

## Índice de la teoría

### 1. Presentación.

Estas lecciones sólo pretenden ser una introducción que sirva para orientar sobre los conceptos, para un estudio más amplio se recomienda leer alguna publicación especializada, como por ejemplo:

- Ramón Argüelles Alvarez. “Fundamentos de Elasticidad y su Programación por Elementos Finitos”. Bellisco, Madrid. 1992.
- O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. “El Método de los Elementos Finitos”. Vols 1 y 2. CIMNE-Mc Graw Hill, 1994.
- E. Oñate. “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”. CIMNE, Barcelona. 1995

El curso próximo pueden ampliar estos temas si eligen la MATERIA OPTATIVA (INTENSIFICACIÓN DE MECÁNICA) ANÁLISIS AVANZADO Y EXPERIMENTAL DE ESTRUCTURAS.

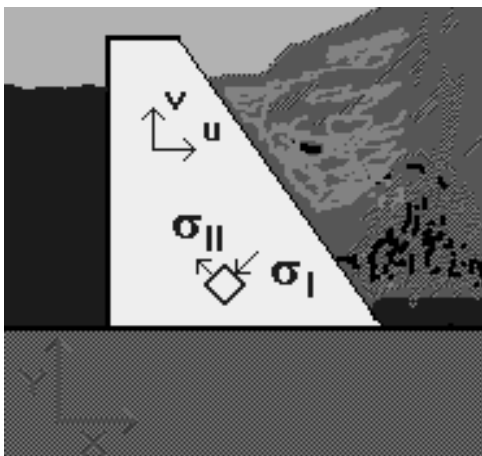
### 2. Planteamiento general del problema: Planteamiento continuo/discreto del problema.

*Se pretende definir los distintos enfoques de un problema estructural.*

Con excepción de las estructuras de barras que tienen naturaleza discreta y pueden tratarse de forma natural con métodos matriciales, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua. Aunque su respuesta es inherentemente tridimensional, el calculista puede, en algunos casos y manteniendo el rigor, simplificar su análisis considerando un comportamiento estructural de elasticidad bidimensional (tensión o deformación plana).

- La tensión plana se caracteriza porque  $\sigma_z = 0$ .
- La deformación plana se caracteriza porque  $\epsilon_z = 0$ .

Dado un problema estructural que cumpla dichas características el ingeniero se plantea conocer en cualquier punto del dominio



Campo de desplazamientos

$$u(x, y)$$

Campo de deformaciones

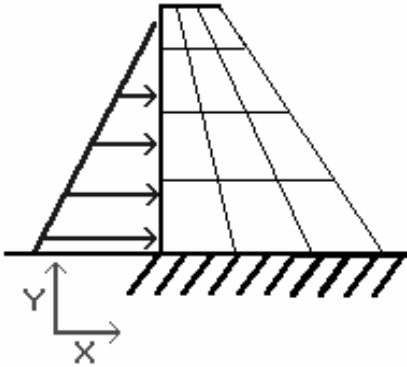
$$\epsilon(x, y)$$

Campo de tensiones

$$\sigma(x, y)$$

Un análisis riguroso precisa de la integración de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico de la estructura. El planteamiento matemático-analítico de dichas ecuaciones da lugar a la **formulación continua** del problema.

El objetivo del MEF también es conocer los campos anteriores en cualquier punto del dominio a partir de los valores hallados en ciertos puntos. Para ello es necesario dividir el dominio en subdominios (elementos finitos) formando una malla. El planteamiento de las ecuaciones que se obtienen y su resolución dan lugar a la **formulación discreta** del problema.



Campo de desplazamientos conocidos en los nodos.  
Campo de tensiones y deformaciones conocidas en los nodos o en los puntos de integración.

3. El problema continuo. Ecuaciones básicas del problema continuo:

*Se pretende definir el conjunto de ecuaciones que rigen matemáticamente el problema estructural.*

El problema matemático del análisis de una estructura se formula en un **dominio** (geometría y materiales) con unas **condiciones de contorno** en fuerzas (acciones externas) y en desplazamientos (restricciones de los movimientos).



El problema matemático viene definido por:

- Relaciones cinemáticas (pequeños desplazamientos y deformaciones).
- Relaciones constitutivas.
- Expresión global de equilibrio (PTV).

3.1. Relaciones cinemáticas: pequeños desplazamientos y deformaciones.

*Se pretende definir la relación entre deformación y desplazamiento.*

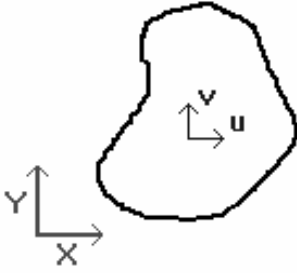
Se define como estado de tensión o deformación plana en **elasticidad**, aquel cuyas secciones perpendiculares al eje prismático de la estructura se deforman en su plano y de manera idéntica.

Por consiguiente basta conocer la respuesta de una sección transversal de la estructura y trabajar, por tanto, en **dos dimensiones** para caracterizar el comportamiento estructural.

El **campo de desplazamientos** es de naturaleza vectorial y queda perfectamente establecido si en cada punto se conocen los desplazamientos según las direcciones de los ejes coordenados. El vector desplazamiento en un punto cualquiera se define como:

**Campo vectorial  
Desplazamientos**

$$d(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$



El campo de deformaciones se deduce a partir de las primeras derivadas del campo de desplazamientos al aceptar la teoría de pequeñas deformaciones. A partir de la teoría general de la elasticidad se obtiene:

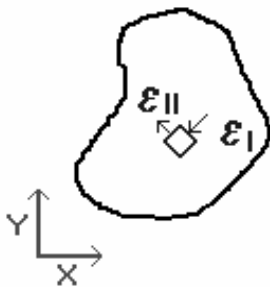
**Campo tensorial  
Deformaciones**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

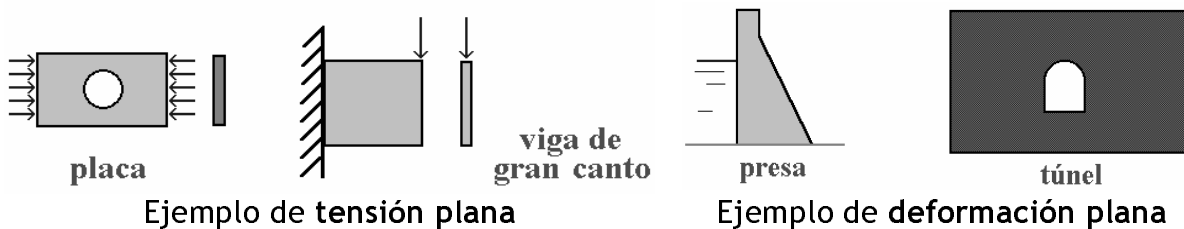
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$



La deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  es nula en el caso de deformación plana pero no necesariamente en el caso de tensión plana. Y prescindimos de ella en la formulación porque en dicho caso la tensión longitudinal  $\sigma_z$  es nula. Por consiguiente, los términos en la tercera dimensión no intervienen de ninguna manera en la resolución del problema. Sin embargo, si se desea se pueden calcular a posteriori.



