

Relación de ejercicios Aproximación de una binomial por una normal

Ejercicio 1

Una reciente encuesta realizada sobre hábitos de ocio juvenil en cierta comunidad autónoma, determina que el 55 % de los estudiantes de bachillerato ha asistido a un concierto en el último año. Elegidos 12 estudiantes de bachillerato al azar:

- Calcule la probabilidad de que exactamente tres de ellos hayan asistido a un concierto en el último año.
- Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya asistido a un concierto en el último año.
- Si en una determinada localidad de esta comunidad autónoma hay 200 estudiantes matriculados en bachillerato, calcule la probabilidad de que al menos 125 de ellos hayan asistido a un concierto en el último año.

Solución:

Sea $X = \text{Nº de estudiantes de bachillerato que han asistido a un concierto de entre 12}$

$p = \text{probabilidad de asistir a un concierto}$

$$n = 12; \quad p = 0.55; \quad q = 1 - p = 0.45$$

$$X \sim B(12; 0.55)$$

$$\text{a) } P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0.55^3 \cdot 0.45^9 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot 0.55^3 \cdot 0.45^9 = 220 \cdot 0.55^3 \cdot 0.45^9 = 0.028$$

La probabilidad de que exactamente tres de los 12 hayan asistido es de 0.028

$$\text{b) } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0.55^0 \cdot 0.45^{12} = 1 - \frac{12!}{0! \cdot 12!} \cdot 0.55^0 \cdot 0.45^{12} = 1 - 6.895 \cdot 10^{-5} = 0.99993105$$

La probabilidad de que al menos uno de los 12 haya asistido a un concierto es 1

c) $Y = \text{Nº de estudiantes de bachillerato que han asistido a un concierto de entre 200}$

$$n = 200; \quad p = 0.55; \quad q = 1 - p = 0.45 \quad Y \sim B(200; 0.55)$$

Como $n = 210 > 30$; $np = 200 \cdot 0.55 = 110 > 5$; $nq = 200 \cdot 0.45 = 90 > 5$, entonces

$$Y' \sim N(np; \sqrt{npq}) = N(110; 7.04)$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 125) &= P(Y' \geq 124.5) = P\left(Z \geq \frac{124.5 - 110}{7.04}\right) = P(Z \geq 2.06) = 1 - P(Z < 2.06) \\ &= 1 - 0.9803 = 0.0197 \end{aligned}$$

La probabilidad de que al menos 125 de los 200 hayan asistido a un concierto es de 0.0197

Ejercicio 2

En una cierta huerta el contenido de potasio de una patata mediana, en mg, sigue una ley Normal de media 500 y desviación típica 50 mg.

- a) ¿Qué porcentaje de patatas medianas tienen un contenido en potasio entre 420 y 534.5 mg?
- b) En un saco de 84 patatas medianas ¿cuál es la probabilidad de que 60 de ellas tengan un contenido de potasio entre 420 y 534.5 mg? ¿Y de que haya entre 54 y 63 patatas con ese contenido de potasio?

Ejercicio 3

Un investigador está estudiando el impacto de la Peste Negra en una zona rural de la España del siglo XIV. Según estudios históricos anteriores, se estima que la probabilidad de que un individuo adulto muriera a causa de la enfermedad en la España del siglo XIV era del 28%. Según los registros, dicha zona rural estaba habitada por 250 personas a principios de siglo.

- a) Calcule la probabilidad de que el número de fallecidos por la enfermedad sea inferior a 80 personas.
- b) Calcule la probabilidad de que el número de fallecidos por la enfermedad no difiera de 80 en más de 10 personas.
- c) Calcule la probabilidad de que la población se reduzca al menos en un 20% a causa de la enfermedad.

Ejercicio 4

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de obtener cruz. Si lanzamos la moneda 1000 veces al aire, se pide:

- a) Calcule la probabilidad de obtener cara y cruz con esta moneda.
- b) Indique la distribución que sigue la variable “número de cruces al lanzar 1000 veces la moneda al aire” y calcule su esperanza y varianza.
- c) Calcule la probabilidad de que, al lanzar la moneda 1000 veces, el número de cruces:
 - i) Sea exactamente 350.
 - ii) Sea mayor que 300.
 - iii) Sea menor que 500.
 - iv) Esté comprendido entre 320 y 340.

Ejercicio 5

En una encuesta realizada a 2000 trabajadores sobre una nueva ley laboral, se ha observado que, históricamente, alrededor del 60% de los trabajadores suelen mostrarse a favor de reformas laborales de este tipo.

El gobierno quiere estimar la probabilidad de que, en esta muestra de 2000 trabajadores, al menos 1250 se muestren a favor de la ley.

Calcule la probabilidad de que al menos 1250 trabajadores estén a favor de la ley. Interpreta el resultado en el contexto social del problema

Ejercicio 6

Dado un experimento aleatorio nos fijamos en un suceso A del que sabemos que $P(A) = 2P(A^c)$. Si realizamos 5 veces dicho experimento aleatorio en condiciones de independencia.

