la práctica.

Sea un dato M , su error absoluto E y su unidad U el dato deberá expresarse como

$$M \pm EU \quad .$$

Como veremos más adelante esto implica que el valor verdadero M_v se encuentra en el intervalo $M - E \leq M_v \leq M + S$.

Ejemplo: La forma correcta de incluir en la práctica la medida de una longitud L de valor 16 mm con un error de 1 mm sería

$$L = 16 \pm 1 \text{ mm} \quad .$$

En este caso el error y la magnitud medida tienen las mismas unidades, caso de que estas fueran diferentes habría que indicarlas por separado

$$L = 16 \text{ cm} \pm 1 \text{ mm} \quad ,$$

aunque *es preferible que coincidan*.

Cuando se incluyen una serie de medidas del mismo tipo, la unidad puede expresarse colectivamente tras las medidas y entre paréntesis.

Ejemplo:

$$16,2, 14,5, 15,2, 17, 18,54 \text{ (mm)} \quad .$$

En una tabla de valores las unidades deben incluirse entre paréntesis en el encabezado de la tabla, acompañando al nombre de la magnitud tabulada.

Ejemplo:

Como veremos más adelante, en una gráfica las magnitudes se incluyen de forma similar. En los extremos de los ejes se indicará el nombre de la magnitud acompañado de la unidad entre paréntesis.

Las unidades que deben emplearse de forma preferente son las del sistema internacional (*SI*), basado en el kilogramo (kg), metro (m), segundo (s), amperio (A) y Kelvin (K). Hay que utilizar las abreviaturas estándar de estas unidades, sin emplear punto tras ellas. Así, una medida de tres segundos sería incorrecto escribirla como “3seg.”, o una de un amperio como “1Amp.”. La forma correcta es “3s” y “1A”.

I (A)	V (mV)
1.2	2.5
1.3	2.8
1.5	3.1
1.7	3.5
1.9	3.8

1.3. Recogida de datos

Algunas normas básicas a tener en cuenta en el laboratorio para una correcta recogida de datos experimentales son las siguientes.

- Anotar alguna indicación del aparato con el que se realizan las medidas y su precisión.
- Evitar la toma de datos en papeles en sucio. Anotar desde un principio en el cuaderno de laboratorio.
- No haga cálculos de medidas indirectas mientras realiza las medidas de la práctica.
- Los registros de los aparatos deben realizarse mediante tablas en la forma descrita con anterioridad.
- Utilizar la notación científica cuando aparezcan números muy grandes o pequeños al medir. Si la potencia es la misma para todos los valores medidos puede colocarse en el encabezamiento de la tabla y omitirse en las medidas.

1.4. Gráficas

Las gráficas son un elemento muy importante en la presentación de una memoria de prácticas y se les ha de prestar especial atención.

La variable independiente (relacionada con la causa física) se tomará en el eje de abscisas mientras que la variable dependiente (relacionada con el efecto físico) se representará sobre el eje de ordenadas. Los ejes de abscisas y ordenadas deberán etiquetarse adecuadamente, con el nombre (o símbolo) de la magnitud física representada acompañado de la unidad correspondiente entre paréntesis.

Los intervalos en abscisas y ordenadas se tomarán de forma que la gráfica ocupe por completo el papel milimetrado. Para que esto se cumpla es, en general, necesario utilizar escalas diferentes en los ejes de abscisas y ordenadas, y el origen de la escala puede no coincidir con el cero del eje correspondiente. No hay que indicar todos los valores de los datos representados sobre los ejes, aunque sí la escala.

Cuando sea preciso trazar una *recta de mejor ajuste* o *recta de regresión* a los datos experimentales, esta se indicará junto con los puntos. En la siguiente sección se explicará la forma de calcular la recta de regresión. Para dibujarla se tomarán dos puntos que estén dentro del intervalo de representación, x_1 y x_2 , en el eje de abscisas (OX) y se calcularán los correspondientes valores y_1 e y_2 . Se marcarán estos puntos y se trazará la recta que los une. Estos dos puntos se borrarán al terminar pues no son datos experimentales. **NO** trazar la recta de mínimos cuadrados “a ojo”.

Como veremos en la siguiente sección es posible que alguno de los puntos experimentales muestre un comportamiento muy diferente al resto. En ese caso es conveniente ignorarlo a la hora de hacer los cálculos, lo que debe indicarse tanto en el texto de la memoria como en la gráfica, rodeando con un círculo el correspondiente dato experimental. Es por esto que en general es aconsejable representar en primer lugar los puntos y a continuación hacer los cálculos.

Toda gráfica debe numerarse y acompañarse de un título que explique lo representado.

Ejemplo:

Los datos obtenidos al medir la posición que ocupa un móvil en cada instante t se recogen en la siguiente tabla de valores.

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r (m)	4.1	6.3	7.6	9.1	10.9	4.9	12.8	14.7	17.4

Suponemos que se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme, por lo que seguirá la fórmula $R(t) = R_0 + vt$, vamos a representar la gráfica de los puntos experimentales, y a calcular su velocidad como la pendiente de la recta de mejor ajuste.

Algunos ejemplos de los errores anteriormente citados pueden verse en las figuras 1 y 2, mientras que la representación correcta sería la de la figura 3.

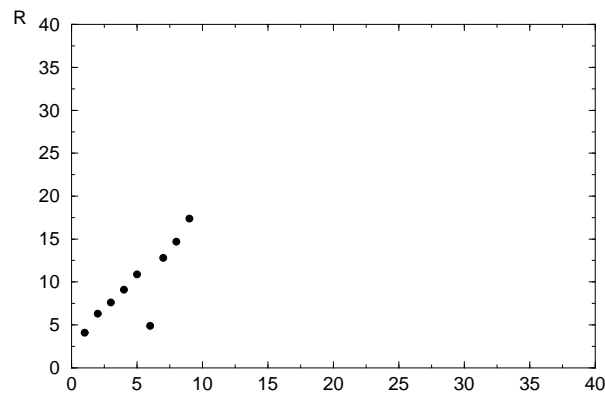


Figura 1:

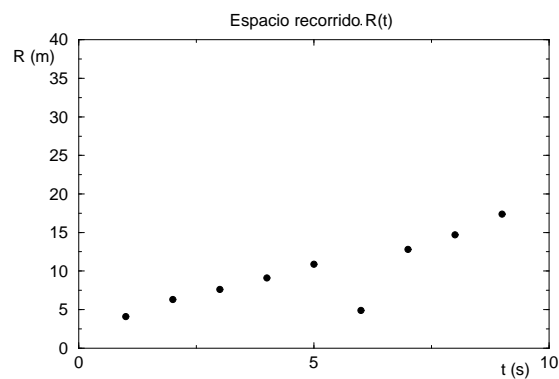


Figura 2:

2. Sección II: TEORÍA DE ERRORES

2.1. Introducción

Al medir **cuantificamos** nuestra experiencia del mundo exterior. Asignamos valores numéricos a magnitudes físicas, lo que conlleva la comparación con alguna magnitud de referencia. En

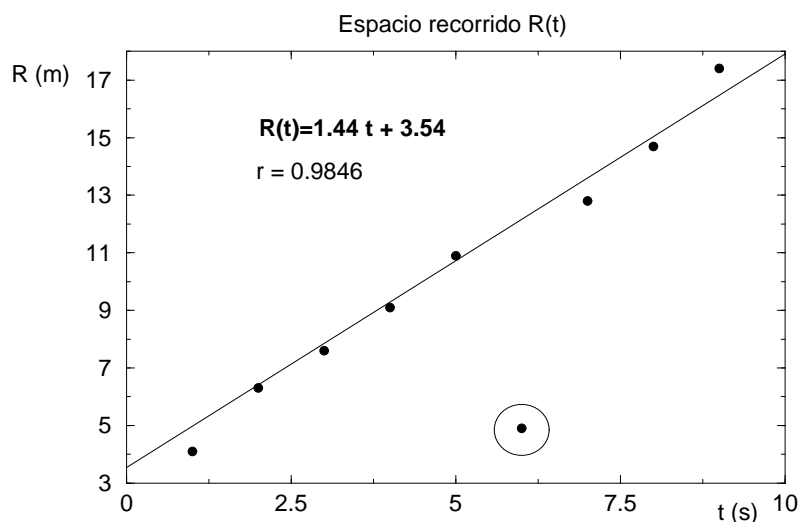


Figura 3:

el proceso de medida es de vital importancia tener en cuenta que las medidas que realicemos no son números exactos. Lo que realmente conocemos es un *intervalo* dentro del que esperamos que se encuentre el **valor verdadero** de la magnitud medida. Llamamos **valor verdadero** al valor que obtendríamos si al medir dispusiésemos de técnicas e instrumentos perfectos. Por su definición el valor verdadero resulta inalcanzable, en su lugar el proceso de medida nos proporciona un valor que esperamos cercano al verdadero junto a su **incertidumbre**. El valor de la incertidumbre o error nos dice lo cerca que estamos del valor verdadero. Esto implica que toda medida que no va acompañada del correspondiente error es incompleta. Por supuesto, siguiendo las normas explicadas en la sección anterior además del error las medidas deben ir acompañadas de sus correspondientes unidades.

Atendiendo a su origen existen dos tipos de errores:

- **Errores sistemáticos:** Son errores que se desvían del valor verdadero siempre en un mismo sentido. En general se deben a fallos del instrumental o método utilizado. Como ejemplo de estos errores podemos tomar el llamado *error de cero*, que consiste en que un aparato no marca cero cuando debería, o una mala calibración del instrumento de medida. Si una fuente de error sistemático ha sido identificada sus efectos deben ser eliminados restándolos de las medidas. Estos errores deben ser minimizados en lo posible, aunque no siempre son evidentes.
- **Errores accidentales o estadísticos:** Son aquellos errores que afectan a la medida una vez eliminados los errores sistemáticos. Su característica más importante es que son aleatorios pues se deben a causas imprevisibles. Esto hace que produzcan una dispersión de los resultados en torno al valor verdadero, lo que permite su tratamiento con métodos estadísticos en la llamada **Teoría de errores**. Un ejemplo de este tipo de errores serían las fluctuaciones en el voltaje proporcionado por la red eléctrica.

Algunos conceptos relativos al instrumento de medida que es importante tener claro son los siguientes:

- **Precisión:** Está relacionada con la magnitud del error que se obtiene cuando se mide una cantidad, sin tener que ver con lo cerca o lejos que la medida obtenida esté del

correspondiente valor verdadero. Es decir, al aumentar la precisión de un aparato se minimiza el error accidental cometido. Por ejemplo, una regla con divisiones de milímetros es más precisa que una escalada en centímetros.

- **Exactitud:** A diferencia del caso anterior un aparato es más exacto cuanto más se minimizan los errores sistemático aparejados. Esto quiere decir que la exactitud de un aparato está relacionada con la proximidad del valor medido al valor verdadero, encontrándose este último dentro del intervalo que marca el error del aparato.
- **Sensibilidad:** La sensibilidad de un aparato se incrementa conforme es capaz de detectar variaciones más pequeñas de la magnitud medida.
- **Fidelidad:** La fidelidad de un aparato la marca su capacidad de obtener resultados idénticos al realizar medidas de una cantidad en las mismas condiciones. Se relaciona con el grado de reproducibilidad de las medidas.

Son especialmente importantes los conceptos de precisión y exactitud. De nada sirve una medida extremadamente precisa cuando no se aproxima al valor verdadero. El caso contrario es igualmente negativo, medidas que contengan al valor verdadero pero cuya precisión sea tan pequeña que hagan inútil la información transmitida. En general, al hablar del error o la incertidumbre de una medida nos estamos refiriendo a su *precisión*.

2.1.1. Error absoluto y relativo

Definiremos a continuación dos conceptos de gran importancia como son el **error absoluto** y el **error relativo**, que no se deben confundir nunca.

Como hemos dicho anteriormente, al medir cuantificamos una magnitud física, cuantificación que conlleva cierta incertidumbre. Si llamamos A al valor verdadero de una magnitud, en general desconocido, y a al valor asignado en el proceso de medida se define el **error absoluto** (también llamado **incertidumbre absoluta**) como la *diferencia entre el valor verdadero y el valor asignado*, y lo denotaremos como E_a (otras formas de de notación utilizadas son δ_a o Δa)

$$E_a = A - a \quad .$$

Si, por ejemplo, estamos midiendo la longitud de una regla de 10 *cm* y obtenemos un valor para la medida de 10,1 *cm* entonces la incertidumbre absoluta es 0,1 *cm*. Es importante tener en cuenta que **el error absoluto tiene las mismas unidades que la magnitud medida**.