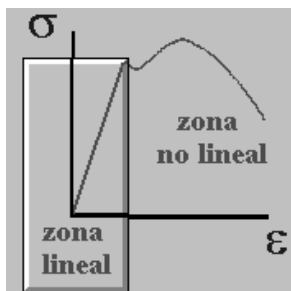
Ejemplo de tensión plana

Ejemplo de deformación plana

### 3.2. Relación constitutiva.

Se pretende definir la ley de comportamiento del material del problema.

La **relación** entre las tensiones y las deformaciones se deduce de la elasticidad tridimensional con las hipótesis simplificativas para tensión y deformación plana. Las hipótesis de elasticidad lineal definen un comportamiento **proporcional** entre tensiones y deformaciones según la relación siguiente.



$$\sigma = D \varepsilon$$

Definimos  $D$  como la matriz de constantes elásticas, su expresión depende de la hipótesis de trabajo:

- Tensión plana.

La matriz constitutiva en el caso de elasticidad bidimensional con hipótesis de tensión plana es:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

- Deformación plana.

La matriz constitutiva en el caso de elasticidad bidimensional con hipótesis de deformación plana es:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu}{1 - \nu} d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### 3.3. Ecuación integral de equilibrio

*Se define el Principio de los Trabajos Virtuales.*

De las relaciones entre desplazamientos, tensiones y deformaciones, el problema matemático se formula como un equilibrio entre el trabajo efectuado por las fuerzas internas que se generan por la deformación elástica del cuerpo y las fuerzas externas que lo solicitan.

La expresión de equilibrio global más universal en problemas de mecánica estructural es el **Principio de los Trabajos Virtuales** que da lugar a la forma integral siguiente.

$$\iint_A \delta \epsilon \sigma dA = \iint_A \delta u b dA + \int \delta u t ds + \sum_i \delta u_i q_i$$

La resolución analítica de esta ecuación es imposible en la mayor parte de los casos, por ello es necesario efectuar una **aproximación discreta** del problema. Los elementos finitos permiten reducir esta expresión a una más manejable e igualmente veraz.

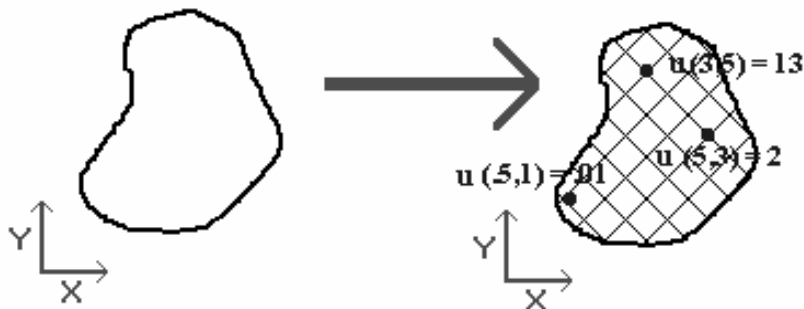
#### 4. La filosofía del problema discreto.

*Se define el objetivo final del problema discreto. ¿A donde queremos llegar?.*

El planteamiento del problema continuo conduce a unas ecuaciones que no tienen solución analítica en la mayor parte de los casos. En general es imposible encontrar para los campos incógnita una expresión del tipo:

$$u = f_1(x, y) \quad \epsilon = f_2(x, y) \quad \sigma = f_3(x, y)$$

$$u = f_1(x, y)$$



Así, se considera la posibilidad de resolver el problema, de forma correcta, únicamente en ciertos puntos y obtener una solución discreta del problema.

Es decir, se calcula la solución en **desplazamientos, deformaciones y tensiones en ciertos puntos** y se extrapolan estos valores a cualquier otro punto. De esta manera es posible conocer el valor aproximado de los campos incógnita. En particular, el campo de desplazamientos es el que interesa más porque todos los demás derivan de él.

El **planteamiento discreto** comporta:

- a) Dividir el dominio en una **mall**a de elementos finitos. Dividimos el dominio en elementos hasta cubrir la totalidad de su superficie
- b) Aplicar el **PTV** (Principio de los Trabajos Virtuales) sobre la estructura y aprovechar las propiedades matemáticas que conllevan los elementos finitos para

obtener finalmente un sistema de ecuaciones, formalmente análogo al visto en el cálculo matricial de sistemas discretos.

c) Resolver el sistema y obtener el resultado de los campos incógnita.

$$\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \cdot \\ \mathbf{a} \\ = \\ \mathbf{f} \end{array}$$

... con  
condiciones de contorno

#### 4.1. La ecuación de equilibrio discretizada.

De los términos del PTV se desea calcular el correspondiente a la matriz de rigidez que contiene la respuesta interna del sistema ante la sollicitación externa de las acciones.

$$\iint_A \delta \epsilon \sigma dA$$

Este término vendrá definido por la contribución de todos y cada uno de los elementos finitos que forman la malla. Por tanto cada elemento se verá obligado a cumplir las ecuaciones de equilibrio del problema. Para ello se debe dotar a cada elemento finito de la malla del bagaje matemático que incorpora el MEF.

Se plantea en cada elemento:

- Discretización del campo de desplazamientos
- Discretización del campo de deformaciones
- Discretización del campo de tensiones

Con los campos discretizados arriba descritos ahora es posible hallar el término de la ecuación de equilibrio que da lugar a la matriz de rigidez del sistema.

#### 4.2. Aproximación del campo de desplazamientos.

*Se introducen conceptos básicos sobre funciones de forma y desplazamientos nodales. Concepto básico del MEF.*

Los elementos finitos permiten calcular el **desplazamiento** en cualquier punto interior del mismo interpolando su valor a partir de los hallados en los **nodos**. Para ello definimos la matriz de **funciones de interpolación N** (también llamadas funciones de

forma) y expresamos los desplazamientos cartesianos  $u$  de un punto cualquiera del interior del elemento en función de los desplazamientos de sus nodos  $\mathbf{a}^{(e)}$

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{a}^{(e)}$$

En elasticidad bidimensional el **vector desplazamiento** de un punto cualquiera está definido por dos componentes cartesianas:

$$\mathbf{u} = [u, v]^T$$

Asimismo el vector de desplazamientos en todos los nodos de la malla está compuesto por dos componentes en cada uno de esos nodos, genéricamente en el nodo  $i$  del elemento ( $e$ ):

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = [u_i, v_i]^T$$

De esta manera la matriz de funciones de forma toma el siguiente aspecto

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad \dots \quad N_i \quad \dots \quad N_n] \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) \end{bmatrix}$$

Con las propiedades siguientes de las funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_i(x_j, y_j) &= 1 && \text{si } i=j \\ N_i(x_j, y_j) &= 0 && \text{si } i \neq j \text{ y } \\ \sum N_i(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

Adviértase que  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{a}^{(e)}$  están compuestas por tantas submatrices y subvectores como nodos tiene el elemento. Esta es una propiedad general que se cumple en todos los casos.

