

ED-1 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES (22)

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t) \rightarrow \frac{dy}{f(y)} = g(t)dt$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)dt + C} \quad \text{Solución general}$$

Ejemplos

$$1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2} \rightarrow y^2 dy = t dt$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \rightarrow \boxed{y(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + 3C\right)^{1/3}}$$

Sol. GENERAL

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = t/y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(0) = \sqrt[3]{3C} \rightarrow 3C = y_0^3 \rightarrow C = \frac{y_0^3}{3}$$

Sol. particular del PVI

$$\boxed{y(t) = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + y_0^3}}$$

$$2) \quad \frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{1}{t+C}}$$

TIEMPO FINITO DE ESCAPE

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

ED-2

(107)

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = r(t)$$

Multiplicando por $\mu(t)$, y tomando $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + a(t)y \mu(t) = \mu(t)r(t)$$

$$\frac{d(\mu(t) \cdot y(t))}{dt} = \mu(t)r(t)$$

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)r(t)dt \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)r(t)dt$$

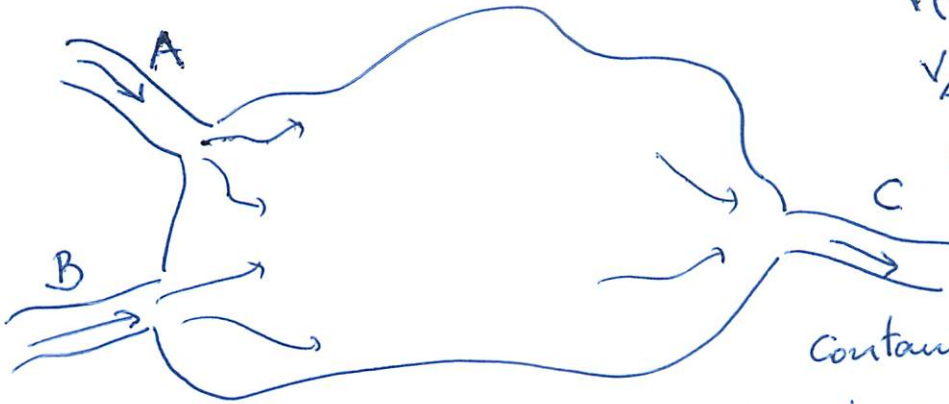
$$y(t) = e^{-\int a(t)dt} \int e^{\int a(t)dt} r(t)dt$$

Para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + a(t)y = r(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds} \left[y_0 + \int_0^t e^{\int_0^s a(u)du} r(s)ds \right]$$

Un estanque contaminado (112)



$$V(0) = 10.000 \text{ m}^3$$

$$V_A = 500 \text{ m}^3/\text{día}$$

$$V_B = 750 \text{ m}^3/\text{día}$$

Contaminación de la corriente A

$$\text{Concentr. de sal en A} = \frac{5 \text{ kg}}{1000 \text{ m}^3}$$

$$\text{Basura} = 50 \text{ m}^3/\text{día}$$

$$V_C = 1300 \text{ m}^3/\text{día}$$

$$V(t) = 10000 - 50t \text{ m}^3$$

$$S(t) = \text{cantidad de sal en kg.}$$

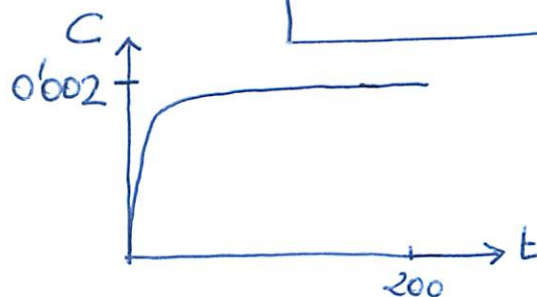
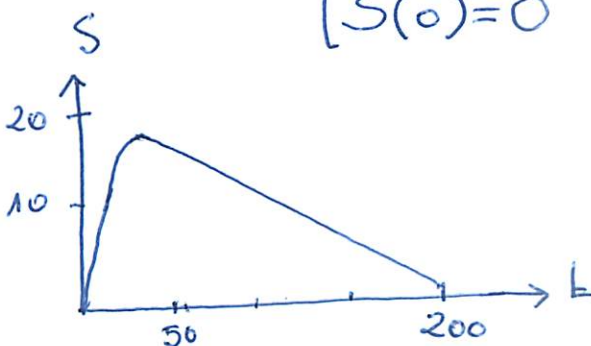
$$C(t) = \text{concentración de sal} = \frac{S(t)}{10000 - 50t} \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{dS}{dt} = \text{Sal por día que entra} - \text{Sal por día que sale}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{5}{1000} \cdot 500 - \frac{S}{10000 - 50t} \cdot 1300$$

$$\begin{cases} S' = \frac{5}{2} - \frac{26S}{200-t} \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow S(t) = \frac{200-t}{10} - 20 \left(\frac{200-t}{200} \right)^{26}$$



TAREAS

Completar el estudio leyendo y practicando con los ejemplos resueltos de los apartados

1.1 pág (2-19)

1.2 pág (19-35)

1.8 pág (107-117)

del libro de Ecuaciones diferenciales de
Blanchard - Devaney - Hall

Al final de cada apartado hay una serie de ejercicios para resolver; los impares están resueltos al final del libro (sólo sugerencias y soluciones), los restantes están resueltos en el libro complementario.

$$(1) \quad \dot{x} = f(x) \quad f: W_{ab} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución en I de (1)

$$a) \quad x \in C^1(I; \mathbb{R})$$

$$b) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \forall t \in I$$

Ejemplos.

$$1) \quad \dot{x} = -x = f(x) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t} x_0 \quad \text{con } x(0) = x_0$$

Solución definida en \mathbb{R} .

$$2) \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

$$I = (-\infty, \frac{1}{x_0}) \quad \text{si } x_0 > 0$$

$$I = (-\infty, \infty) \quad x_0 = 0$$

$$I = (\frac{1}{x_0}, +\infty) \quad \text{si } x_0 < 0$$

$$3) \quad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Soluciones múltiples}$$

$$\text{Si } x_0 = 0 \quad \begin{cases} \longrightarrow x(t) = \frac{t^2}{4} \\ \searrow x(t) = 0 \end{cases}$$

Teorema (de Existencia y Unicidad)

i) Si $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo (posiblemente infinito) $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ conteniendo $t_0 = 0$ y una solución $\varphi(t, x_0)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

definida para todo $t \in I_{x_0}$, satisfaciendo la condición inicial

$\varphi(0, x_0) = x_0$. Además, si α_{x_0} es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty.$$

g si β_{x_0} es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$$

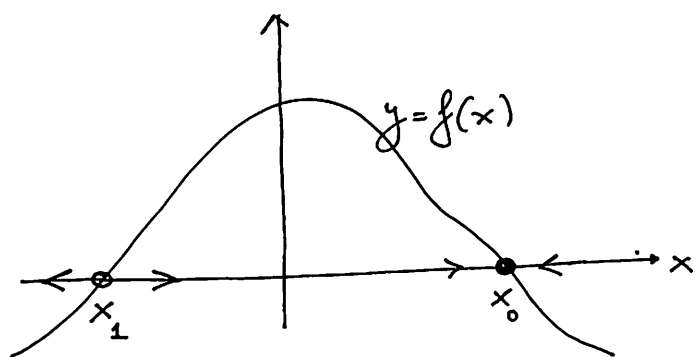
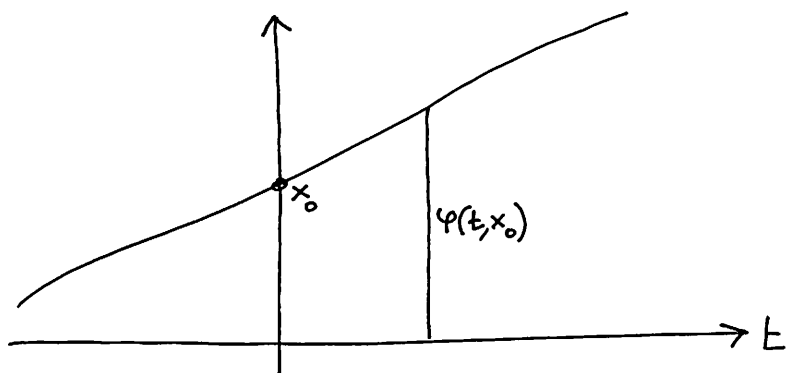
ii) Si, además, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces $\varphi(t, x_0)$ es única en I_{x_0} y φ es una función de C^1 en sus argumentos.

GEOMETRÍA DEL FLUJO

El conjunto $\{(t, \varphi(t, x_0)) : t \in I_{x_0}\}$ se llama trayectoria a través de x_0 .

El conjunto $\{\varphi(t, x_0) : t \in I_{x_0}\}$ se llama órbita, en el espacio de fase, que pasa por x_0 .

$$\dot{x} = f(x)$$



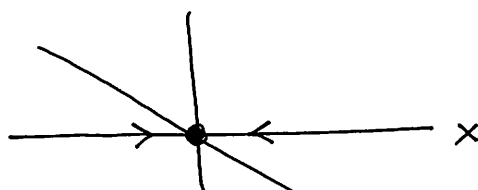
Definición: Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, si $f(\bar{x}) = 0$

Si $\bar{x} \in \mathbb{R}$ es punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, la solución del PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \text{ es } x(t) = \bar{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ejemplos.

$$\dot{x} = -x$$

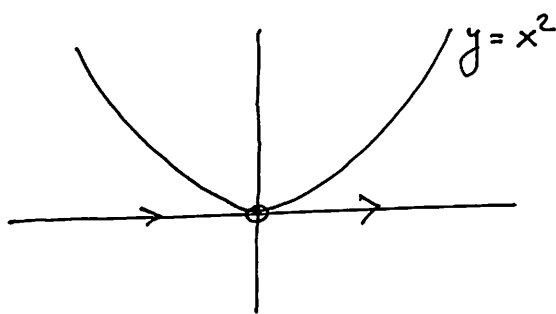


$\bar{x} = 0$ Eq. Estable

$$y = f(x) = -x$$

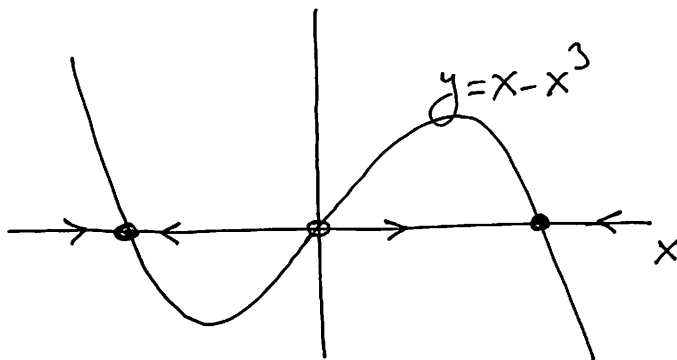
Definición: Un equilibrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ se dice estable si $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon \quad \forall t \geq 0, |x_0 - \bar{x}| < \delta$. Si además $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| = 0$, se dice que \bar{x} es un equilibrio asintóticamente estable.

$$\dot{x} = x^2$$



$\bar{x} = 0$ Eq. Semistable

$$\dot{x} = x - x^3$$



$\bar{x} = 1, -1$ Eq. Estables.

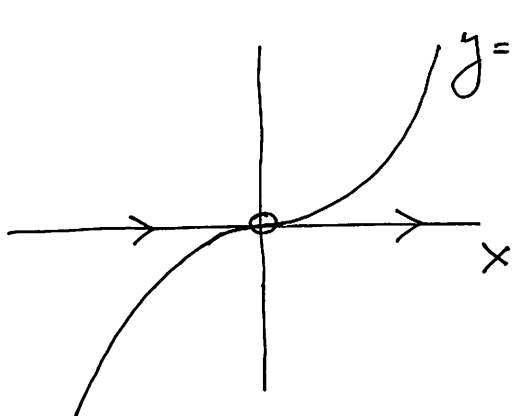
$\bar{x} = 0$ Eq. Inestable.

Teorema : Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

- 1) Si $f'(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ es eq. inestable
- 2) Si $f'(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ es eq. estable
- 3) Si $f'(\bar{x}) = 0$ no se tiene información.

Ejemplo

$$\dot{x} = x^3$$



$\bar{x} = 0$ Eq. Semistable

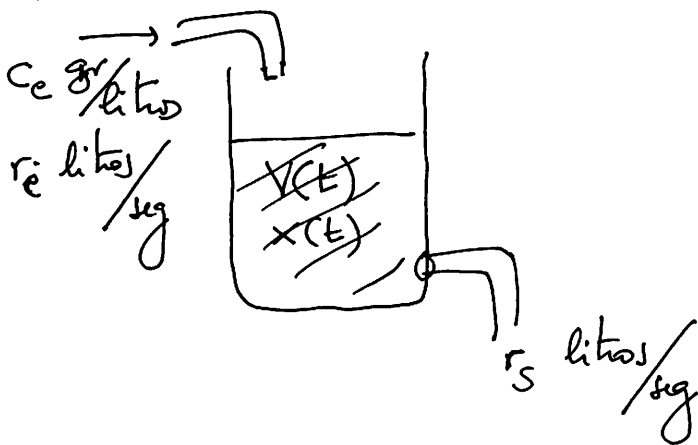
1.- Ley de enfriamiento de Newton

$T(t)$ = temperatura de un cuerpo en el instante t .