En general, al no conocerse el valor verdadero de la magnitud medida, es imposible calcular el valor de la imprecisión absoluta. Métodos estadísticos nos permitirán una estimación de esta imprecisión absoluta.

Como vimos en la práctica anterior la forma correcta de expresar un resultado es $a \pm E_a U$ donde U es la unidad correspondiente. Esto quiere decir que el valor verdadero de la magnitud que estamos midiendo se encuentra en el intervalo comprendido entre $a - E_a U$ y $a + E_a U$.

Una notación alternativa para una medida y su error es como $a(E_a) U$, donde se incluyen en el paréntesis únicamente la cifras significativas del error absoluto. Por ejemplo, si hubieramos obtenido en la medida de una longitud un valor estimado de 13,52 *cm* con una incertidumbre absoluta de 2,1 *mm* la forma correcta de escribir esta medida sería como

$$13,52 \pm 0,21 \text{ cm} \quad ,$$

o alternativamente como

$$13,52(21) \text{ cm} \quad .$$

El **error relativo** se define como *el cociente entre la imprecisión absoluta y el valor verdadero*. Por definición el error relativo es ADIMENSIONAL, esto es, no tiene unidades. Puede expresarse tal cual o como un porcentaje, multiplicándolo por 100. La notación usual para el error relativo de una magnitud a es ϵ_a .

Ejemplo:

Si medimos el valor de la constante $\pi = 3,1415927\dots$ y obtenemos como resultado 3,14 entonces el error absoluto será $E_\pi = 0,0015927\dots$ y el relativo $\epsilon_\pi = E_\pi/\pi \simeq 0,0005$, también pudiendo indicarse que el error relativo es del 0,05 %.

2.1.2. Errores de los aparatos

Como hemos indicado anteriormente, consideraciones estadísticas nos permitirán estimar los errores de nuestra medida, pero este estudio estadístico será posible cuando se disponga de varias medidas de una misma magnitud. Sin embargo, existen situaciones en las que esto no es posible y se dispone de una sola medida de la magnitud de interés. En ese caso se aplicará el criterio siguiente:

- Si la medida se ha realizado con un aparato **analógico** (basado en escala graduada) se tomará como error absoluto la mitad de la precisión del aparato. Se llama *precisión* de un aparato de medida a la mínima medida que este puede registrar.
- Si la medida se ha realizado con un aparato **digital** en este caso se toma como error absoluto directamente la precisión del aparato.

Cuando se han realizado varias medidas se realiza un tratamiento estadístico de las mismas que veremos más adelante.

2.2. Cifras significativas y redondeo

La precisión de una medida está relacionada con el número de dígitos que se incluyen en el resultado. Se llaman **cifras significativas** de un número a aquellas que determinan su valor, y cifras no significativas a aquellas que sólo nos dan una idea de su orden de magnitud. Para calcular el número de cifras significativas de un número podemos seguir el siguiente procedimiento

1. Llamamos cifra más significativa al primer dígito que sea diferente de cero *por la izquierda*.

Ejemplo: 251,3 \rightarrow 2

2. Si el número no incluye decimales, el primer dígito diferente de cero empezando *por la derecha* es la cifra menos significativa.

Ejemplo: 2570 \rightarrow 7

3. Si existen decimales la cifra menos significativa es la primera por la derecha *incluso si esta es un cero*.

Ejemplo: 2514,790 \rightarrow 0

4. Todos los dígitos entre la cifra más significativa y la menos significativa, incluyendo a estas dos, se cuentan como cifras significativas.

Ejemplo: Todos los números indicados a continuación poseen cuatro cifras significativas

1,051 1154. 123,5 234500 10,10 0,002222 .

La misma medida puede expresarse en diferentes escalas, pero el número de cifras significativas ES SIEMPRE EL MISMO. No depende de en qué escala expresemos nuestra medida. Se debe usar preferentemente la NOTACIÓN CIENTÍFICA, que resulta de obligatorio uso al escribir números muy grandes o pequeños.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 15,4 \text{ Km} &= 15400 \text{ m} = 1,54 \cdot 10^7 \text{ mm} \\ 0,12 \mu\text{F} &= 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ mF} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ F} \end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que, a la luz de lo explicado hasta ahora, por ejemplo

$$451 \text{ mm} \neq 451,0 \text{ mm} \quad ,$$

pues el segundo número tiene una cifra significativa más que el primero.

Una vez que conocemos nuestra medida y su error, hay que **redondear** ambos adecuadamente. La razón del redondeo estribará en que si, por ejemplo, el error afecta a la segunda cifra decimal de nuestro resultado, no tiene ningún sentido presentar la medida con ocho decimales. Serán incorrectos pues el error cometido hace que se desconozcan.

Para conservar un cierto número de cifras significativas de la medida debe redondearse adecuadamente siguiendo las reglas siguientes:

- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es inferior a cinco no se hace ningún cambio.
- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es superior a cinco se suma una unidad a la última cifra.
- Si la cifra siguiente a la última que se conserva es cinco se aumenta en una unidad cuando el dígito que se conserva es impar y no se varía si es par.

Ejemplo:

Si redondeamos dejando sólo dos cifras significativas en los números que dimos antes como ejemplo:

$$1,051 \quad 1154. \quad 123,5 \quad 234500 \quad 10,10 \quad 0,002222 \quad ,$$

obtenemos

$$1,1 \quad 1200 \quad 120 \quad 230000 \text{ (Más correctamente: } 2,3 \cdot 10^5) \quad 10 \quad 0,0022 \quad .$$

El número de cifras que se incluyen en un resultado debe ser aproximadamente una más que las que indique la precisión. Para redondear adecuadamente los resultados experimentales se siguen los pasos que reseñamos a continuación

1. Redondeamos el error teniendo en cuenta sus dos primeras cifras significativas. Si estas forman un número menor que 25 se conservan ambas, mientras que si el número es mayor se redondea a una cifra significativa.
2. Una vez redondeado el error debe redondearse la magnitud. Deben retenerse cifras hasta la última cifra significativa retenida para el error. El resto de cifras deben despreciarse, con cuidado de redondear adecuadamente la última cifra.
3. Por último se expresan conjuntamente la cantidad y sus unidades.