Un concepto previo importante es el de formulación de **elementos isoparamétricos**. Sin ellos el MEF no hubiera llegado al nivel actual de potencia.

El término isoparamétrico surge al utilizar las mismas funciones de forma para interpolar la geometría y el campo de desplazamientos. Por consiguiente se expresa la geometría de un elemento finito isoparamétrico bidimensional a partir de las coordenadas reales cartesianas  $x_i$  e  $y_i$  de sus nodos como:

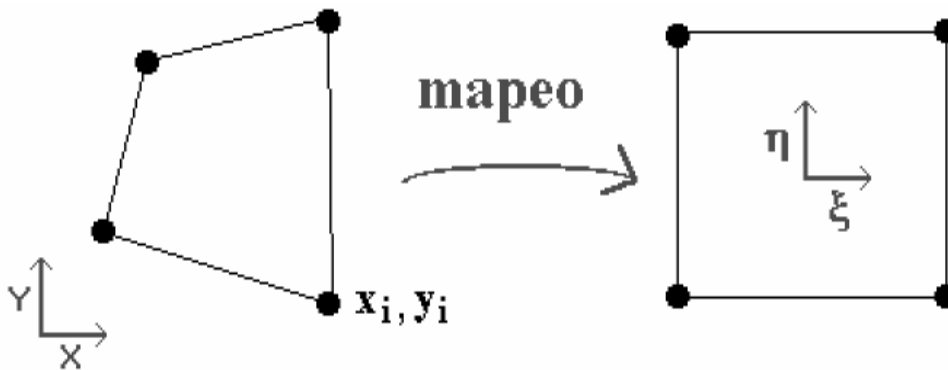
$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i$$

$$N_i(\xi, \eta) \quad \text{es la función de forma de cada nodo del elemento.}$$

Estas ecuaciones relacionan las coordenadas cartesianas de un punto y las naturales  $\xi, \eta$ .

Es decir, se realiza un mapeo entre el espacio real y un espacio ideal unitario donde todo está normalizado.

Dicha relación debe ser biunívoca, para lo cual debe cumplirse que el determinante del **Jacobiano** de la transformación de coordenadas sea de signo constante en todo el elemento.



Todo elemento isoparamétrico requiere una transformación entre las coordenadas cartesianas y las naturales.

La matriz Jacobiano :  $J^{(e)}$

denominada simplemente Jacobiano relaciona las derivadas cartesianas y naturales de una función. Aplicada a las funciones de forma se tiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Invirtiendo esta expresión se obtienen los valores de las derivadas parciales cartesianas en función de las derivadas naturales.

Para calcular los términos del Jacobiano se utiliza la transformación isoparamétrica. Así,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i \quad ; \quad \text{etc.}$$

por lo que

$$J^{(e)} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot y_i \end{bmatrix}$$



El determinante del Jacobiano permite expresar el **diferencial de área** en coordenadas naturales como

$$dx \cdot dy = |J^{(e)}| d\xi \cdot d\eta$$

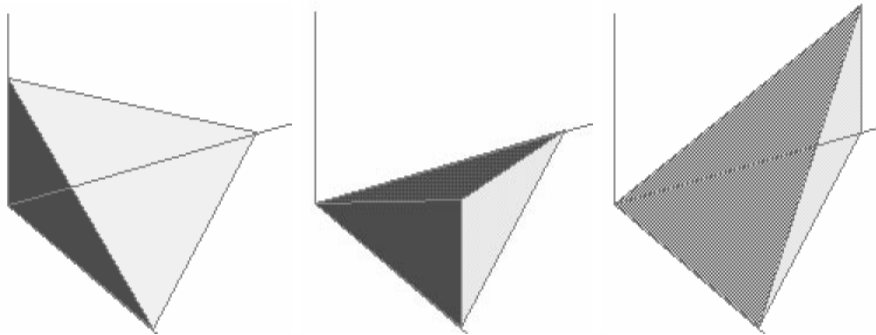
donde el determinante del Jacobiano es:

$$|J^{(e)}|$$

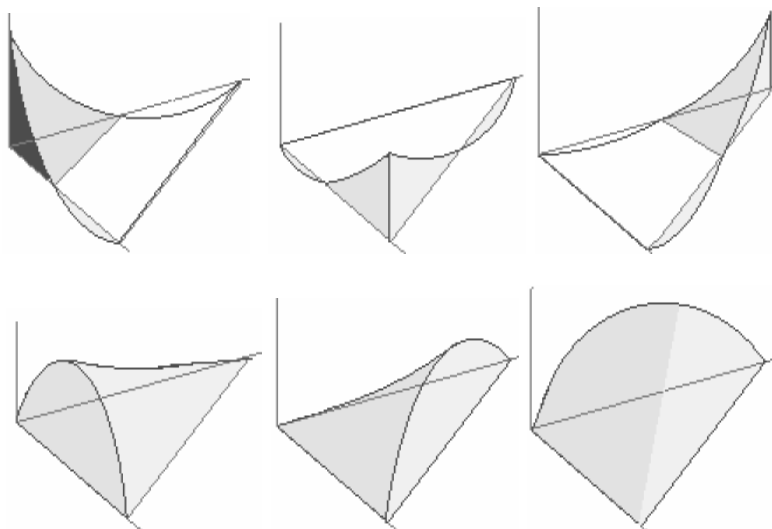
Es posible particularizar la expresión de las funciones de forma para cada elemento:

#### 4.2.1. Elementos triangulares

El elemento **triangular lineal** está formado por tres planos que pasan por dos nodos nulos y un tercero de valor unitario.



El elemento **triangular cuadrático** está formado por seis nodos, veamos sus funciones de forma:



#### 4.2.2. Elementos lagrangianos cuadriláteros

Las funciones de forma de estos elementos se basan en **interpolaciones polinómicas de Lagrange** en dos dimensiones. Esto permite obtener con facilidad la función de forma de un nodo cualquiera como producto de dos polinomios de Lagrange unidimensionales en cada una de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  correspondientes a dicho nodo. Así, si  $l_I^i(\xi)$  es el

polinomio de Lagrange de grado  $I$  en dirección  $\xi$  del nodo  $i$  y  $l_J^i(\eta)$  el de grado  $J$  en dirección  $\eta$ , la función de forma de dicho nodo es

$$N_i(\xi, \eta) = l_I^i(\xi) \cdot l_J^i(\eta)$$

Obsérvese que una vez definido el número de nodos en cada una de las direcciones coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ , dicho número no puede variar a lo largo de las diferentes líneas nodales.

El número de términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de un elemento Lagrangiano puede obtenerse automáticamente del triángulo de Pascal a partir del grado de los polinomios en las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ .

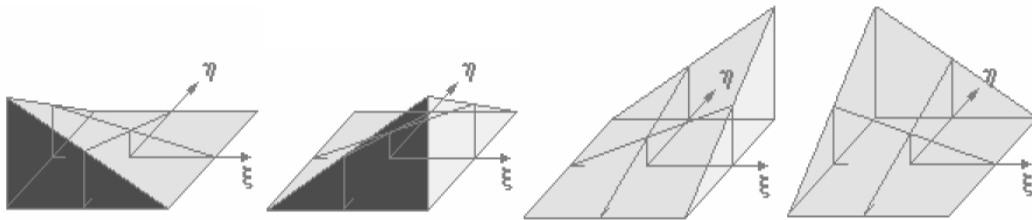
- **Elemento rectangular Lagrangiano de 4 nodos**

Este elemento es el más sencillo de la familia Lagrangiana.