A = temperatura constante del medio ambiente

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T) \quad , \quad k > 0$$

2.- Problemas de mezclas.



$V(t)$ = Volumen en el instante t

$x(t)$ = gramos de la sustancia en t .

$$\frac{dx}{dt} = r_e c_e - r_s \frac{x(t)}{V(t)}$$

donde $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$.

Ejemplo: El lago Eire tiene un volumen de 458 km^3

y el flujo de entrada y salida se realizan ambos a razón de $175 \text{ km}^3/\text{año}$. Supongamos que su concentración actual de contaminante es de 0.05% y que la concentración de contaminante que ingresa en el agua es de 0.01% . ¿cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminante en el lago se reduzca al 0.02% ?

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = (0.0001)(175) - \frac{x}{458} (175) \\ x(0) = 0.0005 \cdot 458 = 0.229 \text{ km}^3 \end{cases}$$

Queremos encontrar T tal que $x(T) = 0.0002 \cdot 458 = 0.0916 \text{ km}^3$

Resolviendo (1) nos queda:

$$x(t) = 0.0458 + 0.1832 e^{-0.3821 t}$$

Por tanto

$$T = \frac{-1}{0.3821} \ln \frac{0.0916 - 0.0458}{0.1832} \approx 3.63 \text{ años}$$

3.- Desintegración de elementos radiactivos.

Sea $D(t)$ = cantidad de sustancia radiactiva.

$$(2) \quad \frac{dD(t)}{dt} = -\lambda D(t) \quad ; \quad D(0) = D_0$$

λ es la constante de desintegración o coeficiente de radiactividad del elemento.

Resolviendo (2) nos queda. $D(t) = D_0 e^{-\lambda t}$

Semivida del elemento radiactivo es el tiempo T necesario para que la cantidad de una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad.

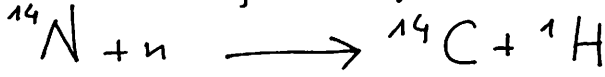
$$\frac{D(t+T)}{D(t)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Aplicación a la determinación de la edad de un fósil. ED-11

Teoría de Willard Frank Libby (1908-1980)

premio Nóbel de Química en 1960 por su método de datación del carbono 14.

* Reacción nuclear que se produce en las capas altas de la atmósfera.



* $p [^{12}\text{C}] = [^{14}\text{C}]$ p constante a lo largo de miles de años

* Todos los seres vivos asimilan, directa o indirectamente los dos tipos de moléculas de carbono en proporción idénticas a las de la atmósfera. Cuando el organismo muere deja de asimilar carbono y sólo el proceso de desintegración continúa. Así, comparando la proporción de ^{14}C que hay en un fósil, con la proporción de ^{12}C es posible encontrar una estimación razonable de su edad.

* la semivida del ^{14}C es de 5600 años

Sea $\tilde{T} < 0$ el instante que el ser vivo que dio lugar al fósil murió. y $t=0$ el momento actual.

$$D(t) = D_F e^{-\lambda(t-\tilde{T})} \quad t > \tilde{T}$$

$D(\tilde{T}) = D_F =$ cantidad de ^{14}C cuando se inicia la desintegración = $p [^{12}\text{C}]$ medido en la actualidad.

$D_0 = D(0) =$ cantidad de ^{14}C en la actualidad (en el tejido muerto)

$$\frac{D_0}{D_F} = e^{\lambda \tilde{T}} \Rightarrow \tilde{T} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{D_0}{D_F}\right)$$

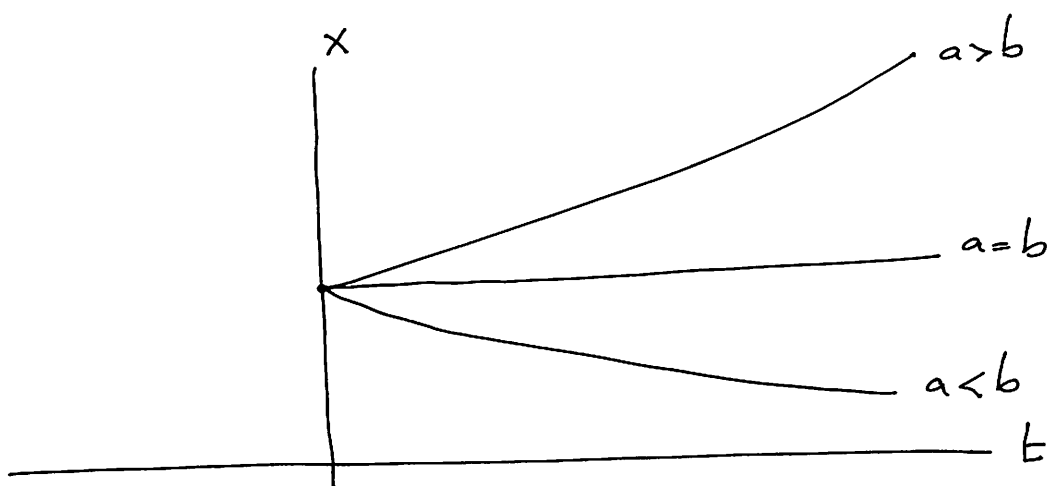
4.- Modelos de Malthus

$$\dot{x} = ax - bx \quad a, b > 0$$

a = tasa de natalidad relativa

b = tasa de mortalidad relativa.

$x(t)$ = población (densidad) en el instante t .



$$\begin{cases} \dot{x} = (a-b)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 e^{(a-b)t}$$

Modelo que tiene en cuenta la tasa de migración
 $g(t)$ = tasa de migración (inmigración - emigración)

$$\dot{x} = kx + g(t) \quad (\text{modelo no autónomo})$$

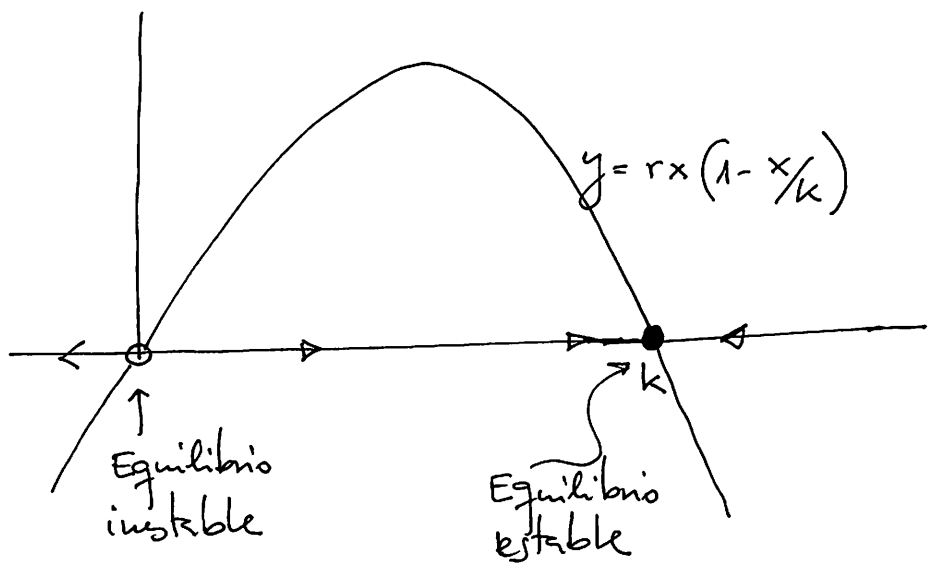
4 ED 5) Modelos logísticos (Verhulst)

Modelo que incluye una regulación de la densidad de población.

$x(t)$ = densidad de población en el instante t

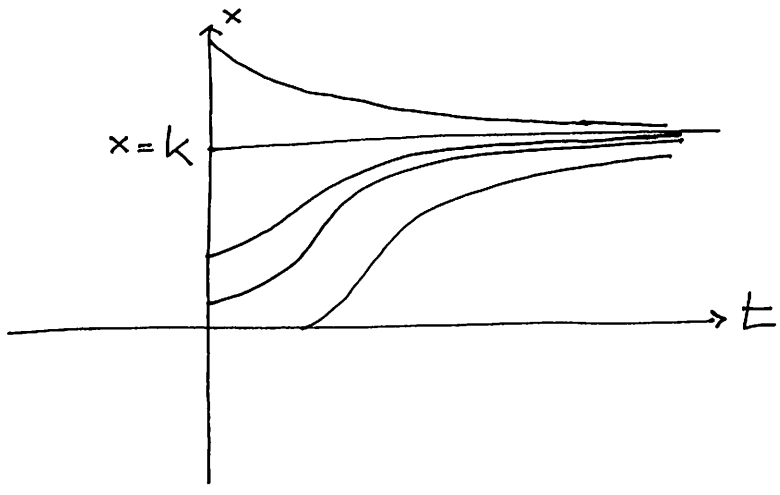
$\dot{x} = ax - bx^2$ $a, b > 0$ (Evolución de $x(t)$)

$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ $r = a, k = a/b.$



Trajectorias:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{kx_0 e^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}$$



$$1) \quad y' = -\frac{y}{t} + \frac{t-1}{2y} \equiv yy' = -\frac{y^2}{t} + \frac{t-1}{2}$$

$$\boxed{u=y^2} \rightarrow u' = -\frac{2}{t}u + (t-1)$$



$$u(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$



$$\boxed{y(t) = \pm \sqrt{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2}}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

2) CAMBIO DE VARIABLES EN EL ANÁLISIS CUALITATIVO

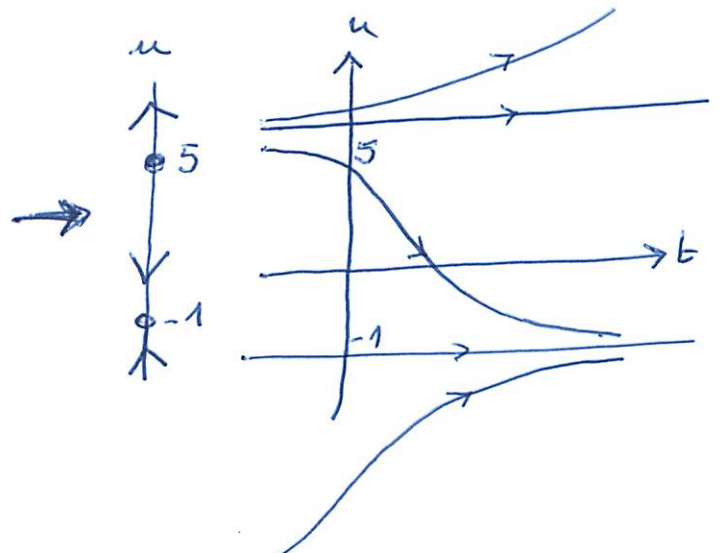
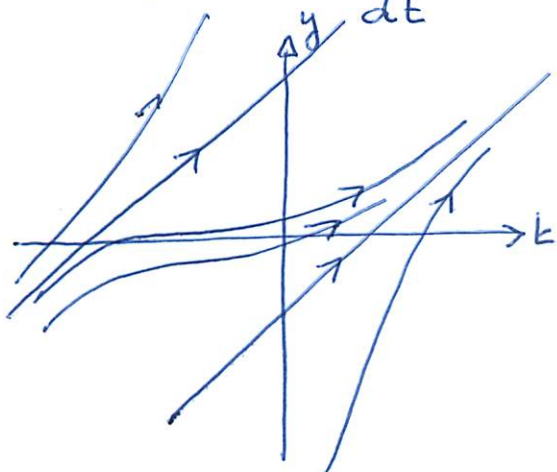
$$y' = \frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3 \quad (\text{NO AUTÓNOMA})$$

$$y' = (y-2t)^2 - 4(y-2t) - 3$$



$$\boxed{u = y - 2t}$$

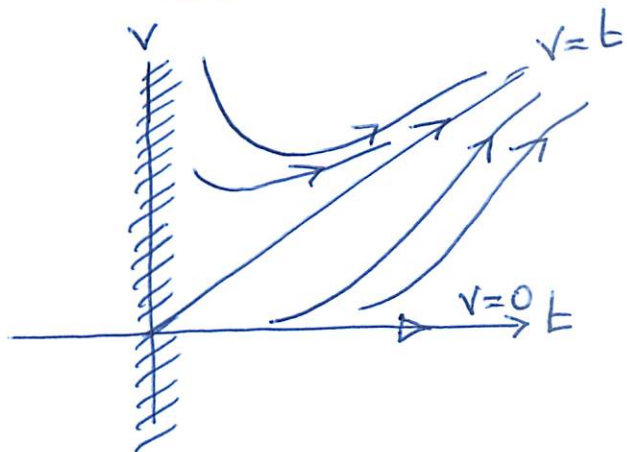
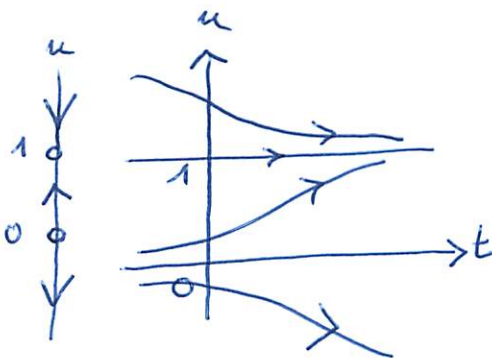
(AUTÓNOMA) $u' = \frac{du}{dt} = u^2 - 4u - 5$