Ejemplo:

Supongamos que una medida indirecta de presión nos da como resultado

$$P = 12,343256367 \text{ Pa} \quad ,$$

en la tabla 1 analizamos como se expresaría correctamente este resultado para seis valores diferentes de la incertidumbre absoluta.

E_P (Pa)	Redondeo E_P (Pa)	Redondeo resultado (Pa)	Resultado final
0,002155	0,0022	12,3433	$12,3433 \pm 0,0022 \text{ Pa}$ $12,3433(22) \text{ Pa}$
0,055623	0,06	12,34	$12,34 \pm 0,06 \text{ Pa}$ $12,34(6) \text{ Pa}$
0,62158	0,6	12,3	$12,3 \pm 0,6 \text{ Pa}$ $12,3(6) \text{ Pa}$
10,8111	11	12	$12 \pm 11 \text{ Pa}$ $12(11) \text{ Pa}$
3,457233	3	12	$12 \pm 3 \text{ Pa}$ $12(3) \text{ Pa}$
0,09665	0,10	12,34	$12,34 \pm 0,10 \text{ Pa}$ $12,34(10) \text{ Pa}$

Cuadro 1:

2.3. Estadística de la medida

Supongamos que hemos conseguido reducir las fuentes de error de nuestro experimento a las puramente accidentales, librándonos de las sistemáticas. La existencia de estos errores aleatorios harán que cada vez que midamos la variable física que nos interesa obtengamos valores que pueden ser diferentes. Estos resultados se repartirán alrededor del *valor verdadero* de la magnitud, que desconocemos, obteniéndose a veces valores por encima del mismo y otras por debajo.

Ejemplo:

Supongamos que medimos con cronómetros diferentes, el tiempo que tarda en caer desde una altura de $3,0 \text{ m}$ un cuerpo que parte del reposo al suelo obteniendo así dos conjuntos de medidas, T_1 y T_2 .

T_1 (s)	0,80	0,82	0,76	0,76	0,74	0,79	0,77	0,79
T_2 (s)	0,9	0,9	0,7	0,8	0,7	0,8	0,7	0,6

Cuadro 2:

Por lo tanto a **una** realidad física le corresponde un conjunto de resultados diferentes, conjunto que es finito, pero que idealmente podríamos suponer infinito. La Estadística nos permite afrontar el estudio de estas colecciones de datos y extraer de ellas la información necesaria.

2.4. Distribuciones

Los resultados experimentales se reparten alrededor del valor verdadero de acuerdo con lo que se llama en Estadística una *función de distribución* o una *distribución de probabilidad*.

Dependiendo del experimento es necesario considerar una determinada función de distribución. Baste por ahora saber que las funciones de mayor interés a la hora de analizar datos experimentales son la *distribución binomial*, la *distribución de Poisson*, la *distribución de Lorentz* y la *distribución normal* o *de Gauss*. Esta última es la distribución más ampliamente usada y la que se ha considerado al derivar los resultados que presentamos en el resto de la práctica.

Por tanto, de ahora en adelante, suponemos que nuestras fuentes de error son las puramente accidentales y que, además, estos errores aleatorios se reparten de acuerdo con la distribución normal. Esto implica que cada error accidental es provocado por un gran número de pequeños errores que a su vez pueden considerarse como accidentales e independientes, y que cada uno de estos pequeños errores aparece con igual probabilidad con signo positivo y negativo.

En la bibliografía que se encuentra al final de la práctica puede encontrarse un tratamiento matemático más completo de este problema.

2.5. Cálculo del valor asignado y su indeterminación absoluta

Supongamos que llevamos a cabo un experimento y medimos cierta magnitud física que llamaremos y . Realizamos $N = 100$ medidas de dicha magnitud en el laboratorio, obteniendo así una distribución de valores. ¿Cómo damos a conocer ahora nuestros resultados?

Debemos extraer de nuestras mediciones experimentales una *aproximación* al valor verdadero de la magnitud y , y estimar el error absoluto que conlleva nuestra aproximación. Buscamos por tanto traducir nuestro conjunto de datos experimentales a la forma *valor \pm error* (sin olvidar las unidades...).

La primera magnitud que nos será de interés es el llamado **valor medio** del conjunto de medidas. Para un conjunto de medidas experimentales $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ definimos su valor medio, que llamaremos \bar{y} , como la *media aritmética* de los distintos valores medidos. Es por tanto igual a

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad .$$

Una fórmula equivalente a la anterior es la expresada en términos de las frecuencias de cada medida. Si suponemos que al medir y en N ocasiones hemos obtenido n valores diferentes y_i , $i = 1, \dots, n$, definimos la frecuencia del i -ésimo valor como $P_i = N_i/N$, donde N_i es el número de veces que hemos obtenido y_i al medir y N el número total de medidas. Podemos entonces escribir la fórmula del valor medio como

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad .$$

Vamos a identificar \bar{y} , el valor medio de nuestra distribución de medidas, con el valor verdadero de la misma. En general, cuando las fuentes de error son puramente aleatorias, conforme crece el número N de medidas se va acercando el valor medio al valor verdadero, identificándose ambos en el caso límite de infinitas medidas.

Ejemplo:

Hallamos los valores medios de las distribuciones T_1 y T_2 del ejemplo anterior.

$$\bar{T}_1 = \frac{0,80+0,82+0,76+0,76+0,74+0,79+0,77+0,79}{8} = 0,77875 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \frac{0,9+0,9+0,7+0,8+0,7+0,8+0,7+0,6}{8} = 0,7625 \text{ s} \\ &= \frac{2}{8}0,9 + \frac{2}{8}0,8 + \frac{3}{8}0,7 + \frac{1}{8}0,6 = 0,7625 \text{ s} \quad , \end{aligned}$$

donde en el último caso hemos hecho uso de la fórmula que utiliza las frecuencias de cada medida.