Sus funciones de forma en el nodo  $i$  se pueden expresar en coordenadas naturales como:

$$N_i(\xi, \eta) = l_1^i(\xi) \cdot l_1^i(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

Veamos sus funciones de forma:

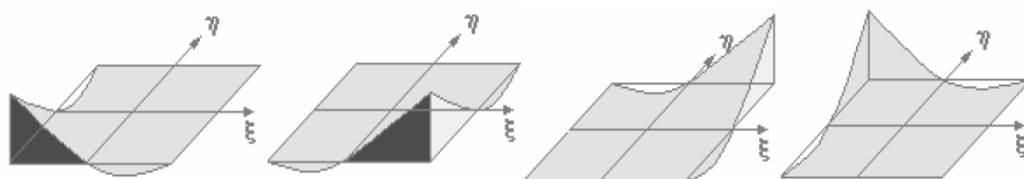


- **Elemento rectangular Lagrangiano cuadrático de 9 nodos**

Las funciones de forma del elemento rectangular Lagrangiano de nueve nodos se obtienen como producto de dos polinomios de Lagrange de segundo grado en  $\xi$  y  $\eta$ . Pueden encontrarse las siguientes expresiones :

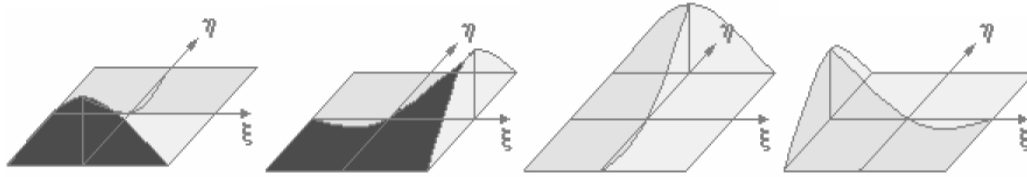
- **Nodos esquina.**

$$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i) \quad ; \quad i = 1,3,5,7$$



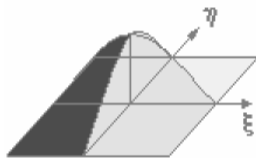
- **Nodos intermedios en los lados.**

$$N_i = \frac{1}{2} \eta_i^2 (\eta^2 - \eta \eta_i) (1 - \xi^2) + \frac{1}{2} \xi_i^2 (\xi^2 - \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad ; \quad i = 2, 4, 6, 8$$



- **Nodo central.**

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$



### 4.2.3. Elementos serendípitos cuadriláteros.

Los elementos Serendípitos se obtienen de la manera siguiente:

En primer lugar se selecciona el número de nodos de cada lado para definir una variación lineal, cuadrática, cúbica, etc., sobre dichos lados que garantice la continuidad interelemental. Tras ello, se escoge el mínimo número de nodos en su interior de manera que se obtenga la variación polinómica en  $\xi$  y  $\eta$  completa y simétrica, del mismo grado que la variación sobre los lados. Se observa que el elemento más sencillo de esta familia es el rectangular de cuatro nodos que pertenece a ambas familias Lagrangianas y Serendípitos.

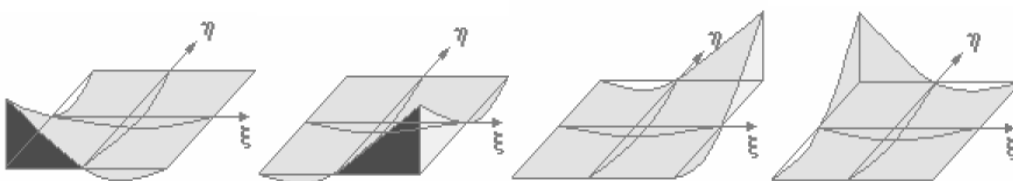
- **Elementos serendípitos cuadriláteros de 8 nodos.**

- **Nodos intermedios**

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad ; \quad i = 4, 8$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) \quad ; \quad i = 2, 6$$

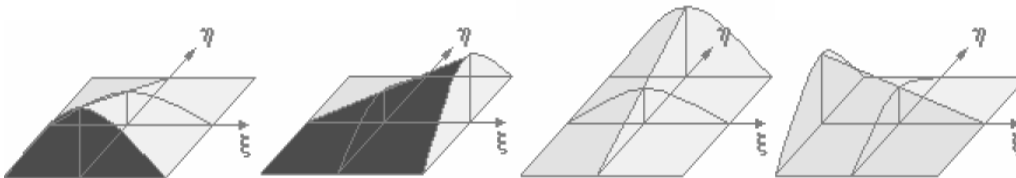
Las funciones de forma de los nodos intermedios en los lados se obtienen de forma inmediata como producto de un polinomio de segundo grado en  $\xi$  (o  $\eta$ ) por otro de primer grado en  $\eta$  (o  $\xi$ ). Puede comprobarse que dicho producto contiene términos polinómicos deseados.



- **Nodos esquina.**

Para los nodos esquina no podemos adoptar la misma estrategia, pues el producto de los dos polinomios unidimensionales cuadráticos que corresponden a los lados que concurren en un vértice daría un valor nulo en el centro del elemento, con lo que en dicho punto la suma de las funciones de forma no sería uno. Por consiguiente, hay que adoptar un procedimiento distinto basado en combinar las funciones de forma del elemento de cuatro nodos con las funciones de forma de los nodos adyacentes al nodo esquina. La expresión resultante nos conduce a:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad ; \quad i = 1,3,5,7$$



### 4.3. Aproximación del campo de deformaciones.

*Se pretende introducir la expresión matricial discretizada de las deformaciones. Concepto básico del MEF.*

La expresión discretizada del vector de deformaciones se obtiene como aplicación directa de la definición de deformaciones en elasticidad bidimensional. En notación compacta diremos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{L}\mathbf{u} \\ \varepsilon &= \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \\ \varepsilon &= \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_i & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_i & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$  es la matriz gradiente de deformación del elemento y  $\mathbf{B}_i$  es la submatriz asociada al nodo  $i$ .

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_i \quad \dots \quad \mathbf{B}_n]$$

En general las funciones de forma vendrán expresadas en **coordenadas naturales** y no cartesianas utilizando elementos isoparamétricos. Aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

De donde se deduce:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

donde aparece la matriz inversa del Jacobiano que contiene información sobre la transformación de coordenadas entre naturales y cartesianas.

Por lo tanto ya pueden conocerse todos los coeficientes de las matrices  $B_i$ .

#### 4.4. Aproximación del campo de tensiones.

*Se pretende introducir la expresión matricial discretizada de las tensiones. Concepto básico del MEF.*

A partir de la **relación constitutiva** entre tensión y deformación es fácil deducir la expresión discretizada del **campo de tensiones**.