3) $\frac{dv}{dt} = v - \frac{v^2}{t} + \frac{v}{t}$ (NO AUTÓNOMA)

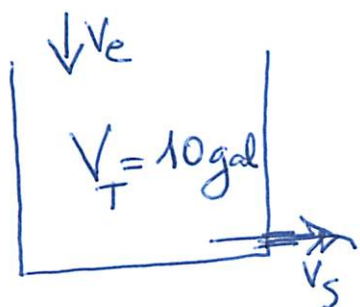
$u = \frac{v}{t}$

$\frac{du}{dt} = (1-u)u$ (AUTÓNOMA)



SÓLO ESTÁ DEFINIDO para $t > \epsilon > 0$
o $t < -\epsilon < 0$

PROBLEMA DE MEZCLA (123)



$V_{\text{entrada}} = 2 \text{ gal/min}$
 entrada de azúcar = 0.25 libras/min
 $V_{\text{salida}} = 1 \text{ gal/min}$

$V(0) = 4 \text{ gal de agua limpia}$

Se pide:
 Concent. de azúcar en $t=6$

$A(t) = \text{cant. de azúcar en } t \text{ min. en libras.}$

$\frac{dA}{dt} = 0.25 - \frac{A}{4+t} \cdot 1$ (EC. LINEAL; $A(0)=0$)

$V(t) = 4+t$

Concent. de azúcar en $t = C(t) = \frac{A(t)}{4+t}$

$\frac{dC}{dt} = \frac{0.25 - 2C}{(4+t)}$ (EC. VAR. SEPAR.; $C(0)=0$)
 $C(6) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(2 + \frac{t}{2}\right)^{-2} \text{ lib/gal}$

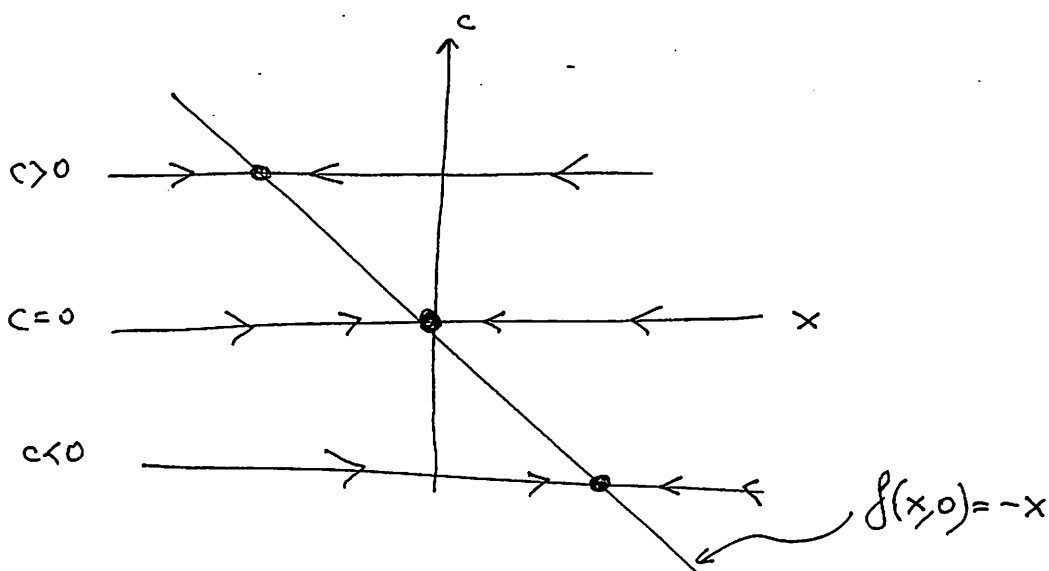
BIFURCACIONES

$$\dot{x} = f(x, c) \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad c \in \mathbb{R}^k$$

Análisis de equilibrios y sus estabildades.

Ejemplos:

1) $\dot{x} = c - x = f(x, c) \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad c \in \mathbb{R}^1$

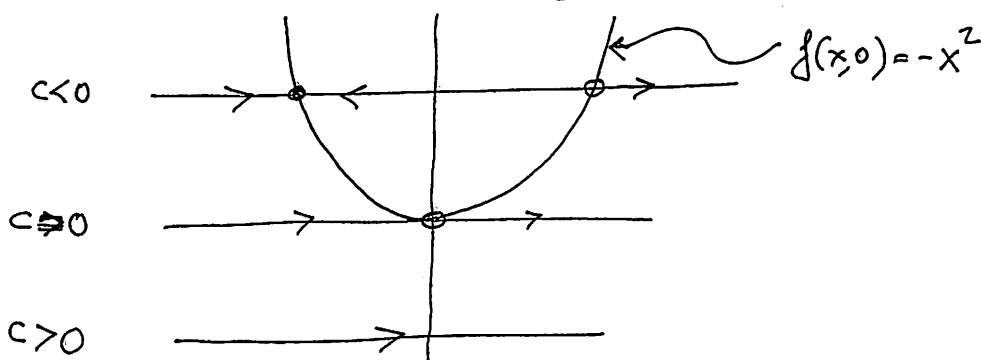


Un equilibrio hiperbólico es estructuralmente estable ante perturbaciones.

2) Casos de equilibrios no hiperbólicos $f(\bar{x})=0$ y $f'(\bar{x})=0$

2-1) Bifurcación silla-nudo.

$$\dot{x} = c + x^2 = f(x, c)$$



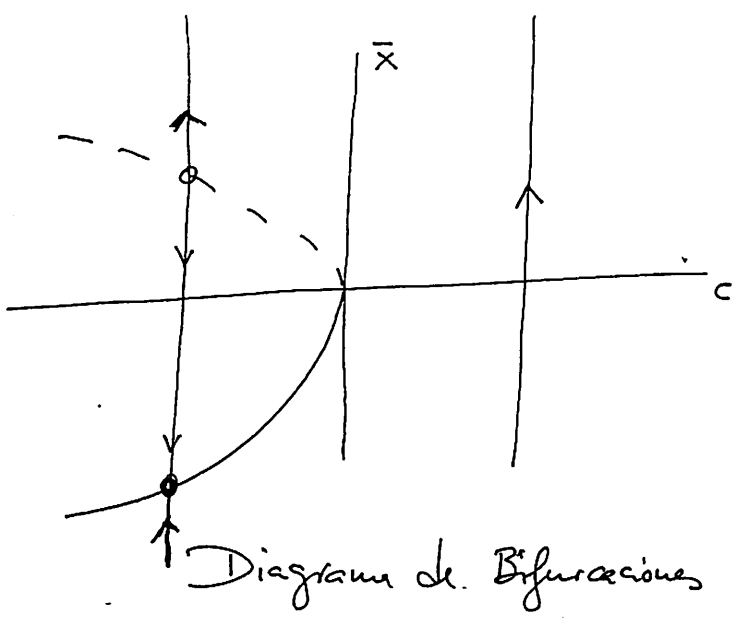


Diagrama de Bifurcaciones

2-2) Bifurcación transcritical.

$$\dot{x} = cx + x^2 = f(x, c)$$

$$x \in \mathbb{R}^1, c \in \mathbb{R}^1$$

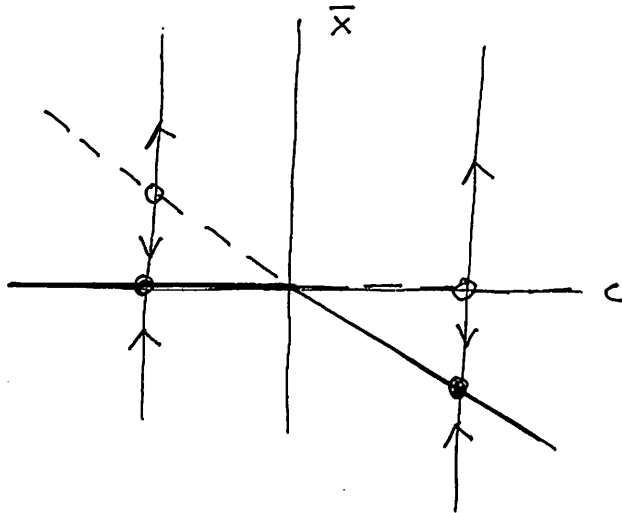
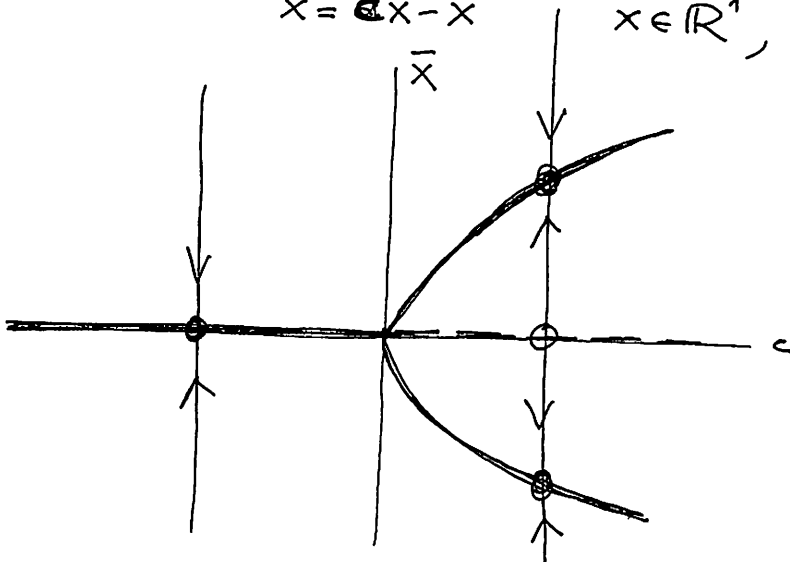


Diagrama de Bifurcaciones.

2-3) Bifurcación pitchfork

$$\dot{x} = cx - x^3$$

$$x \in \mathbb{R}^1, c \in \mathbb{R}^1$$



2-4) Hysteresis

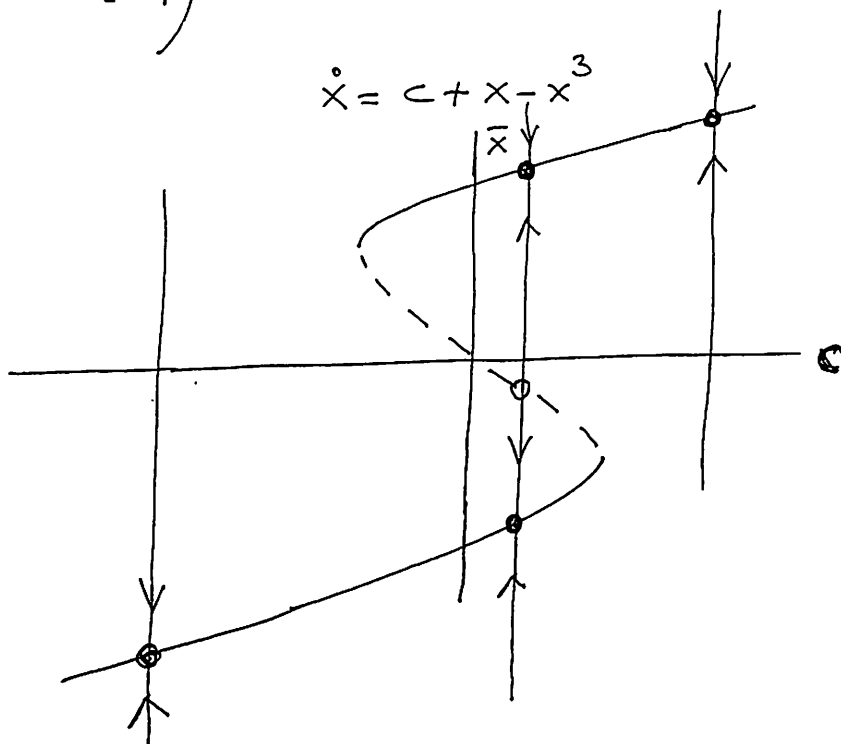
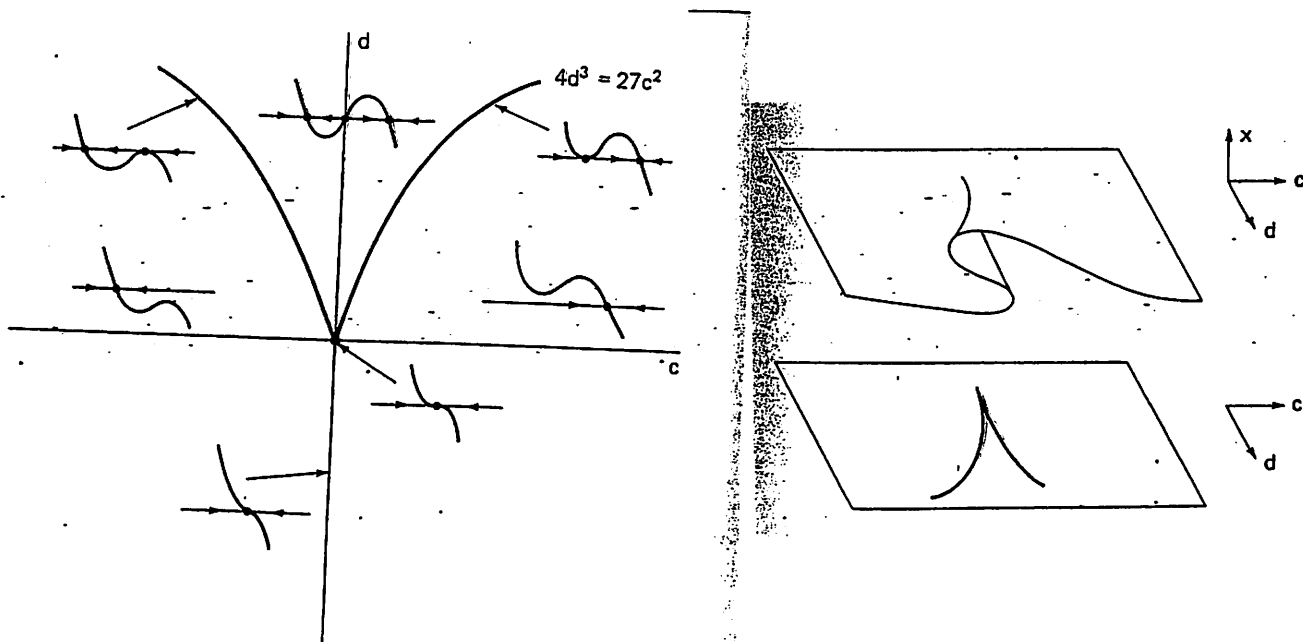