Ya tenemos una estimación del valor verdadero, ahora necesitamos una aproximación al error que estamos cometiendo, lo que implica definir algún parámetro que nos permita cuantificar la anchura de nuestra distribución de valores experimentales alrededor del valor medio. Un primer parámetro de interés es la llamada **desviación**. Definimos la **desviación**, d_{y_i} , de la i -ésima medida de la magnitud y como la diferencia entre la medida y el valor medio de la distribución

$$d_{y_i} = y_i - \bar{y} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad .$$

Ejemplo:

Las desviaciones d_{t_i} en los conjuntos T_1 y T_2 son

$$\begin{aligned} T_1(s) \quad d_{t_1} &= 0,80 - 0,77875 = 0,02125 \quad , \quad d_{t_2} = 0,04125 \quad , \quad \dots, d_{t_8} = 0,011 \\ T_2(s) \quad d_{t_1} &= 0,9 - 0,7625 = 0,1375 \quad , \quad d_{t_2} = 0,1375 \quad , \quad \dots, d_{t_8} = -0,1625 \quad . \end{aligned}$$

Los valores de d_{y_i} nos proporcionan una idea de la distancia al valor medio de cada medida, pero buscamos un parámetro que nos caracterice la distribución en su conjunto. Para ello se hace uso de la llamada **desviación normal** o **estándar** que escribimos como σ_y

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_{y_i}^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}} \quad .$$

Por definición la **desviación estándar tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida**, por tanto es conveniente expresarla en idénticas unidades.

Ejemplo:

La desviación estándar de nuestros dos conjuntos de medidas T_1 y T_2 es

$$\begin{aligned} \sigma_{T_1} &= 0,022 \text{ s} \\ \sigma_{T_2} &= 0,106 \text{ s} \quad . \end{aligned}$$

Se llama **varianza** de la distribución al cuadrado de la desviación estándar, σ_y^2 .

La desviación estándar sí nos da idea de la anchura de la distribución de valores medidos. Sin embargo, consideraciones estadísticas hacen que estimemos la incertidumbre absoluta de nuestra medición no a través de la desviación estándar definida anteriormente, sino de la **desviación estándar del valor medio**, $\sigma_{\bar{y}}$, que definimos como

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \quad .$$

Como se aprecia en su definición, la desviación estándar del valor medio, $\sigma_{\bar{y}}$ es siempre menor que la desviación estándar σ_y y posee las mismas dimensiones. Este parámetro está relacionado con la anchura de la distribución de valores medios que se obtendría si se repitiera varias veces la colección de un conjunto de datos calculando cada vez la media (Ver bibliografía). Este es el parámetro que asociaremos con la incertidumbre de nuestra medida.

Por tanto cuando dispongamos de un conjunto de medidas de una magnitud $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$, expresaremos el resultado de esas medidas como

$$y \pm E_y \Rightarrow \bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}} \quad ,$$

y el error relativo será

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \quad .$$

Ejemplo:

Expresamos correctamente en la forma resultado \pm error las medidas de T_1 y T_2 :

$$T_1 \quad \sigma_{\bar{T}_1} = 0,0078 \text{ s} ; \quad T_1 = 0,779 \pm 0,008 \text{ s}$$

$$\epsilon_{T_1} = 0,010 \simeq 1 \%$$

$$T_2 \quad \sigma_{\bar{T}_2} = 0,0375 \text{ s} ; \quad T_2 = 0,76 \pm 0,04 \text{ s}$$

$$\epsilon_{T_2} = 0,053 \simeq 5 \%$$

Ejemplo:

Al medir $N = 20$ veces la distancia entre dos puntos se obtienen los valores

$l \text{ (m)}$	2,356	2,357	2,359	2,361	2,362	2,363	2,365
N_i	1	2	3	8	4	1	1
$\bar{l} \text{ (m)}$	2,3605						
$d_l \text{ (m)}$	-0,005	-0,004	-0,002	0,000	0,001	0,002	0,004
$d_l^2 \text{ (m}^2\text{)}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0,000	10^{-6}	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{\bar{l}} \text{ (m)}$	$4,8 \cdot 10^{-4} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$						
Resultado	$2,3605 \pm 0,0005 \text{ m}$						

Para tratar de forma correcta los resultados es necesario tomar en cuenta la posible aparición de **errores sistemáticos** y también el **error de escala**. Si se supone que se ha conseguido eliminar por completo los errores sistemáticos, **el error total nunca deberá ser menor que el error de escala**.

2.6. Propagación de errores en medidas indirectas

En general los resultados obtenidos a través de las medidas llevadas a cabo (*medidas directas*) son manipuladas matemáticamente para el cálculo de otras magnitudes de interés (*medidas indirectas*). Tendremos que aprender como *propagar* el error de las medidas directas a las indirectas. Es decir, analizaremos en este apartado qué error se comete al calcular una magnitud a partir de valores de otras magnitudes que a su vez están afectadas de cierta incertidumbre.

A continuación veremos cómo calcular el error de una función de dos variables, cada una de las cuales tiene un error asignado. Generalizaremos al caso de n variables, siendo el caso de una variable un límite trivial de los anteriores.

Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función de dos variables independientes¹. Un ejemplo de función de dos variables puede ser el periodo T de un péndulo matemático, que podemos considerar función de la longitud l del péndulo y del valor de la aceleración de la gravedad g en el lugar donde se encuentra el péndulo: $T = f(l, g)$.

Para una función de dos variables $z = f(x, y)$ la desviación estándar del valor medio de z es

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 \quad .$$

¹Que las variables sean independientes básicamente quiere decir que una no se ve afectada por cambios en la otra.

Tomando la raíz cuadrada obtendríamos el error correspondiente. Generalizando para una función de n variables $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tenemos

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}}^2 \sigma_{\bar{x}_j}^2} ,$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}}$ es la derivada parcial de f respecto a x_j evaluada para $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$. En el cuadro 3 se presentan los resultados para la propagación de errores para algunas de las funciones más frecuentes.

Relación	Error
$z = \exp(x)$	$\sigma_z^2 = \exp(2x)\sigma_x^2$
$z = \ln(x)$	$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_x^2}{x^2}$
$z = x \pm y$	$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$z = xy$	$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$
$z = x/y$	$\frac{\sigma_z^2}{z^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$

Cuadro 3:

Ejemplo:

Supongamos que nos piden calcular la densidad de una pieza homogénea de forma cónica sabiendo que su masa es $m = 300,23 \pm 0,05 \text{ g}$, su altura $h = 12,3 \pm 0,1 \text{ cm}$ y el radio de la base $r = 7,44 \pm 0,01 \text{ cm}$.