De  $\sigma = D \varepsilon$  se deduce  $\sigma = D B a$

Donde **D** es la **matriz de constantes elásticas**, su expresión depende de la hipótesis escogida:

- **Tensión plana.**

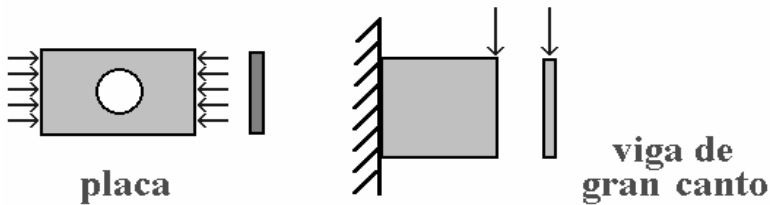
La matriz constitutiva en el caso de elasticidad bidimensional con hipótesis de tensión plana es:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Donde E es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

Ejemplo de **tensión plana**



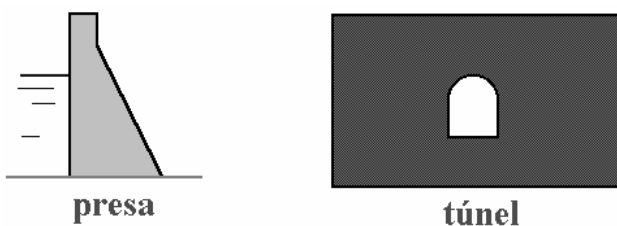
- Deformación plana.

La matriz constitutiva en el caso de elasticidad bidimensional con hipótesis de deformación plana es:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu}{1-\nu} d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ejemplo de deformación plana



#### 4.5. Cálculo de la matriz de rigidez.

Se define la matriz de rigidez de cada elemento.

De los términos del PTV se desea calcular el correspondiente a la **matriz de rigidez global** de la estructura.

$$\iint_A \delta \varepsilon \sigma \, dA = \sum_{\varepsilon} \iint_{A^{(\varepsilon)}} \delta \varepsilon^{(\varepsilon)} \sigma^{(\varepsilon)} \, dA$$

En el caso de los elementos finitos se debe realizar dicha integral sobre cada **elemento** de la malla y sustituir la expresión **global** por su correspondiente elemental discretizada.

Para un elemento genérico dado se obtiene:

$$K^{(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{siendo} \quad k_{ij}^{(\varepsilon)} = \iint_{A^{(\varepsilon)}} B_i^t D B_j \, t \, dA$$

En estos momentos ya se conoce la expresión de cada término, dicha integral se suele realizar con técnicas numéricas de integración o bien explícitamente cuando sea factible.

Recordatorio:

Integración numérica en dos dimensiones:

La formulación isoparamétrica puede transformar todas las integrales sobre el dominio del elemento a otras sobre el espacio de coordenadas naturales. Para el cálculo de dichas integrales, mucho más simple, puede hacerse uso de cualquiera de las cuadraturas de integración numérica existentes.

- Integración numérica sobre dominios triangulares

La **cuadratura de Gauss** para elementos triangulares se escribe como

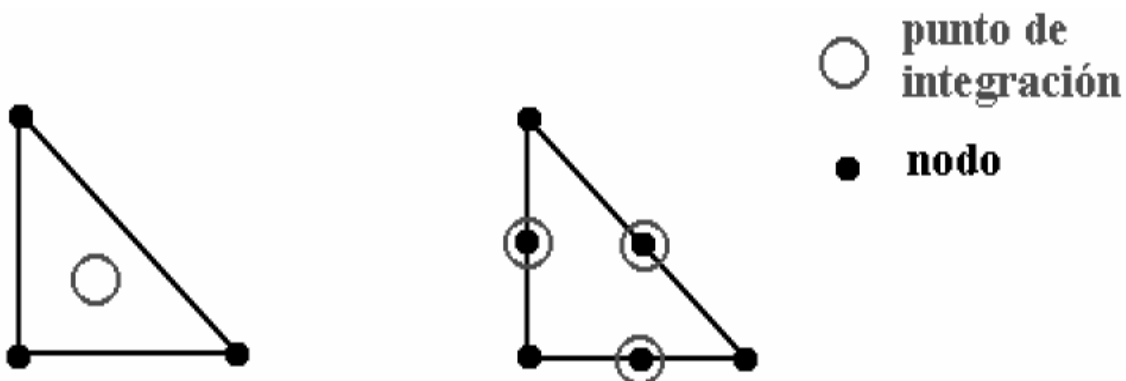
$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) d\Omega = \sum_{p=1}^{n_p} f(\alpha_p, \beta_p) \cdot W_p$$

donde se calcula  $f$  en las coordenadas de los  $n$ -puntos de integración siendo  $W$  el peso de cada punto de integración. Notar que el dominio de integración es el correspondiente a las coordenadas naturales, pero mediante la transformación del Jacobiano es posible integrar en el dominio cartesiano sin dificultad.

En el caso de la matriz de rigidez se tiene:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy = \int_0^{1-\beta} \int_0^{1-\beta} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j |J^{(e)}| t d\alpha d\beta = \int_0^{1-\beta} \int_0^{1-\beta} G_{ij}(\alpha, \beta) \frac{t}{|J^{(e)}|} d\alpha d\beta$$

Se muestran algunas cuadraturas bidimensionales más usuales sobre elementos triangulares.



- Integración numérica sobre dominios rectangulares

La integral de una función cualquiera sobre el dominio de coordenadas naturales de un elemento cuadrilátero puede evaluarse por una **cuadratura de Gauss-Legendre** bidimensional como

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta = \int_{-1}^{+1} d\xi \cdot \left[ \sum_{q=1}^{n_q} g(\xi, \eta_q) \cdot W_q \right] = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} g(\xi_p, \eta_q) \cdot W_p \cdot W_q$$

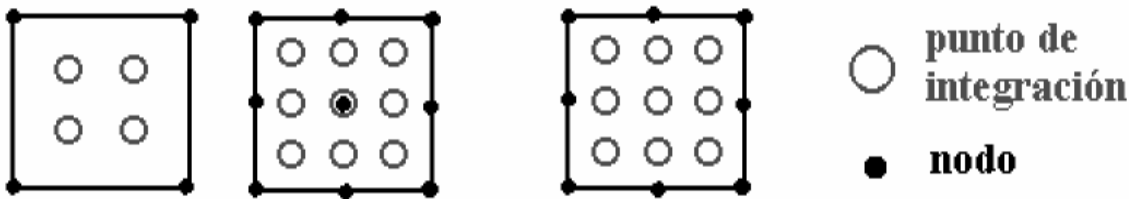
donde p y q son el número de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones de los ejes naturales, g se calcula en cada punto de integración y  $W_p, W_q$  son los pesos correspondientes a dicho punto.

Una cuadratura de orden p en cada dirección natural integra exactamente un polinomio de grado  $2p-1$  en la correspondiente coordenada natural.