Diagrama de Bifurcación

2-5) Bifurcación cúspide

$$\dot{x} = c + dx - x^3 = f(x, c, d)$$



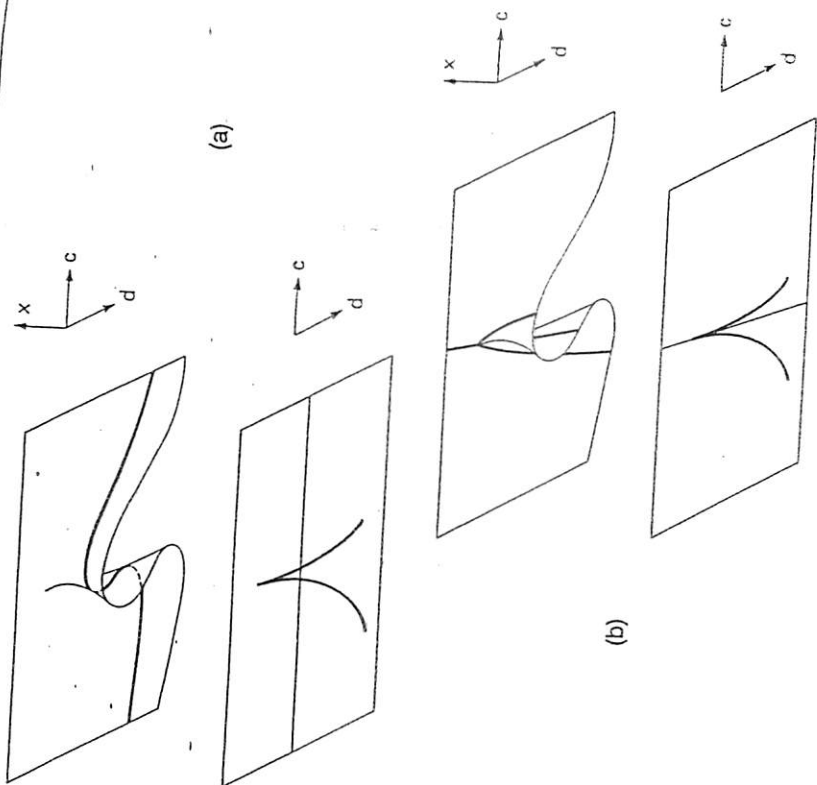


Figure 2.15. Slices of the bifurcation diagram of $\dot{x} = c + dx - x^3$: (a) hysteresis for $d = 1$, (b) supercritical pitchfork for $c = 0$, and (c) supercritical saddle-node for $c = 1$.

2.1. Dependence on Parameters - Examples 39

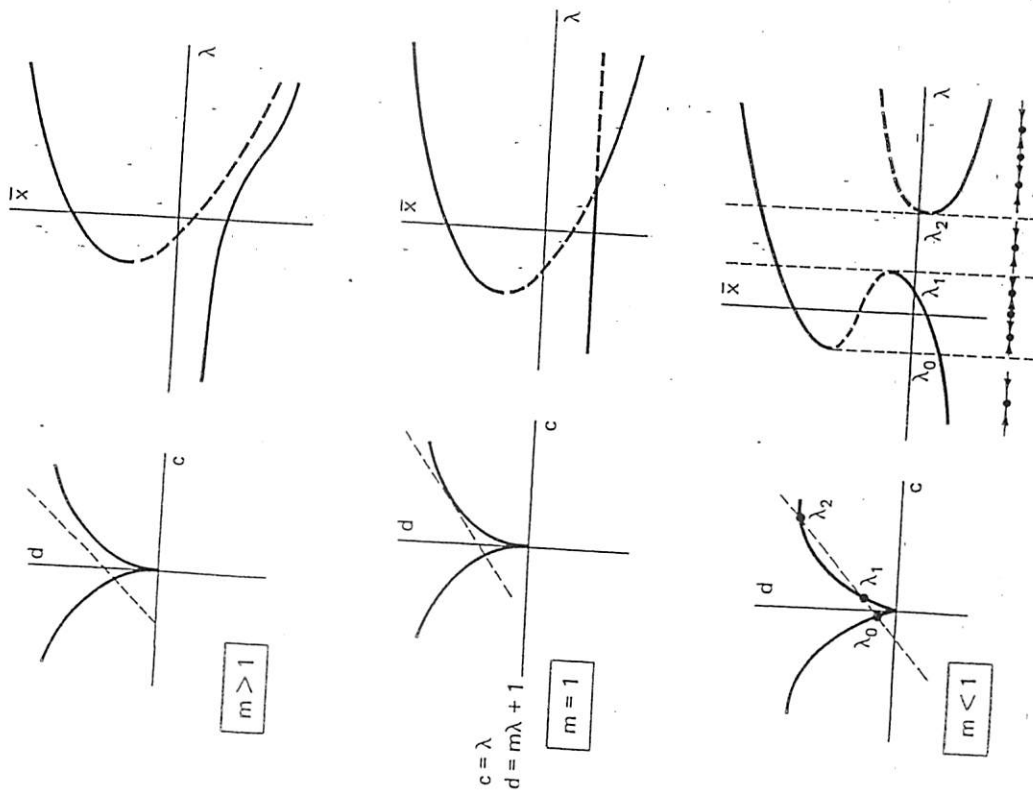


Figure 2.16. Bifurcation diagrams of $\dot{x} = \lambda + (m\lambda + 1)x - x^3$ for $m > 1$, $m = 1$, and $m < 1$.

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bx^2}{a^2 + x^2} \quad r, k, a, b > 0, x \geq 0$$

Cambio de variables $\left\{ u = x/a, \tau = \frac{b}{a} t \right\}$

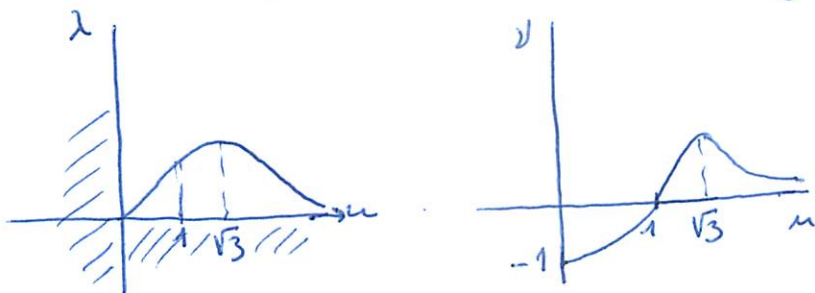
$$u' = u \left[\lambda - \nu u - \frac{u}{1+u^2} \right], \quad \lambda = \frac{ar}{b} > 0, \nu = \frac{a^2 r}{bk} > 0$$

Bifurcación SN de equilibrios no triviales.

$$\begin{cases} \lambda - \nu u - \frac{u}{1+u^2} = 0 \\ -\nu + \frac{u^2-1}{(1+u^2)^2} = 0 \end{cases} \quad SN \equiv \begin{cases} \lambda = \frac{2u^3}{(1+u^2)^2} \\ \nu = \frac{u^2-1}{(1+u^2)^2} \end{cases}$$

Cúspide (CU) $\begin{cases} \frac{d\lambda}{du} = \frac{u^2(6-2u^2)}{(1+u^2)^3} = 0 \rightarrow u = +\sqrt{3} > 0 \text{ (Eq. positivos)} \\ \frac{d\nu}{du} = \frac{2u^2(3-u^2)}{(1+u^2)^2} = 0 \rightarrow u = +\sqrt{3} > 0 \text{ "} \end{cases}$

CU para $u = +\sqrt{3} \rightarrow \lambda = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \nu = \frac{1}{8} \quad CU \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8} \right)$



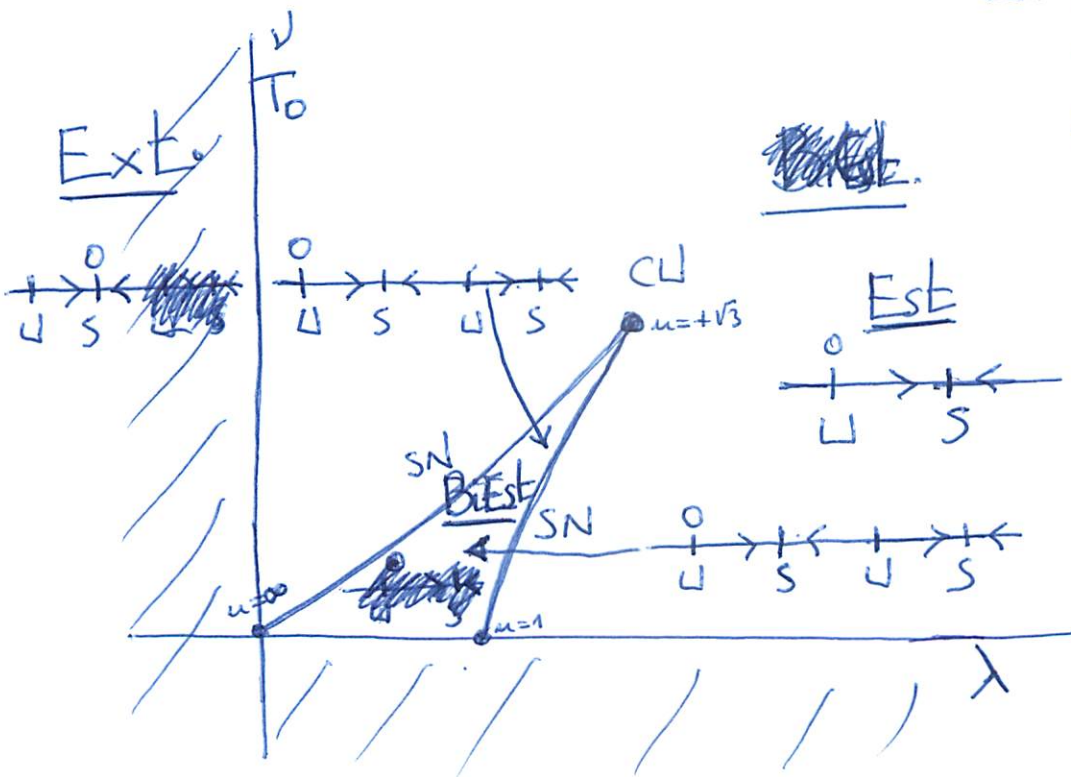
Estabilidad de $u=0$

$$f(0; \lambda, \mu) = 0 \quad \forall \lambda, \mu$$

$$f_u(0; \lambda, \mu) = \lambda$$

$\lambda > 0, u=0$ inestable (U)

En $\lambda=0$ hay una transcritical de $u=0$.



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bx}{a+x} \quad r, k, a, b > 0 \quad x \geq 0$$

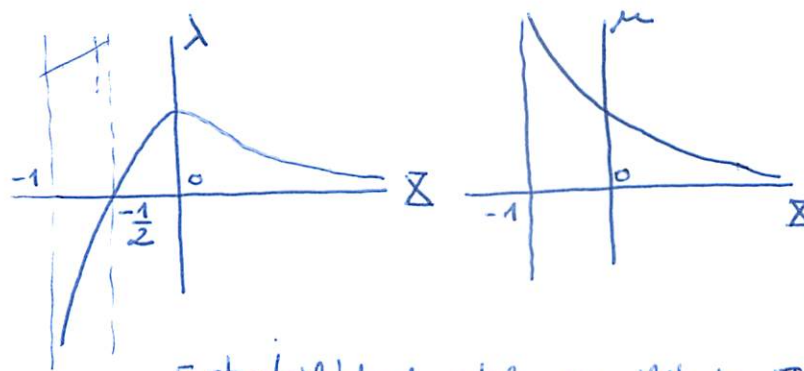
Haciendo el cambio: $\{x = a\delta; t = \frac{a}{b}\tau\}$

$$\delta' = \frac{d\delta}{d\tau} = \delta \left[\lambda - \mu\delta - \frac{1}{1+\delta} \right] \quad \text{con } \lambda = \frac{ar}{b} > 0, \mu = \frac{a^2r}{bk} > 0$$

$\delta=0$ es equilibrio para cualq. valor de λ y μ .