La densidad es igual al cociente de la masa entre el volumen de la pieza (al ser esta homogénea) luego

$$\rho = \rho(m, h, r) = \frac{m}{\pi r^2 h / 3} = 0,42109 \text{ g/cm}^3 .$$

Calculamos a continuación las derivadas parciales necesarias para el cálculo del error

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial m} &= \frac{3}{\pi r^2 h} ; \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = 1,40310^{-3} \text{ cm}^{-3} \\ \frac{\partial \rho}{\partial h} &= -\frac{3m}{\pi r^2 h^2} ; \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = -3,4210^{-2} \text{ g/cm}^4 \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} &= -\frac{6m}{\pi r^3 h} ; \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_{\bar{m}, \bar{r}, \bar{h}} = -1,13210^{-1} \text{ g/cm}^4 , \end{aligned}$$

y substituyendo en la fórmula del error obtenemos

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{(1,403 \cdot 10^{-3})^2 0,05^2 + (-3,42 \cdot 10^{-2})^2 0,1^2 + (-1,132 \cdot 10^{-1})^2 0,01^2} = 0,003603 \text{ g/cm}^3 ,$$

y el resultado final sería

$$\rho = 0,421 \pm 0,004 \text{ g/cm}^3 .$$

2.7. Recta de regresión: Ajuste de curvas y método de los mínimos cuadrados

2.7.1. Ajuste de curvas

Siendo una herramienta de gran ayuda, la estimación mediante métodos gráficos no proporciona resultados precisos. Es necesario un procedimiento matemático que nos permita identi-

car la *mejor curva* para un conjunto dado de datos experimentales. Por supuesto es necesario definir un criterio claro de lo que queremos decir al referirnos a la *mejor curva*.

Supongamos que las dos magnitudes X e Y están relacionadas por una fórmula conocida, en la que además intervienen r parámetros

$$Y = f(X; a_1, \dots, a_r) \quad .$$

Ejemplo:

Algunas de las funciones que más frecuentemente aparecen son

- Recta: $Y = a_1X + a_2$
- Parábola: $Y = a_1X^2 + a_2X + a_3$
- Parábola con eje de simetría OY : $Y = a_1X^2 + a_3$
- Función proporcional inversa (Hipérbola): $Y = 1/(a_1X + a_2)$
- Exponencial: $Y = a_1 \exp(a_2X)$

Una vez que escogamos una forma funcional para la dependencia de Y frente a X hemos de determinarla buscando los valores de los r parámetros a_i que nos proporcionen el **mejor ajuste** a los datos experimentales.

Si tenemos r parámetros y medimos $N = r$ pares (X_i, Y_i) podríamos plantear un sistema con r ecuaciones y r incógnitas y resolverlo para determinar nuestros parámetros. Sin embargo, para reducir la influencia de errores experimentales y, sobre todo, si se quiere investigar si la función escogida es adecuada o no, es necesario realizar un mayor número de medidas: $N > r$.

Ahora bien, si $N > r$ entonces tenemos un mayor número de ecuaciones que de incógnitas y en general se nos plantea un sistema incompatible que no podemos resolver. Buscamos entonces un criterio que permita hallar unos parámetros óptimos.

2.7.2. Método de mínimos cuadrados

Este método proporciona una forma sistemática de buscar los parámetros para optimizar el acuerdo de una función con un conjunto de datos experimentales. El método plantea que los parámetros óptimos son aquellos que minimizan χ^2 (chi-cuadrado)² que se define como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{f(X_i; a_1, \dots, a_r) - Y_i}{E_{Y_i}} \right]^2 \quad ,$$

donde N es el número de medidas experimentales. En la bibliografía se puede encontrar una completa introducción al problema de estimar adecuadamente el grado de confianza que puede asignarse a un ajuste, un tema que va más allá del objetivo de esta práctica.

Al imponer la condición de mínimo sobre χ^2 , anulando las primeras derivadas respecto a cada uno de los parámetros, se obtienen r ecuaciones con r incógnitas, cuya solución nos da los parámetros buscados.

Estos son los principios generales del método de mínimos cuadrados. A continuación vamos a dar las fórmulas para el caso en que la función f sea un polinomio de primer grado, esto es, una recta.

²En la bibliografía puede encontrarse un tratamiento más completo de este tema, que sólo trataremos someramente.

2.7.3. Recta de regresión

En este apartado se dan las fórmulas necesarias para el cálculo de la **recta de mejor ajuste** o **recta de regresión**, $Y = f(X; a, b) = aX + b$, a un conjunto de N datos experimentales. Este es el caso más práctico, y conlleva un álgebra menos engorrosa que el resto de funciones posibles. Vamos a suponer que el error de la magnitud física X es despreciable, mientras que los errores para todos los valores de Y son idénticos. Para casos más complejos puede consultarse la bibliografía.

Según el método de mínimos cuadrados hemos de minimizar

$$\begin{aligned}\chi^2(a, b) &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{(aX_i + b) - Y_i}{E_{Y_i}} \right]^2 \\ &= \frac{1}{E_Y^2} \sum_{i=1}^N [(aX_i + b) - Y_i]^2 \quad ,\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la igualdad de los errores de la magnitud Y . Imponiendo las condiciones de mínimo

$$\frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial b} = 0 \quad ,$$

y resolviendo las dos ecuaciones que resultan, obtenemos que los valores de la pendiente y la ordenada en el origen son

$$\begin{aligned}a &= \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{x^2} - (S_x)^2} \\ b &= \frac{S_{x^2} S_y - S_x S_{xy}}{NS_{x^2} - (S_x)^2} \quad ,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}S_x &= \sum_{i=1}^N X_i \quad ; \quad S_y = \sum_{i=1}^N Y_i \\ S_{x^2} &= \sum_{i=1}^N X_i^2 \quad ; \quad S_{y^2} = \sum_{i=1}^N Y_i^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^N X_i Y_i \quad .\end{aligned}$$

Se puede demostrar fácilmente que la recta de regresión pasa por el punto (\bar{X}, \bar{Y}) luego una vez calculada la pendiente de la recta es muy fácil calcular la ordenada en el origen despejando de $\bar{Y} = a\bar{X} + b$.