En el caso de la matriz de rigidez se tiene :

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) \left| J^{(e)} \right| t d\xi \cdot d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G_{ij}(\xi, \eta) \frac{t}{|J^{(e)}|} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Se muestran algunas cuadraturas bidimensionales más usuales sobre elementos cuadriláteros.



- Cálculo explícito de la matriz de rigidez.

Para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos y para el triángulo de tres nodos las integrales se pueden calcular explícitamente y no es necesario acudir a las técnicas de integración numérica. Las fórmulas se encuentran en numerosas publicaciones.

No se debe olvidar que el término del PTV viene referido a la totalidad de los elementos finitos que componen la malla, por lo tanto será absolutamente necesario considerar la contribución que cada uno de ellos realiza a la evaluación del término global. ¿Y cómo lo conseguiremos?: La técnica numérica que permite pasar de los términos elementales a la rigidez global de toda la estructura se denomina **ensamblaje**.



#### 4.6. La técnica del ensamblaje de la matriz de rigidez.

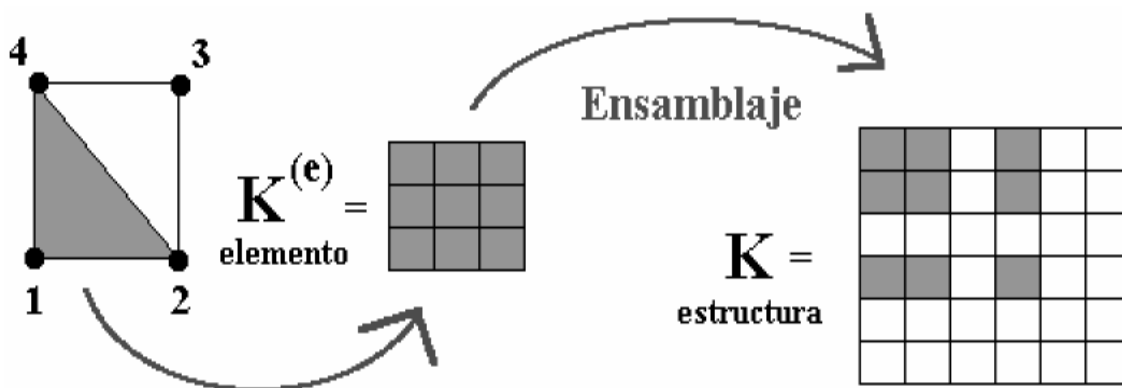
*Se describe el proceso de ensamblaje. Concepto metodológico estándar.*

En la **matriz de rigidez de la estructura** se forma a partir de las contribuciones de las matrices de los diferentes elementos individuales. Esta operación se denomina **ensamblaje**.

Sea la matriz genérica de un elemento cualquiera de la malla

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

En el proceso de **ensamblaje** debemos colocar el coeficiente  $k_{ij}$  de la matriz elemental en la posición  $ij$  de la matriz de rigidez  $K$  global de la estructura. Estos conceptos quedan clarificados en el dibujo inferior.



La matriz de rigidez del elemento es una matriz cuadrada de dimensiones  $n \times n$  siendo  $n$  el producto de los grados de libertad ( $g$ ) del elemento por el número de nodos ( $m$ ). Por ejemplo en tensión plana el número de grados de libertad es 2 y en un triángulo de tres nodos se tiene una matriz de  $6 \times 6$ . Para calcular la matriz se divide el cálculo en  $m \times m$  (número de nodos) submatrices.

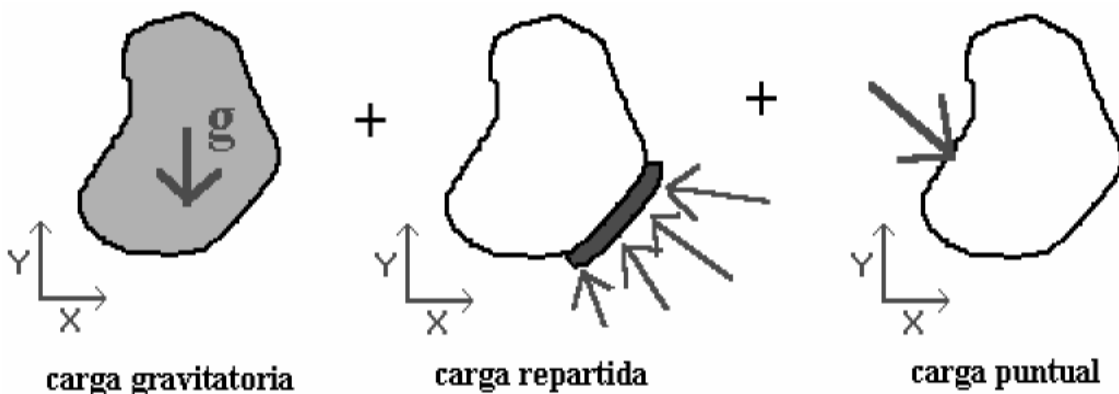
## 5. Discretización de las fuerzas externas.

Se introducen conceptos básicos sobre cómo se forma el vector de fuerzas. Concepto básico del MEF.

De los términos del PTV se desea calcular el correspondiente al **vector de fuerzas**.

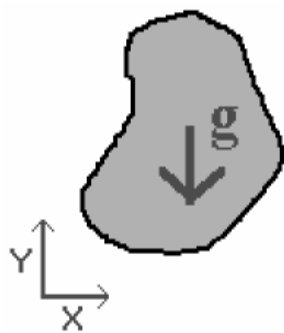
$$\iint_A \delta u b dA + \int \delta u t ds + \sum_i \delta u_i q_i$$

Este término está definido por la contribución de todos y cada una de las distintas acciones externas que actúan sobre la estructura.



Siendo de tres tipos diferentes:

- **Fuerzas de volumen. Discretización de las fuerzas de volumen.**



De los términos de la ecuación de equilibrio del PTV se desea calcular el correspondiente a la integral **fuerzas de volumen**.

$$\iint_A \delta u b dA$$

Este término está definido por la contribución de todos los elementos que sufren esta acción externa.

Si se sustituyen en dicha integral los términos continuos por los términos discretizados según las expresiones deducidas de la teoría de elementos finitos se obtiene en cada elemento un

**vector de fuerzas de volumen:**

$$f_{\xi}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N^t b dA$$

El sentido físico de la integral, que se puede calcular mediante técnicas numéricas, consiste en distribuir la acción gravitatoria de volumen como acciones puntuales sobre los nodos.

La integral se debe calcular en todos los elementos y posteriormente **ensamblar** los vectores de fuerzas elementales obtenidos en el vector global de acciones sobre la estructura.

- **Fuerzas de superficie. Discretización de las fuerzas de superficie.**



De los términos de la ecuación de equilibrio del PTV se desea calcular el correspondiente a la integral **fuerzas de superficie**.

$$\int \delta u^t ds$$

Este término está definido por la contribución de todos los elementos que sufren esta acción externa. Si se sustituyen en dicha integral los términos continuos por los términos discretizados según las expresiones deducidas de la teoría de elementos finitos se obtiene en cada elemento un

**vector de fuerzas de superficie:**

$$f_p^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} N^t t ds$$

El sentido físico de la integral, que se puede calcular mediante técnicas numéricas, consiste en repartir la acción de las fuerzas distribuidas sobre el lado del elemento como acciones puntuales sobre los nodos.