Bifurcación silla-modo de equilibrios positivos

$$\begin{cases} f(\delta; \lambda, \mu) = \lambda - \mu\delta - \frac{1}{1+\delta} = 0 \\ f'_\delta(\delta; \lambda, \mu) = -\mu + \frac{1}{(1+\delta)^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2} \\ \mu = \frac{1}{(1+\delta)^2} \end{cases}$$



Ec. paramétricas de la SN; donde el parámetro representa el equilibrio doble

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{d\delta} = -\frac{2\delta}{(1+\delta)^3} = 0 \Rightarrow \delta=0 \\ \frac{d\mu}{d\delta} = -\frac{2}{(1+\delta)^3} \neq 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{No hay} \\ \text{CÓSPIDE} \end{array} \right\}$$

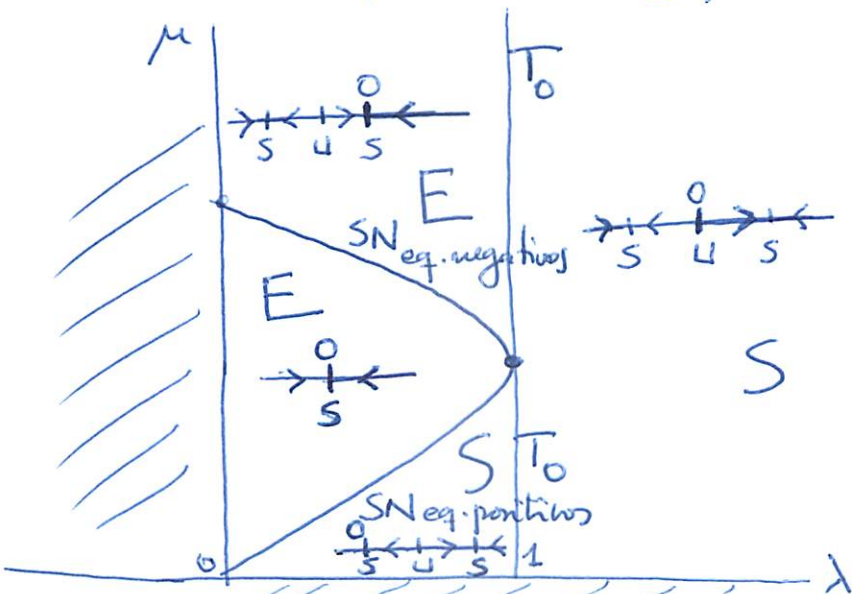
Estabilidad del equilibrio $\delta=0$.

$$\begin{cases} f(0; \lambda, \mu) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \\ f'_x(0; \lambda, \mu) = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \text{ Bifurcación de } \delta=0$$

($\lambda < 1, \delta=0$ estable, $\lambda > 1$ inestable)

$$f_{x\lambda}(0; \lambda, \mu) = 1 \neq 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(0; \lambda, \mu) = -2\mu + 2$$

Por tanto para $\lambda=1$ y $\mu \neq 1$ Bif. Transcrita de $\delta=0$. (T_0)



Otra formula:

$$X' = \frac{X}{1+X} [\lambda + \lambda X - \mu X - \mu X^2 - 1] = \frac{-X}{1+X} [\mu X^2 + (\mu - \lambda)X + (1 - \lambda)]$$

$X=0$ es equilibrio $\forall \lambda, \mu$

$$\mu X^2 + (\mu - \lambda)X + (1 - \lambda) = 0 \rightarrow X_{1,2} = \frac{-(\mu - \lambda) \pm \sqrt{(\mu - \lambda)^2 - 4\mu(1 - \lambda)}}{2\mu}$$

Bifurcaciones ("equilibrios dobles")

Si $(\mu - \lambda)^2 - 4\mu(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{\lambda - \mu}{2\mu}$ SN del eq. $X_1 = X_2$

Si $\lambda = 1$ e ~~para~~ \Rightarrow Bifurcación del eq. $X=0$

Si $\mu > \lambda = 1 \rightarrow X_1 = \frac{-2(\mu - 1)}{\mu} < 0, X_2 = 0 = X_3$

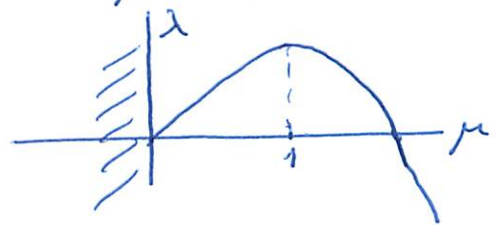
Si $\mu < \lambda = 1 \rightarrow X_1 = \frac{2(\lambda - \mu)}{\mu} > 0, X_2 = 0 = X_3$

$\lambda = 1$ Transcrit. del 0

$$SN \equiv (\mu - \lambda)^2 - 4\mu(1 - \lambda) = 0 \equiv (\lambda + \mu)^2 = 4\mu \equiv \begin{cases} \lambda + \mu = \pm \sqrt{4\mu} \\ \mu > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\mu + \sqrt{4\mu} \rightarrow \lambda' = -1 + \frac{4}{2\sqrt{4\mu}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1 - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = 0 \rightarrow \mu = 1$$

$$\lambda = -\mu - \sqrt{4\mu} < 0$$

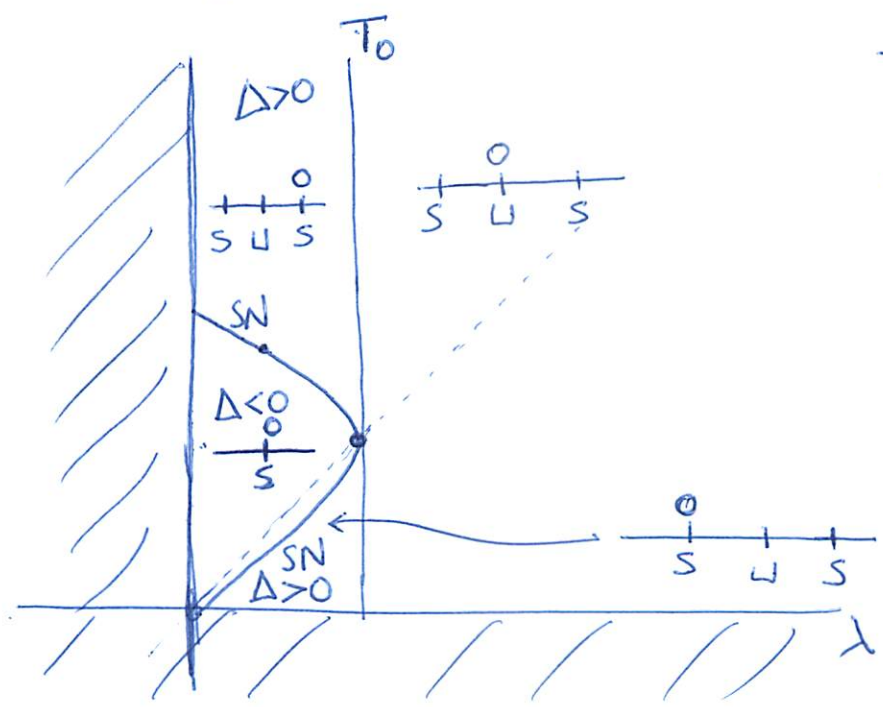


Estabilidad de $X=0$

$$f'_X(0; \lambda, \mu) = \lambda - 1$$

$\lambda > 1, X=0$ Inestable (U)

$\lambda < 1, X=0$, Estable (S)



1. Para las siguientes ecuaciones diferenciales uniparamétricas, determina los equilibrios, su estabilidad y el correspondiente diagrama de bifurcaciones. Comprueba los distintos tipos de bifurcación estudiados en teoría mediante las condiciones para las derivadas y describe los tipos no estudiados.

a) $\dot{x} = 1 + \lambda x + x^2$,	b) $\dot{x} = \lambda x + 2x^2$,
c) $\dot{x} = 2\lambda + 3x^2$,	d) $\dot{x} = \lambda + (\lambda + 1)x + x^2$,
e) $\dot{x} = (\lambda - 2x)(\lambda + 2x - 1)$,	f) $\dot{x} = (\lambda + x - 1)(\lambda + x^2 - 1)$,
g) $\dot{x} = (\lambda + x)(\lambda - x)(\lambda - 2x - 1)$,	h) $\dot{x} = \lambda - \lambda x + x^2 - x^3$,
i) $\dot{x} = x^3 + \lambda^2 x - x$,	j) $\dot{x} = (x - \lambda)(x^2 + \lambda^2 - 1)$,
k) $\dot{x} = (x - (\lambda - 1)^2)(x^2 + \lambda^2 - 1)$,	l) $\dot{x} = (\lambda + x)(\lambda - x)(x^2 + \lambda^2 - 1)$,
m) $\dot{x} = (\lambda - x^2)(\lambda + x^2 - 1)$,	n) $\dot{x} = (\lambda - x^2 - 1)(\lambda + x^2)$,
ñ) $\dot{x} = (x^2 + \lambda)(\lambda^2 + x)$,	o) $\dot{x} = x(\lambda - \text{Ch}(x))$,
p) $\dot{x} = (\lambda - x^2)(\lambda + x^2)$,	q) $\dot{x} = (\lambda^2 - x^2)(\lambda - x^2)$,
r) $\dot{x} = (\lambda^2 - x^2)(\lambda^2 - x^4)$,	s) $\dot{x} = \lambda x - \frac{x}{1+x}$,
t) $\dot{x} = \lambda - \frac{x^2}{1+x^2}$,	u) $\dot{x} = \lambda - \frac{x^3}{1+x^3}$,
v) $\dot{x} = \lambda x - \frac{x^2}{1+x^2}$,	w) $\dot{x} = \lambda x - \frac{x^3}{1+x^3}$.

2. Representa en el ordenador, para valores seleccionados del parámetro y para algunas condiciones iniciales adecuadas, las soluciones de las ecuaciones del ejercicio anterior frente al tiempo.
3. Para las siguientes ecuaciones diferenciales biparamétricas, determina los equilibrios, su estabilidad y el correspondiente conjunto de bifurcaciones.

a) $\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^2$,	b) $\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x + x^3$,
c) $\dot{x} = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 - x^3$,	d) $\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x^2 - x^3$,
e) $\dot{x} = \lambda_1 - \lambda_2 x + \frac{x^2}{1+x^2}$,	f) $\dot{x} = x(1-x) - \frac{\lambda_1 x}{\lambda_2 + x}$,
g) $\dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 + x^4$,	h) $\dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_2 x^3 + x^4$.

4. Representa los diagramas de bifurcación y los conjuntos de bifurcación de los ejercicios anteriores usando el ordenador.

SISTEMAS AUTÓNOMOS PLANOS (LINEALES)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$ (SÓLO em equilibrio (0,0))

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$$



$$\underline{u} = P^{-1} \underline{x} \equiv \underline{x} = P \underline{u} \quad \det(P) \neq 0$$



$$\dot{\underline{u}} = P^{-1} \dot{\underline{x}} = P^{-1} A \underline{x} = P^{-1} A P \underline{u} = J \underline{u}$$

Teorema: Dada una matriz A , existe P regular tal que $P^{-1} A P = J$, donde J es:

i) $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, siendo λ_1 y λ_2 los autovalores reales y distintos de A .

ii) Si A tiene un autovalor doble real $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, entonces $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ó $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

iii) Si A tiene autovalores $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$ complejos, entonces $J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Ejemplo: Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ con autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y una posible matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (no es única)

ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS EN FORMA NORMAL

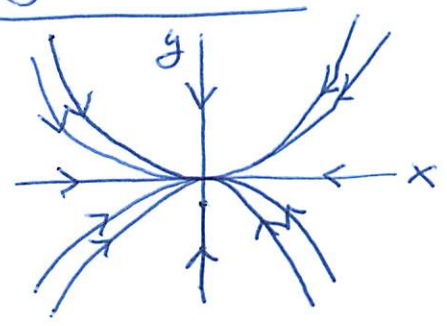
1) Dos autovalores reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$
 (Supongamos $|\lambda_1| < |\lambda_2|$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x & \rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ \dot{y} = \lambda_2 y & \rightarrow y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|l} \boxed{x=0} \\ \boxed{y = \frac{y_0}{x_0^{\lambda_2/\lambda_1}} x^{\lambda_2/\lambda_1}} \\ \boxed{x_0 \neq 0} \end{array}$$

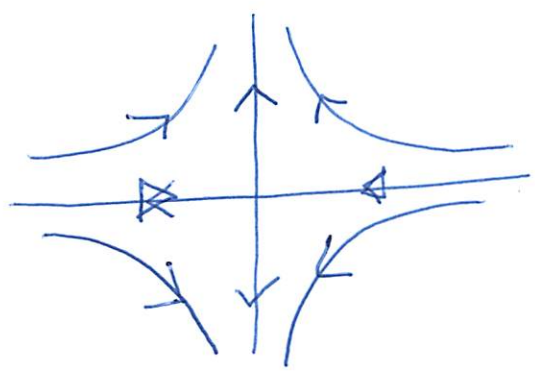
1-1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (El caso de los dos positivos es igual cambiando el tiempo)

$$a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow \text{SOL} \equiv \boxed{y = C x^a} \text{ y } \boxed{x=0}$$

NODO
(ESTABLE)



1-2) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
 $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0 \Rightarrow \text{SOL} \equiv y = C x^a, x=0$



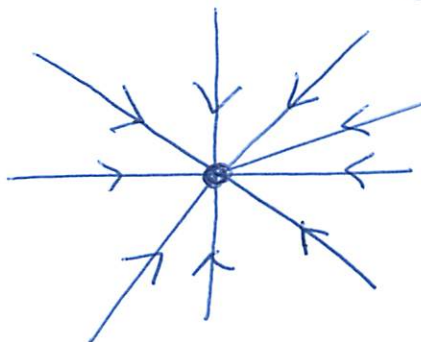
2) Autovalores dobles $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda < 0$)

2-1) $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Caso particular de 1-1)

$a=1 \rightarrow \text{sol} \equiv y=Cx, x=0$

NODO
(impropio)
(ESTABLE)



2-2) $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda < 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

$\dot{x} = \lambda x + e^{\lambda t} y_0$

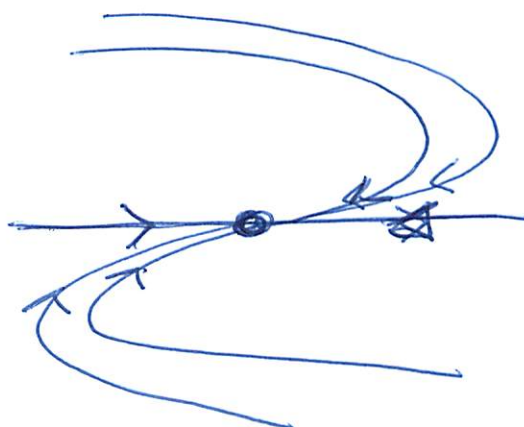
$$\rightarrow \boxed{y(t) = e^{\lambda t} y_0}$$

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t} (t y_0 + x_0)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

$y=0$ recta invariante

NODO
(impropio)
(ESTABLE)



EL caso $\lambda > 0$, es análogo, sólo cambia la estabilidad.

3) Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha \leq 0, \beta > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{cases} \xrightarrow{\text{POLARES}} \begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}, p \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha p \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{SOL}} \boxed{\begin{matrix} p(t) = e^{\alpha t} p_0 \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0 \end{matrix}}$$



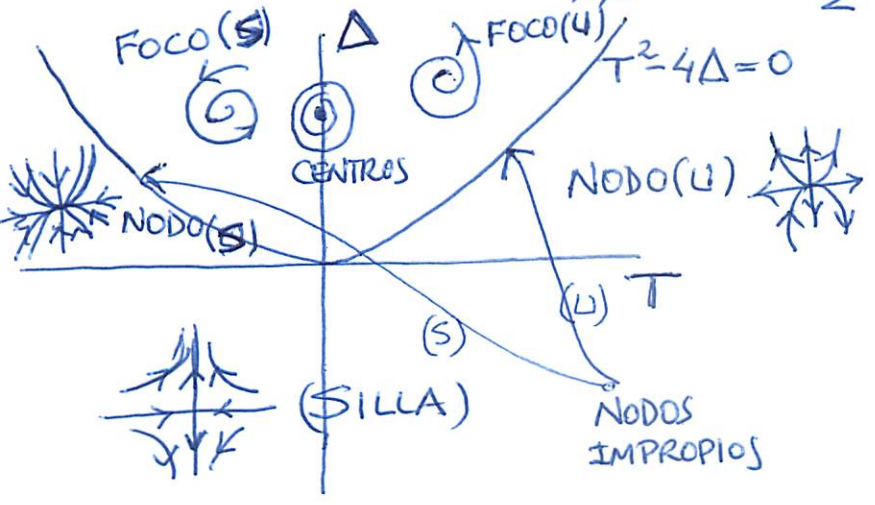
SOL. GENERAL en cartesianas:

$$\begin{aligned} x(t) &= p_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_0) = e^{\alpha t} [A \cos \beta t - B \sin \beta t] \\ y(t) &= p_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta_0) = e^{\alpha t} [A \sin \beta t + B \cos \beta t] \end{aligned} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

PLANO TRAZA - DETERMINANTE

Pol. caract. de $A \equiv P(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + \Delta$, $T = \text{Traza de } A$
 $\Delta = \text{Determinante de } A$

Autovalores $\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$



1) $T^2 - 4\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 $\Delta > 0 \begin{cases} T > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ T < 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0 \end{cases}$

$\Delta < 0 \rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

2) $T^2 - 4\Delta = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

3) $T^2 - 4\Delta < 0 \rightarrow \text{Autovalores Complejos}$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

A matriz dos por dos

·) Si: $A = PJP^{-1}$ entonces $e^A = Pe^JP^{-1}$.

·) Si: $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ entonces $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$

·) Si: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ entonces $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$

·) Si: $J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ entonces $e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}$

Solución general de $\dot{x} = Ax$ ~~≠~~

$$x(t) = e^{At} c \quad c = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \text{ vector constante}$$

Solución particular ~~de~~ solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \rightarrow x(t) = e^{At} x_0$$

Construcción de e^{At}

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

o bien, conociendo dos soluciones que cumplan:

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL

31

(HOMOGÉNEO y con coef. constants)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1) Autovalores reales y distintos λ_1, λ_2 .

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = \tilde{k}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

2) Autovalor doble $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$x(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}$$

$$y(t) = \tilde{k}_1 e^{\lambda t} + \tilde{k}_2 t e^{\lambda t}$$

3) Autovalores complejos $\alpha \pm i\beta$

$$x(t) = e^{\alpha t} (k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t)$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (\tilde{k}_1 \cos \beta t + \tilde{k}_2 \sin \beta t)$$

ECUACIONES LINEALES DE 2º orden (HOMOGÉNEAS)

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0$$

$$\boxed{y = \dot{x}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -Bx - Ay \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B & -A \end{bmatrix}}^M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinomio característico de M, $p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$,
Conociendo sus raíces conocemos la solución general para $x(t)$,

32

SOLUCIÓN GENERAL DE UN SIST. LINEAL NO HOMOGÉNEO CON COEF. CONSTANTES

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + b(t) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A \in M_{2 \times 2}$$

$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sol. general del homogéneo.

$$\dot{x} = Ax \implies x(t) = e^{At} c \quad c \in \mathbb{R}^2$$

Método de variación de la constante.

$$x(t) = e^{At} c(t), \quad \text{imponemos que sea solución de (1).}$$

$$\dot{x}(t) = A e^{At} c(t) + e^{At} \dot{c}(t),$$

$$A e^{At} c(t) + e^{At} \dot{c}(t) = A e^{At} c(t) + b(t)$$

$$\dot{c}(t) = e^{-At} b(t), \quad \text{integrando respecto de } t$$

$$c(t) - c(0) = \int_0^t e^{-As} b(s) ds$$

Por tanto la sol. general de (1) queda.

$$x(t) = e^{At} c + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s) ds, \quad c \in \mathbb{R}^2$$

La sol. del problema de Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \implies x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s) ds$$

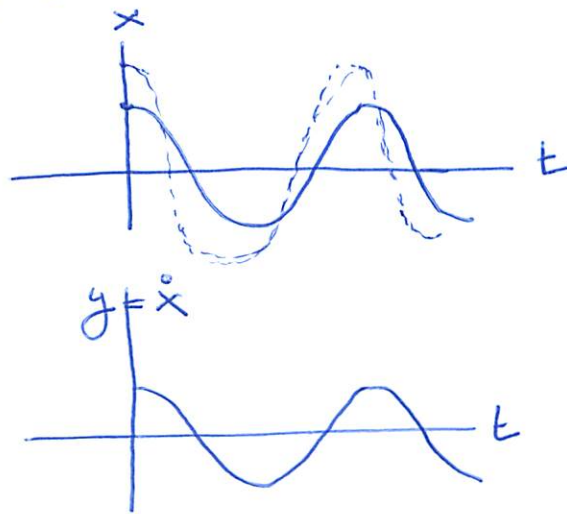
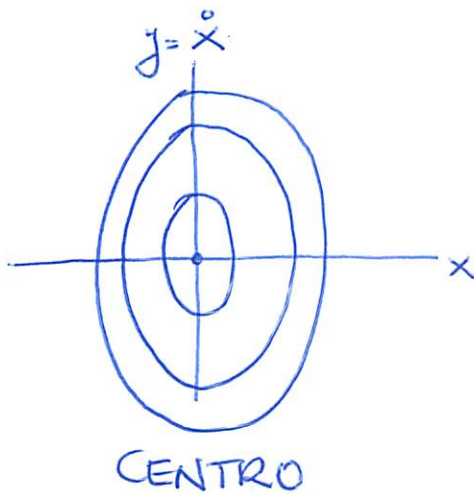
33

CLASIFICACIÓN DE LOS OSCILADORES ARMÓNICOS (302)

- 1) Oscilador armónico no amortiguado
 $m \ddot{x} + kx = 0 \quad m, k > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}x \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sol. general \equiv
$$\begin{cases} x(t) = k_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + k_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \\ y(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$



- 2) Osciladores con amortiguamiento

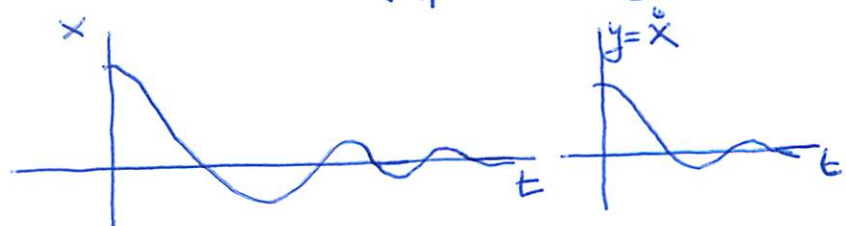
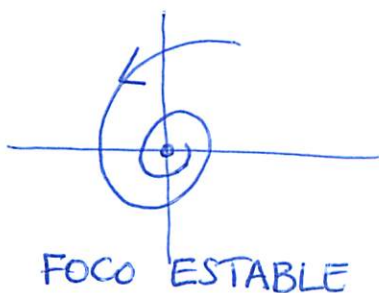
$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = 0 \quad m, b, k > 0$$

- 2-1) Oscilador subamortiguado

$$\ddot{x} + 0.2 \dot{x} + 1.01 x = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -0.1 \pm i$$

Sol. general $\equiv x(t) = e^{-0.1t} (k_1 \cos t + k_2 \sin t)$



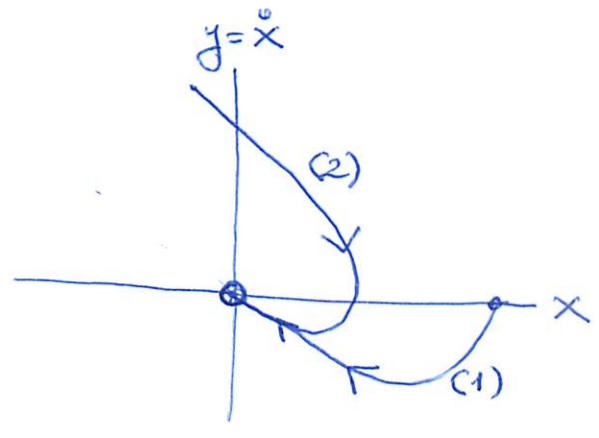
2-2) Oscilador sobreamortiguado

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$$

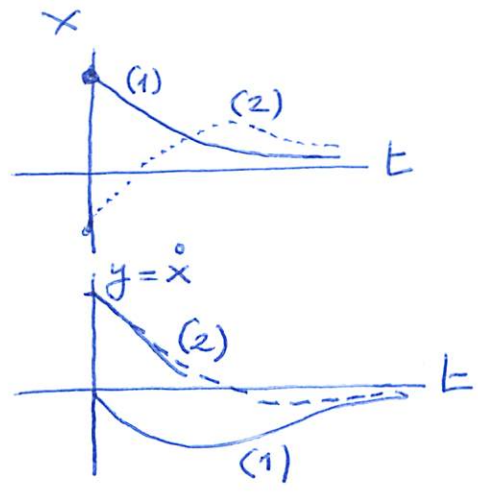
$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_2 = -2.62 < 0$$

$$\lambda_1 = -0.38 < 0$$

NODO ESTABLE



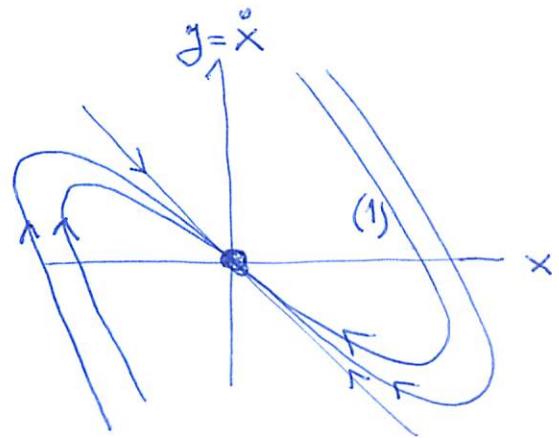
NODO ESTABLE



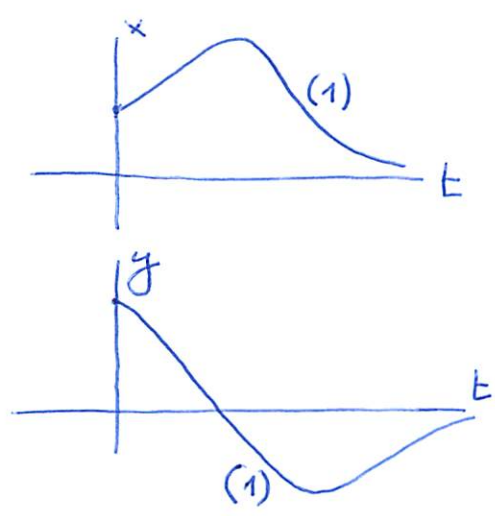
2-3) Oscilador críticamente amortiguado

$$\ddot{x} + 2\sqrt{2}\dot{x} + 2x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -\sqrt{2} \text{ (doble)}$$