Una idea de lo cercanos que están nuestros puntos experimentales a una recta, es decir, de lo correcto que es aproximar el comportamiento de Y frente a X como un polinomio de primer grado, nos lo proporciona el llamado **coeficiente de correlación** (r) cuya expresión viene dada por

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(NS_{x^2} - S_x^2)(NS_{y^2} - S_y^2)}} \quad .$$

El módulo del coeficiente de correlación varía entre cero y uno: $0 \leq |r| \leq 1$. Cuando los puntos se encuentran muy próximos a una recta el coeficiente de correlación es muy próximo a 1 (-1

si la pendiente de la recta es negativa), cumpliéndose la igualdad únicamente en el caso de un alineamiento perfecto. Un valor de r próximo a cero quiere decir que se ha obtenido un mal ajuste y los puntos siguen una función diferente a la recta. Al escribir el coeficiente de correlación de un ajuste lineal *no debe aproximarse a ± 1* , y debe darse hasta la primera cifra que resulte diferente de nueve.

También se puede calcular, mediante propagación de errores en los parámetros calculados, el error de los mismos. Damos únicamente los resultados, sin demostrarlos. La desviación de la pendiente y la ordenada en el origen resultan, en función del coeficiente de correlación

$$\sigma_{\bar{a}} = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}}$$

$$\sigma_{\bar{b}} = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{S_{x^2}(1-r^2)}{N(N-2)}}$$

y el error del parámetro lo tomamos como el valor de la desviación típica.

Es importante dibujar los puntos experimentales antes de calcular la recta de regresión. Esto nos permite eliminar puntos que tengan errores imprevistos y estén fuera de las condiciones experimentales. Además nos permite predecir lo acertado o no de ajustar los datos a una recta.

Aunque Y dependa de X de forma más complicada que la lineal, en muchas ocasiones es posible reformular el problema mediante un cambio de variables que nos permita convertirlo de nuevo en el caso lineal presentado.

Ejemplo:

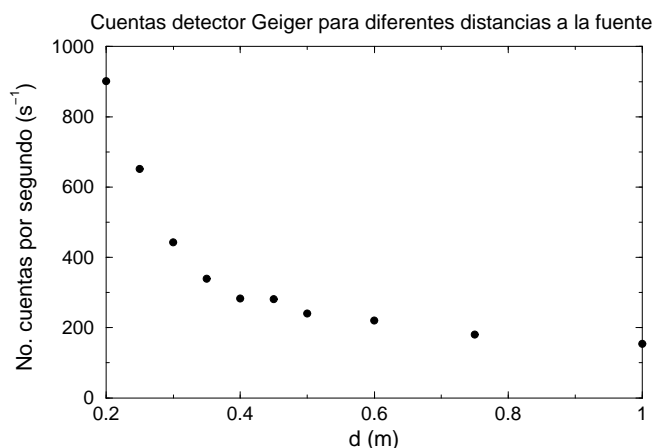


Figura 4:

Se mide el número de cuentas que registra un detector Geiger a diferentes distancias de una fuente radiactiva, obteniéndose los resultados de la tabla 4.

El número de cuentas que registra un detector conforme lo alejamos de una fuente radiactiva es proporcional a la inversa al cuadrado de la distancia detector-fuente³. Si representamos directamente el número de cuentas frente a la distancia a la fuente obtenemos la gráfica 4, en la que parece que se confirma esa dependencia.

Para hacer un ajuste lineal nos basta entonces representar el número de cuentas frente a *la inversa de la distancia al cuadrado*. De este modo transformamos la dependencia cuadrática

³Conforme alejamos el detector de la fuente radiactiva el ángulo sólido que presenta la ventana del detector disminuye como $\frac{1}{r^2}$.

Medida	Distancia d (m)	$1/d^2$ (m^{-2})	Cuentas por seg (s^{-1})
1	0,20	25,00	901
2	0,25	16,00	652
3	0,30	11,11	443
4	0,35	8,16	339
5	0,40	6,25	283
6	0,45	4,94	281
7	0,50	4,00	240
8	0,60	2,78	220
9	0,75	1,78	180
10	1,0	1,00	154

Cuadro 4:

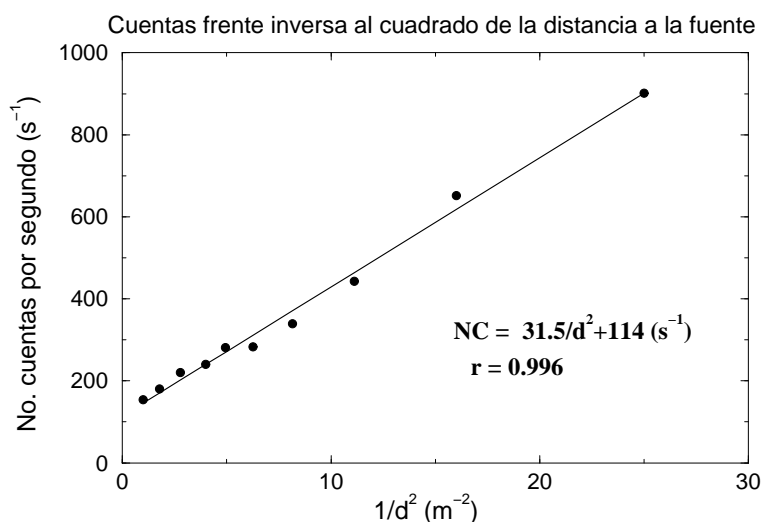


Figura 5:

en lineal (Ver tabla 4). En la tabla 5 se encuentran los resultados de la regresión, incluyendo los resultados intermedios para S_x , S_y , etc. que no es necesario especificar en la práctica. El resultado final, con los puntos experimentales y la recta de mejor ajuste se encuentra en la gráfica 5.

2.8. Bibliografía

Existe una extensa bibliografía sobre *Teoría de errores*. Aunque en algunos libros de Física General se puede encontrar una introducción a este tema, los libros de consulta que se sugieren son

- D. C. Baird; *Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Ed. Prentice Hall (1991).
- Carlos Sánchez del Río; *Análisis de errores*. Eudema Universidad (1989).
- P. R. Bevington y D. K. Robinson; *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. Ed. McGraw Hill (1992).

N	S_x	S_y	S_{x^2}	S_{xy}	S_{y^2}
10	81,02	3693	1162,4	$4,585 \cdot 10^4$	$1,869 \cdot 10^6$
	$a \text{ (m}^2/\text{s)}$	$\sigma_{\bar{a}} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$b \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\sigma_{\bar{b}} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	r
	31,5	1,0	114	11	0,995996

Cuadro 5:

- W. Lichten; *Data and Error Analysis*. Ed. Allyn and Bacon, Inc (1988).
- J. R. de F. Moneo y Gonzalo Madurga; *Los errores en las medidas físicas y ajuste por mínimos cuadrados*. Apuntes departamento Física Atómica Molecular y Nuclear, Universidad de Sevilla.