La integral anterior se debe calcular en todos los elementos y posteriormente **ensamblar** los vectores de fuerzas elementales obtenidos en el vector global de acciones sobre la estructura.

- **Fuerzas puntuales. Discretización de las fuerzas puntuales.**



En este caso se supone que las fuerzas ya están directamente aplicadas en los nodos de los elementos y por tanto sólo hay que proceder al **ensamblaje** en el vector de fuerzas globales.

$$f_i = \begin{Bmatrix} H_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

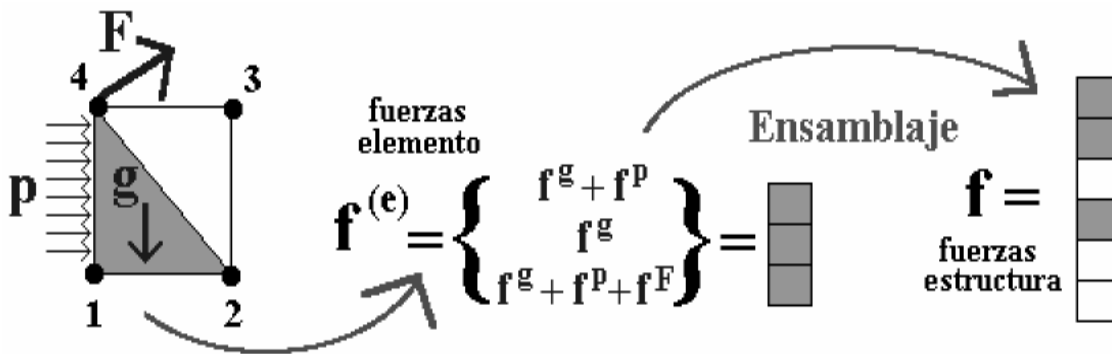
### 5.1. La técnica de ensamblaje de fuerzas.

En la formación del vector de fuerzas de la estructura se debe considerar la contribución que aporta cada elemento de la malla.

Sea el vector genérico de un elemento cualquiera de la malla

$$f^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

En el proceso de ensamblaje debemos colocar el coeficiente  $f_i$  en la posición  $i$  del vector de fuerzas  $f$  global de la estructura. Estos conceptos quedan clarificados en el dibujo inferior.



Obsérvese que las fuerzas puntuales aplicadas directamente a los nodos sólo se deben ensamblar una vez, es decir se las asigna a un sólo elemento y no a todos los que comparten el nodo cargado.

## 6. Condiciones de contorno. Aplicación de las condiciones de contorno:

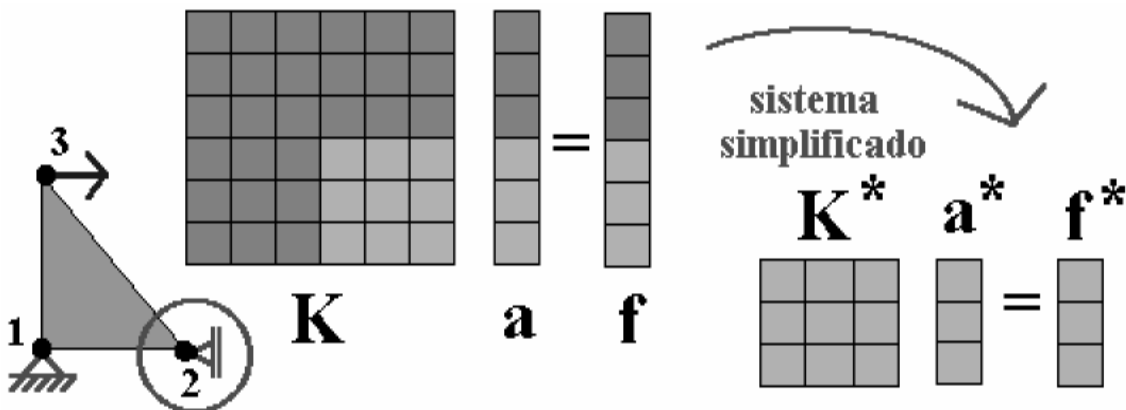
El problema estructural siempre tiene unas **restricciones en desplazamientos** que deben imponerse para poder resolver el sistema de ecuaciones global y evitar la singularidad (El método de rigidez que se deduce de imponer la ecuación de equilibrio estático del sistema no evita que el cuerpo pueda tener un movimiento de sólido rígido. ¡ Esto quiere decir que el cuerpo puede tener desplazamientos no nulos sin que aparezcan tensiones !. Para evitar esa paradoja las condiciones de contorno fijan el cuerpo en el espacio.) de la matriz de rigidez.

Las restricciones más comunes son las siguientes:

- **Restricción de desplazamiento en x.**

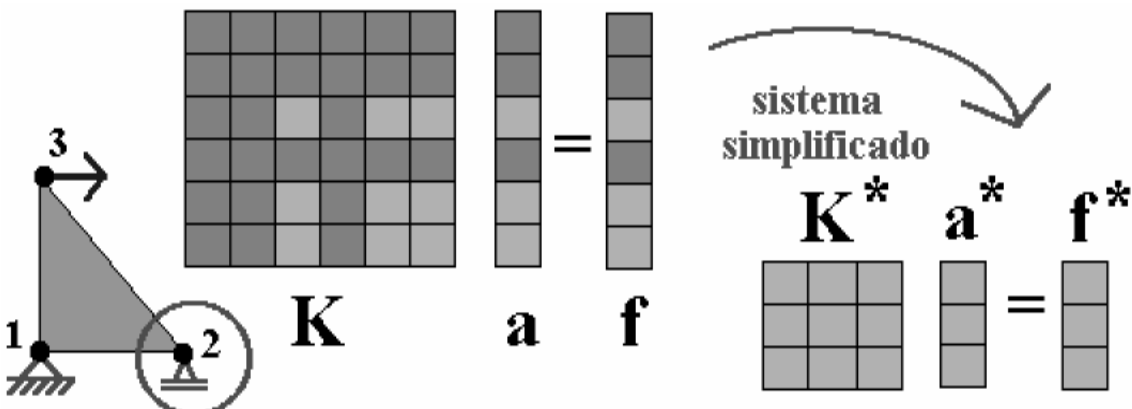
Para imponer la **condición de contorno** bastará con sustituir la ecuación de equilibrio asociada con el desplazamiento prescrito (incógnita a priori) por la ecuación del valor real de la prescripción. En este caso:  $u_i = 0$

A nivel práctico esto se traduce en **eliminar las filas y columnas** del sistema de ecuaciones que están relacionadas con el desplazamiento prescrito. Por lo tanto se reduce la **dimensión del sistema** a resolver y sólo se calculan las verdaderas incógnitas del problema. El dibujo inferior aclara la explicación.