- d) ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria X que mide el número de veces que ocurre el suceso A ? Halle $P(X = 2)$.
- e) ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria Y que mide el número de veces que no ocurre el suceso A ? Halle $P(Y = 4)$.
- f) ¿Qué relación existe entre la desviación típica de la variable X y la de la variable Y ?
- g) Si el citado experimento se realiza 100 veces en condiciones de independencia, halle la probabilidad de que el suceso A ocurra entre 65 y 70 veces.

Ejercicio 7

Una empresa tecnológica ha desarrollado una aplicación popular y, según estudios previos, el 36% de los usuarios se declara “muy satisfecho” con la app.

Para un estudio de seguimiento, se selecciona una muestra aleatoria de 100 usuarios de la app.

- a) ¿Cuál es el número esperado de usuarios en la muestra que dicen estar “muy satisfechos”?
- b) Calcule la probabilidad de que más de 45 usuarios de la muestra se declaren “muy satisfechos” con la app.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los usuarios de la muestra estén “muy satisfechos”?
- d) Determine la probabilidad de que el número de usuarios “muy satisfechos” sea mayor o igual que 35, sabiendo que es menor o igual que 50.

Ejercicio 8

Un banco está analizando el comportamiento de sus clientes para valorar el riesgo de impago. Según los datos históricos, aproximadamente el 8% de los clientes no pagan a tiempo sus préstamos personales. El banco selecciona 500 préstamos al azar de su cartera para revisar la situación actual. Calcula la probabilidad de que más de 50 préstamos no se paguen a tiempo. Interpreta el resultado en el contexto financiero del problema.

Ejercicio 9

Según un informe del Ministerio para la Transición Ecológica, en el 30% de los hogares españoles se recicla correctamente todos los residuos. Se seleccionan al azar 10 hogares.

- a) Calcule la probabilidad de que en exactamente 5 de ellos se recicle correctamente.
- b) Determine la probabilidad de que en al menos un hogar no se recicle correctamente.
- c) En una encuesta a 2000 hogares, estime la probabilidad de que entre el 28% y el 33% de ellos se recicle correctamente.

Ejercicio 10

Un alumno contesta las 100 preguntas de un examen, cuyas respuestas son todas Verdadero o Falso, lanzando una moneda al aire y contestando Verdadero, si sale cara y Falso, si sale cruz.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que saque una calificación mayor o igual que 5, pero menor que 7?

Ejercicio 11

En un plan de conservación de la “tortuga boba” en una playa de Cabo Verde, se estima que el 30% de las tortugas que desovan son primerizas (es su primera vez).

Si en esta temporada se han registrado 150 desoves, calcula:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de 50 de ellas sean primerizas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 40 de ellas sean primerizas?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de tortugas primerizas esté estrictamente entre 42 y 48?

Ejercicio 12

Se sabe que el 3% de los coches que produce una fábrica presenta algún defecto en el motor durante el primer año. Si en un mes ha producido un lote de 2000 coches, calcula la probabilidad de que:

- a) En el lote haya menos de 50 vehículos defectuosos.
- b) En el lote haya exactamente 70 vehículos defectuosos.
- c) ¿Cuántos de los vehículos del lote cabe esperar que sean defectuosos?

Ejercicio 13

El 60% de los jóvenes andaluces tienen un móvil de última generación.

- a) Se eligen aleatoriamente 8 jóvenes andaluces. Calcule la probabilidad de que entre 4 y 6 (inclusivos) de estos jóvenes tengan un móvil de última generación.
- b) Si se eligen aleatoriamente 200 jóvenes andaluces. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 110 y 130 (inclusivos) tengan un móvil de última generación?

Ejercicio 14

En una ciudad, un partido político está preparando su campaña electoral y se estima que su nivel de apoyo histórico y actual es del 40% de los votantes censados. El equipo de campaña decide contratar a una empresa demoscópica para realizar una encuesta en la ciudad. La empresa selecciona a 300 votantes censados de manera totalmente aleatoria e independiente, garantizando la representatividad del sondeo. Calcule:

- a) El número esperado de votantes que se prevé que los apoyen.
- b) La probabilidad de que al menos 135 personas en la muestra apoyen al partido.
- c) La probabilidad de que el número de simpatizantes esté entre 110 y 125 personas, sin incluir los extremos.

Ejercicio 15

La administración de un medicamento produce una mejoría en el 75% de los pacientes que tienen una determinada enfermedad. Calcule la probabilidad de que:

- a) Si se eligen al azar 8 personas que padecen la enfermedad, al menos 6 mejoren.
- b) Si se eligen al azar 250 personas que padecen la enfermedad, mejoren más de 170 y como mucho 190.

Ejercicio 16

Mario es un alumno de la UAL, que durante los veranos trabaja en el restaurante “El Puerto” de un pueblo de Cabo de Gata, para poder así pagar sus estudios en Almería.

Durante el resto del año, que son 300 días, a veces lo llaman de manera ocasional para trabajar días sueltos, saliendo una media al año de 60 días aparte de los meses de verano. teniendo estos datos calcule:

- a) ¿Durante una semana normal de estudios, cuál es la probabilidad de que lo llamen 2 días? ¿y 3 días de esa semana?
- b) ¿Cuál es la probabilidad que lo llamen entre 40 y 70 días de manera ocasional durante este año?