NODO (impropio) ESTABLE



FORZAMIENTO SENOIDAL DE UN OSCILADOR ARMÓNICO (362)

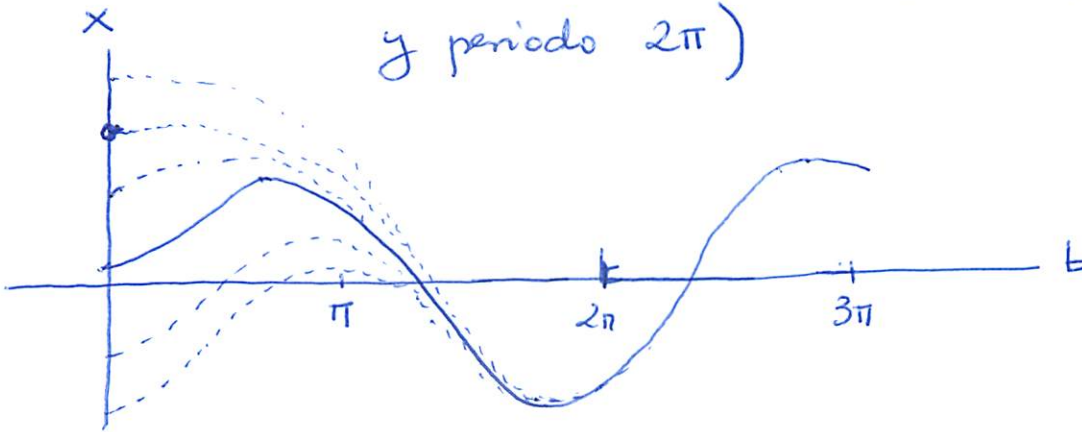
AMORTIGUADO:

$$1) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \text{sen } t$$

$$\text{Sol. general} \equiv x(t) = \underbrace{e^{-t} (k_1 \cos t + k_2 \text{sen } t)}_{\substack{\text{TRANSITORIO} \\ \text{Sol. general} \\ \text{de la homog.} \\ \left(\frac{2\pi \cdot 153}{360}\right)}} + \underbrace{\left(-\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \text{sen } t\right)}_{\substack{\text{PERMANENTE} \\ \text{Sol. part.} \\ \text{de la no homog.}}}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(t - 153^\circ) = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \text{sen } t$$

(función periódica con amplitud $\frac{1}{\sqrt{5}}$
y período 2π)

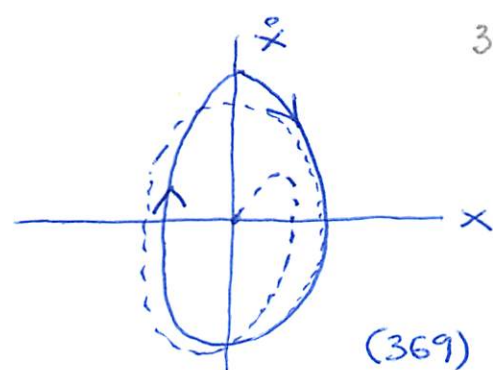
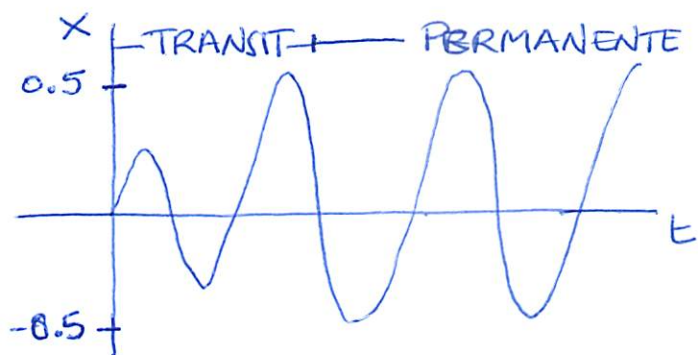


$$2) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 4 \cos 2t$$

$$x(t) = e^{-t} (k_1 \cos(3t) + k_2 \text{sen}(3t)) + \underbrace{\frac{6}{13} \cos(2t) + \frac{4}{13} \text{sen}(2t)}_{\substack{\frac{2\sqrt{13}}{13} \cos(2t + \phi) \\ \phi \approx -34^\circ}}$$

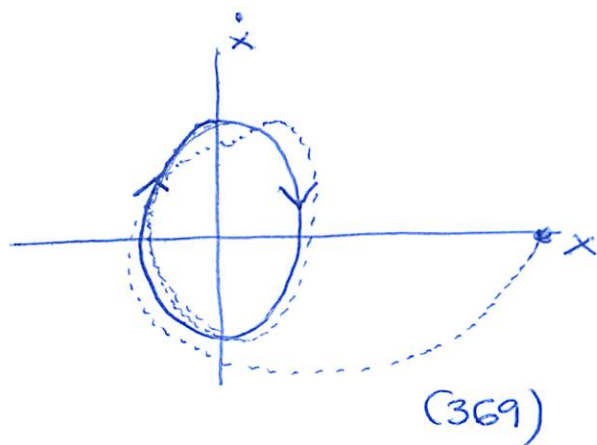
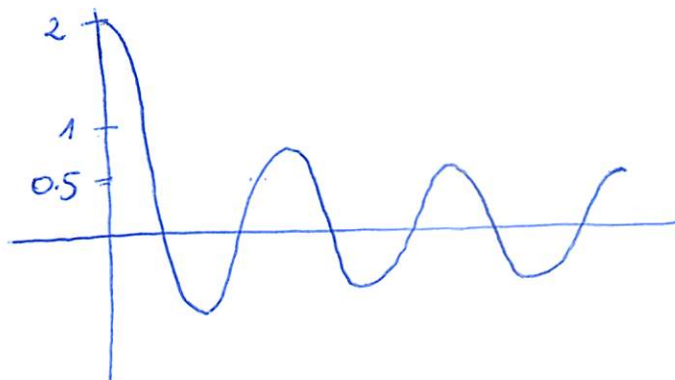
a) Solución que cumple $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \underbrace{e^{-t} \left(-\frac{6}{13} \cos(3t) - \frac{14}{39} \text{sen}(3t)\right)}_{\text{TRANSITORIO}} + \underbrace{\frac{2\sqrt{13}}{13} \cos(2t + \phi)}_{\text{PERMANENTE}}$$



— PERMANENTE
 - - - TRANS + PERM.

b) $x(0)=2, \dot{x}(0)=0$



FORZAMIENTO NO AMORTIGUADO Y RESONANCIA (373)

$$\ddot{x} + 2x = \cos(\omega t) \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \underbrace{k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \sin(\sqrt{2}t)}_{\text{Sol. general homog.}} + \underbrace{\frac{1}{2-\omega^2} \cos \omega t}_{\text{Sol. part. no homog.}} \quad \omega \neq \sqrt{2}$$

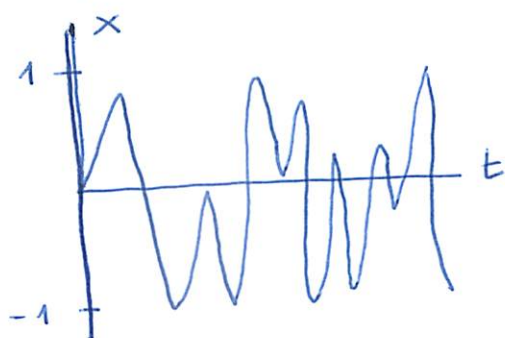
$$x(t) = \underbrace{k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \sin(\sqrt{2}t)}_{\text{Sol. general homog.}} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} t \sin(\sqrt{2}t)}_{\text{Sol. part. no homog.}} \quad \omega = \sqrt{2}$$

Análisis de la solución $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$

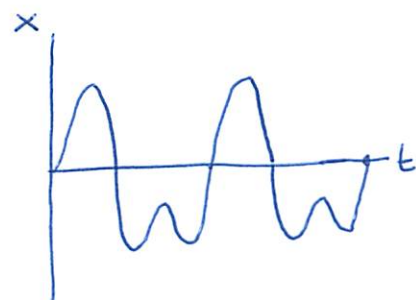
a) Si $\omega \neq \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2-\omega^2} (\cos \omega t - \cos \sqrt{2} t) = \\ &= -\frac{2}{2-\omega^2} \sin\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{2} t\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{SOL.} \\ \text{ÚNICA} \end{array}\right) \end{aligned}$$

a-1) Si $\omega \neq \sqrt{2}$

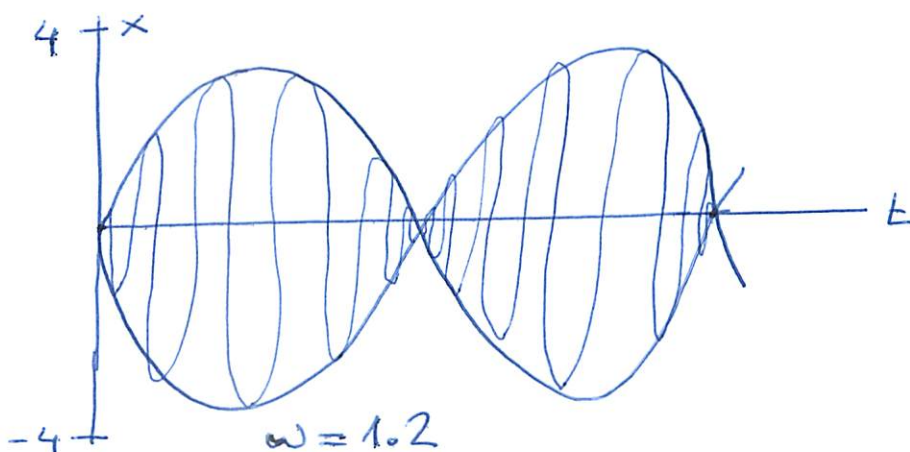


$\omega = 0.5$ (Quasi-periódico)



$\omega = 2\sqrt{2}$
(Periódico)

a-2) Si $\omega \approx \sqrt{2}$ (PULSACIÓN)



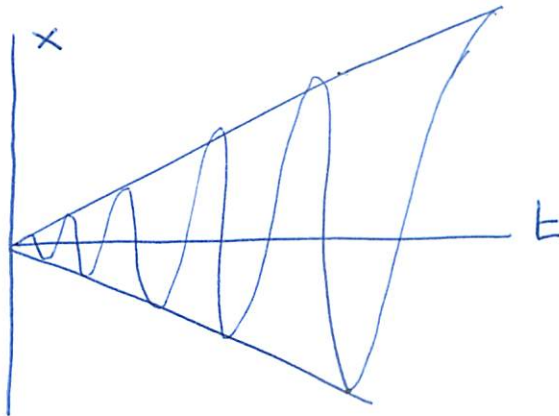
$\omega = 1.2$

$$\text{frecuencia de los pulsos} = \frac{\sqrt{2}-1.2}{4\pi} \approx 0.017$$

$$\text{y el periodo} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}-1.2} \approx 58.$$

b) Si $\omega = \sqrt{2}$ y $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} t \sin(t)$$

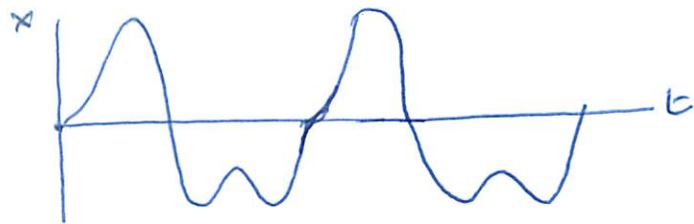


$$\omega = \sqrt{2}$$

RESUMEN

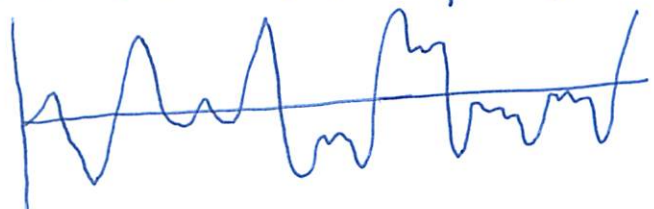
a) $\omega \neq \sqrt{2}$

a-1) $\frac{\omega}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ (nº racionales) (La frecuencia natural del sistema y la del forzamiento son racionalmente dependientes)
 Todas las órbitas son periódicas



a-2) $\frac{\omega}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ (las dos frecuencias son racionalmente independientes)

Todas las órbitas son quasi-periódicas



Si $\omega \approx \sqrt{2}$ las amplitudes se hacen grandes por zonas

b) $\omega = \sqrt{2}$ (RESONANCIA), las amplitudes $\rightarrow \infty$ con $t \rightarrow \infty$.