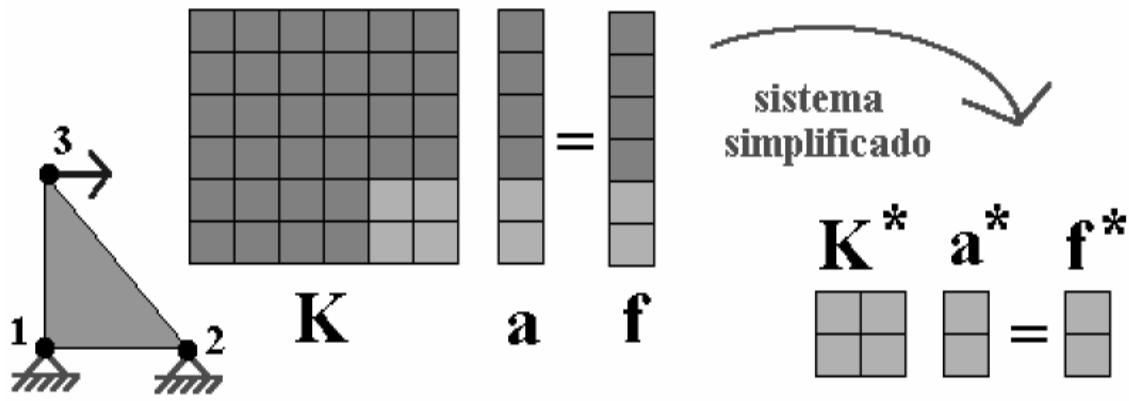
- **Restricción de desplazamiento en y.**

Se opera de igual forma que en el caso anterior. En este caso:  $v_i = 0$



- **Restricción de desplazamiento en x e y.**

Se opera de igual forma que en los casos anteriores. En este caso:  $u_i = 0$   $v_i = 0$



## 7. Cálculo de resultados.

En el problema de análisis estructural interesa conocer

- Desplazamientos.
- Deformaciones.
- Tensiones.

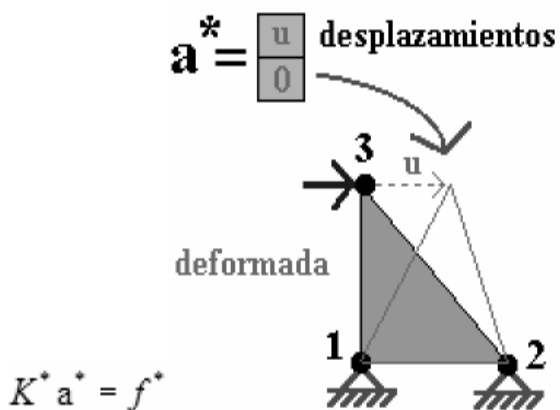
Para poder evaluar cualitativa y cuantitativamente el comportamiento de una estructura.

También es habitual calcular las reacciones.

Siempre debemos definir los estados límites de cálculo conforme a las normativas vigentes

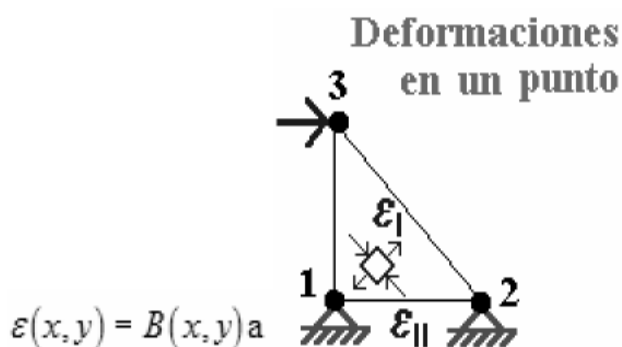
### 7.1. Cálculo de desplazamientos.

Para hallar los desplazamientos bastará con resolver el sistema simplificado de ecuaciones que proviene de imponer las coacciones exteriores. Las incógnitas del sistema corresponden a los desplazamientos nodales de la malla, por lo tanto la obtención de la deformada de la estructura es inmediata. Recuerden que algunos desplazamientos ya eran conocidos por la imposición de las condiciones de contorno, esos no forman parte del sistema de ecuaciones.



### 7.2. Cálculo de deformaciones.

Una vez se han calculado los desplazamientos, hallar las **deformaciones** es inmediato aplicando la fórmula que las relaciona a partir del campo discretizado.



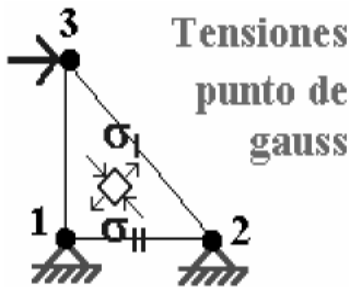
### 7.3. Cálculo de tensiones.

Las tensiones se pueden hallar de dos formas distintas:

- 1) La primera que suele conducir a una inexactitud mayor consiste en aplicar directamente la fórmula discreta. De esta manera se hallan los valores de las tensiones en los nodos.

$$\sigma(x,y) = DB(x,y)a$$

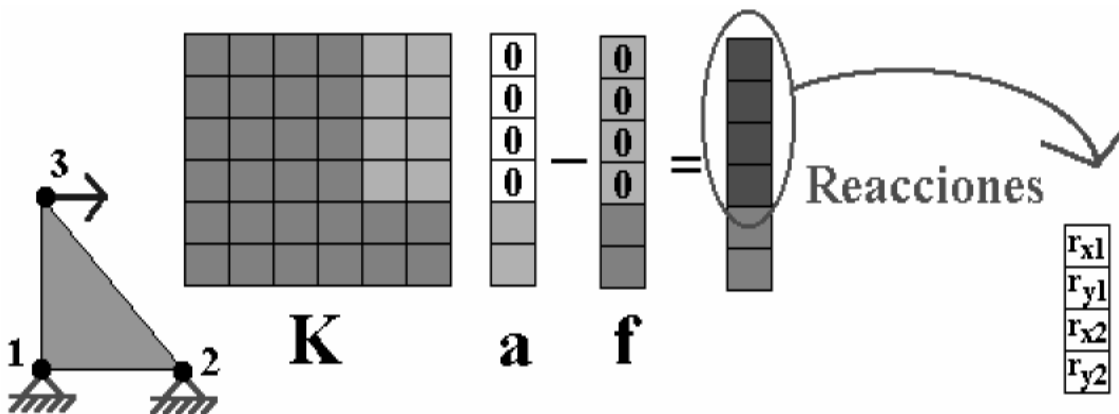
- 2) La segunda se basa en aprovechar que el cálculo de la tensión en el punto de integración es más exacto. Por lo tanto, es mejor calcular las tensiones en dichos puntos y extrapolar los valores obtenidos a los nodos o a cualquier otro punto. Esta segunda opción requiere un alisado de tensiones (Los métodos de alisado de tensiones desde el punto de vista educativo serán materia de futuros desarrollos).



#### 7.4. Cálculo de reacciones.

Basta con aplicar la fórmula:

$$R = Ka - f$$



Obsérvese que las reacciones se calculan en los grados de libertad que tenían restricciones en desplazamiento.