3. Ejercicios

Ejercicio 1

Si el diámetro de una mesa circular se conoce con un error relativo del 1 %, ¿ Con qué error relativo se conoce su área? ¿ Sería mejor determinar con un error relativo del 1 % el radio de la mesa en vez del diámetro?

Ejercicio 2

Cuando un rayo de luz incidente que viaja en un medio de índice de refracción n_1 pasa a otro medio con índice de refracción n_2 , el rayo se desvía y se dice que se refracta. El ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de acuerdo con la ley de Snell: $n_1 \text{sen} \alpha_1 = n_2 \text{sen} \alpha_2$, donde todos los ángulos se refieren a la normal al plano de separación entre los medios. Hallar n_2 , su incertidumbre absoluta E_{n_2} y su incertidumbre relativa ϵ_{n_2} , si hemos obtenido en un experimento los siguientes valores para α_1 , α_2 y n_1 .

$$\alpha_1 = 22,3 \pm 0,4^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 14,44 \pm 0,15^\circ \quad , \quad n_1 = 1,0003 \pm 0,0005 \quad .$$

En el caso que necesitáramos una medida más precisa de la obtenida para n_2 , ¿qué medida sería más efectiva, medir con un error diez veces menor el índice de refracción n_1 o reducir a la mitad el error en la medida de los ángulos? Razona tu respuesta.

Nota: El índice absoluto de refracción n de un medio se define como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío (c) y la velocidad de la luz en el medio (v): $n = c/v$. Por tanto es una magnitud adimensional y siempre mayor que uno.

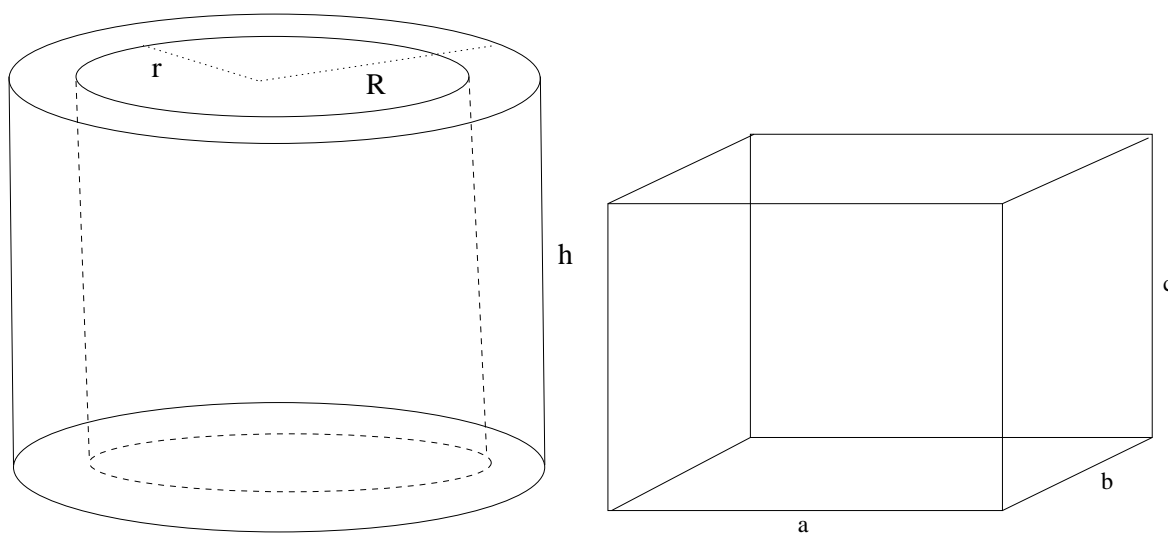


Figura 6: Diagramas de los volúmenes a calcular

Ejercicio 3

Suponiendo que el resultado de seis medidas diferentes de los parámetros relevantes de los dos volúmenes de la figura 6 se resume en la tabla 6; calcular los volúmenes de los dos sólidos, estimando correctamente el error correspondiente. Suponiendo que el cuerpo de forma cúbica es homogéneo y tiene una masa $m = 100,6 \pm 0,5 \text{ g}$, calcular su densidad y la incertidumbre que esta lleva asociada.

Medida	R (mm)	r (mm)	h (cm)	a (cm)	b (cm)	c (cm)
1	48.51	43.42	29.12	2.347	3.737	1.921
2	47.39	42.94	29.14	2.351	3.731	1.919
3	48.81	42.59	28.99	2.348	3.731	1.923
4	47.52	43.11	29.13	2.347	3.732	1.920
5	47.93	42.45	29.13	2.350	3.735	1.919
6	47.88	42.41	29.06	2.351	3.736	1.922

Cuadro 6: Resultados de las medidas.

Ejercicio 4

Se realizó un experimento para medir la impedancia de un circuito R-L en serie. La impedancia Z depende de la resistencia R , la frecuencia de la fuente ν y la inductancia L como

$$Z^2 = R^2 + 4\pi^2\nu^2L^2 \quad .$$

En el experimento se midió Z en función de ν . La lecturas obtenidas se dan en la tabla 7.

ν (Hz)	12,3	15,8	19,4	20,0	22,9	24,5	26,9	29,2	29,6
Z (Ω)	7,4	8,4	9,1	9,6	10,3	10,5	11,4	11,9	12,2

Cuadro 7:

Se supone que todas las medidas de la impedancia están afectadas de una incertidumbre idéntica y que la incertidumbre en la medida de ν es despreciable. Todas las unidades del problema se expresan en el SI, donde la unidad de resistencia es el ohmio (Ω) y la de inductancia el henrio (H).

1. Dibuje los puntos experimentales representando Z^2 frente a ν^2 .
2. Obtenga la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de mejor ajuste. Obténganse también su respectivos errores.
3. Incluya la recta de mejor ajuste en la gráfica con los puntos experimentales.
4. A partir de los resultados del apartado segundo calcule el valor de la inductancia L y su error, expresándolos de forma adecuada.
5. A partir de los resultados del apartado segundo calcule el valor de la resistencia y su error, expresándolos de forma adecuada.