OSCILADOR ARMÓNICO CON AMORTIGUAMIENTO

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad m, b, k > 0$$

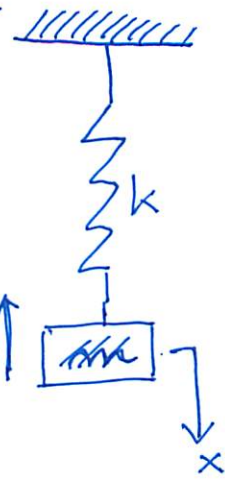
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{y = \dot{x}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$



Equilibrio (0,0)

i) $b = 0$ CENTRO
(Oscilador no amortiguado)



(Todas las soluciones son periódicas, y la masa oscilará siempre alrededor de su posición de reposo) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
(período natural)

frecuencia natural $f = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{1}{2\pi}$

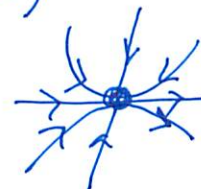
ii) $b^2 - 4km < 0$ (Oscilador subamortiguado)
FOCO ESTABLE

La masa vuelve a su posición inicial oscilando



iii) $b^2 - 4km > 0$ (Oscilador sobreamortiguado)

La masa vuelve a su posición inicial sin oscilar



iv) $b^2 - 4km = 0$ (Oscilador críticamente amortiguado)

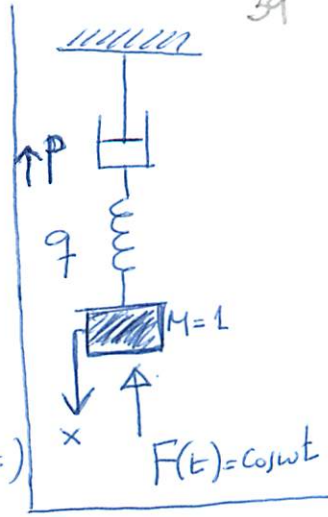
La masa no oscila



OSCILADOR AMORTIGUADO Y FORZADO

$$(1) \ddot{x} + p\dot{x} + qx = \cos(\omega t)$$

$$p, q > 0, \omega > 0$$



Sol. general (1)

$$x(t) = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\substack{\text{Sol. general} \\ \text{del hom.} \\ \downarrow t \uparrow \infty \\ 0 \\ \text{(TRANSIT)}}} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\substack{\text{Sol. part.} \\ \text{no homog.} \\ \text{(PERMAN)}}}$$

Pasando (1) a \mathbb{C} .

$$(2) \ddot{x} + p\dot{x} + qx = e^{i\omega t} \quad (1) \text{ es la parte real de esta ec. (2)}$$

$$\tilde{x}_{part}(t) = a e^{i\omega t}, \text{ imponiendo que } \tilde{x}_{part} \text{ cumple (2)}$$

$$-a\omega^2 e^{i\omega t} + i a \omega p e^{i\omega t} + q a e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$a = \frac{1}{q - \omega^2 + i p \omega} = \frac{q - \omega^2}{\underbrace{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}_{a_1}} - \frac{p \omega}{\underbrace{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}_{a_2}} i$$

$$\tilde{x}_{part}(t) = (a_1 + i a_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = (a_1 \cos \omega t - a_2 \sin \omega t) + i (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t)$$

La parte real de $\tilde{x}_{part}(t)$ es solución de (1)

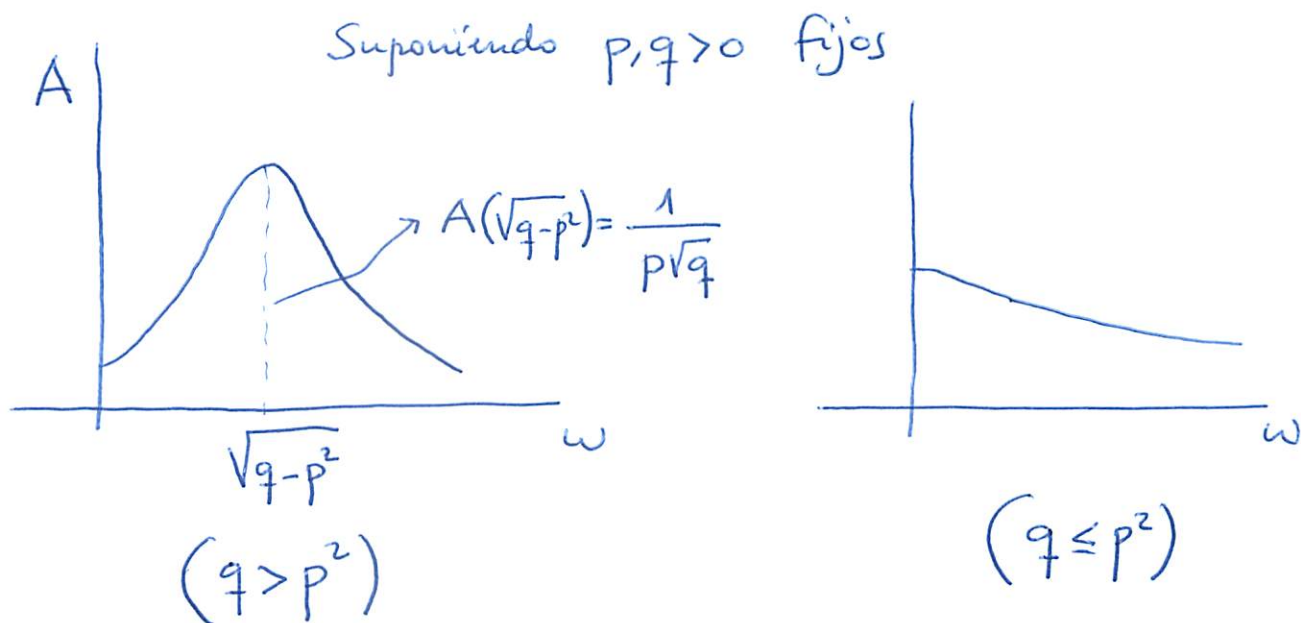
$$x_{part}(t) = a_1 \cos \omega t - a_2 \sin \omega t = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \cos \omega t - \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \sin \omega t \right]$$

Tomando $\bar{\Phi}$ tal que $\cos \bar{\Phi} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, nos queda:

$$x_{\text{part}}(t) = \underbrace{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}_{\substack{\text{Amplitud} \\ \text{"} \\ A}} \cos(\underbrace{\omega t}_{\substack{\text{frecuencia} \\ \text{del forzamiento}}} + \underbrace{\bar{\Phi}}_{\text{fase}})$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} ; \bar{\Phi} = \arccos \frac{q - \omega^2}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}}$$

Análisis de la amplitud de la salida en función de la frecuencia de entrada.



$$\text{Si } p \approx 0, q \approx \omega^2 \Rightarrow A \gg 1$$

A) $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = A \cos(\omega t) \quad p, q > 0$

$$x_{\text{permanente}}(t) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \cos(\omega t + \Phi)$$

B) FORZAMIENTO 2π -periódico.

Sea $f(t)$ 2π -periódica (fuerza externa).

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(x)$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n \geq 1} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

(Fourier)

$$x_{\text{permanente}}(t) = \frac{A_0 \cos(\Phi_0)}{\sqrt{q^2}} +$$

$$+ \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{\sqrt{(q-n^2)^2 + p^2n^2}} (A_n \cos(nt + \Phi_n) + B_n \sin(nt + \Phi_n))$$

SISTEMAS PLANOS NO LINEALES (AUTÓNOMOS)

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{con un punto de equilibrio } (x_0, y_0).$$

$$P(x_0, y_0) = 0 = Q(x_0, y_0).$$

Cambiando las variables $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, (1) queda.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = P(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0) = P(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} \bar{x} + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \bar{y} + R(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} = Q(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0) = Q(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} \bar{x} + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \bar{y} + S(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

donde $R = O(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$, $S = O(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$.

El sistema lineal asociado a (1) en (x_0, y_0) es:

$$(2) \begin{cases} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{cases} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \end{pmatrix} \quad \text{(Matriz Jacobiana de (1) en } x=x_0, y=y_0)$$

Definición: Un punto de equilibrio (x_0, y_0) de (1) se dice **HIPERBÓLICO** si la parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana de (1) en (x_0, y_0) son no nulas.

Teorema (Hartman-Grobman)

Si (x_0, y_0) es un equilibrio hiperbólico de (1). Entonces existe un entorno de este punto de equilibrio en el cual el retrato de fases para el sistema (1) es conjugado a (2). En otras palabras, existe un cambio de variables continuo que lleva un retrato de fases en el otro, y en una pequeña región alrededor del equilibrio, los retratos de fases son cualitativamente equivalentes.

Notación: las variedades estables e inestables de un sistema no-lineal son etiquetadas por: W^s e W^u . El teorema de Hartman implica que W^s y W^u son tangentes a E^s y E^u en el equilibrio.

CONSTRUCCIÓN DE RETRATOS DE FASES.

- Localizar todos los puntos de equilibrios (Puntos críticos)
- Linealizar y clasificar cada punto de equilibrio según teorema de Hartman-Grobman
- Determinar isoclinas relevantes y usar $\frac{dy}{dx}$ para obtener las pendientes de las trayectorias.
- Determinar simetrías: $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$; $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Equilibrios: $(0, 1), (0, -1)$

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \text{ (matriz Jacobiana)}$$

$$J_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ (Nodo inestable)} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \bar{u}_1(1,0) \quad \bar{u}_2(0,1) \text{ (Autovectores)} \end{array}$$

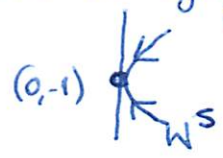
$$J_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Punto de Silla)} \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \bar{u}_1(1,0) \quad \bar{u}_2(0,1) \end{array}$$

$$E^u = \langle (1, 0) \rangle = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \} = e_1 \text{ *}$$

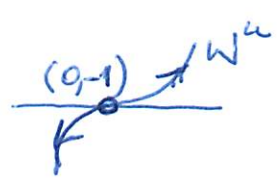
$$E^s = \langle (0, 1) \rangle = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \} = e_2$$

4

$W^s(0,-1)$ es una variedad tangente al eje y en el punto $(0,-1)$



$W^u(0,-1)$ es una variedad tangente al eje $x = E^u$, en $(0,-1)$

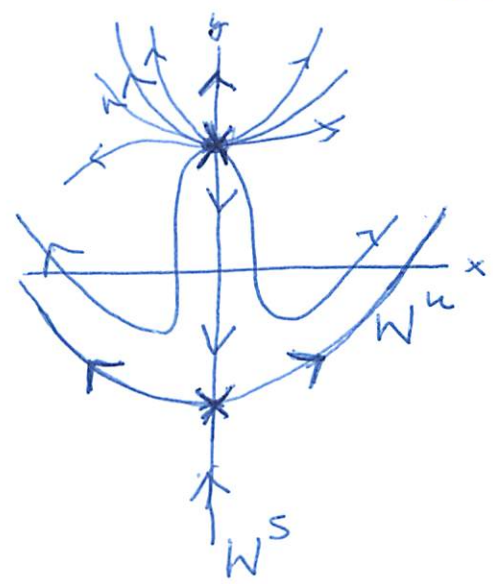
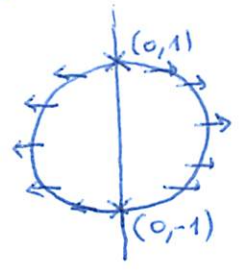


Isoclinas verticales y horizontales

(I.V) $\dot{x}=0 \equiv x=0$ y sobre ella $\dot{y}=y^2-1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} < 0 & |y| < 1 \\ \dot{y} > 0 & |y| > 1 \end{cases}$



(I.H) $\dot{y}=0 \equiv x^2+y^2=1$ y sobre ella $\dot{x}=x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} > 0 & x > 0 \\ \dot{x} < 0 & x < 0 \end{cases}$



◦) SIMÉTRICO al cambio.
 $(x,y,t) \leftrightarrow (-x,y,-t)$

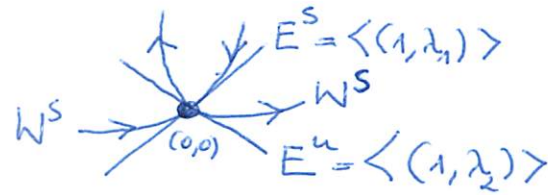
$x=0$ es una variedad (recta) invariante, ~~que pasa~~ en este caso $W^s(0,-1) \equiv E^s(0,-1) \equiv \{x=0\} \equiv$ eje y .

Ejemplo 2 $\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x(1-x^2)+y \end{cases}$

Equilibrios: $(0,0), (1,0), (-1,0)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{Silla})$$



$W^s(0,0)$ es tangente en $(0,0)$ a la recta que pasa por $(0,0)$ y tiene vector director $(1, \lambda_1)$.

Análogamente para $W^u(0,0)$.

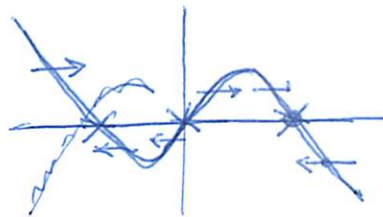
$$d) J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} i \quad (\text{foco inestable})$$

"
 $J_{(-1,0)}$

$$(I.V) \quad \dot{x}=0 \equiv y=0 \quad \text{y sobre ella } \dot{y} = x(1-x^2) \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} > 0 & 0 < x < 1 \\ \dot{y} < 0 & x > 1 \\ \dot{y} < 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

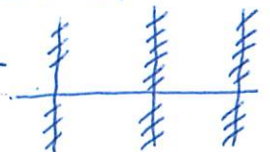


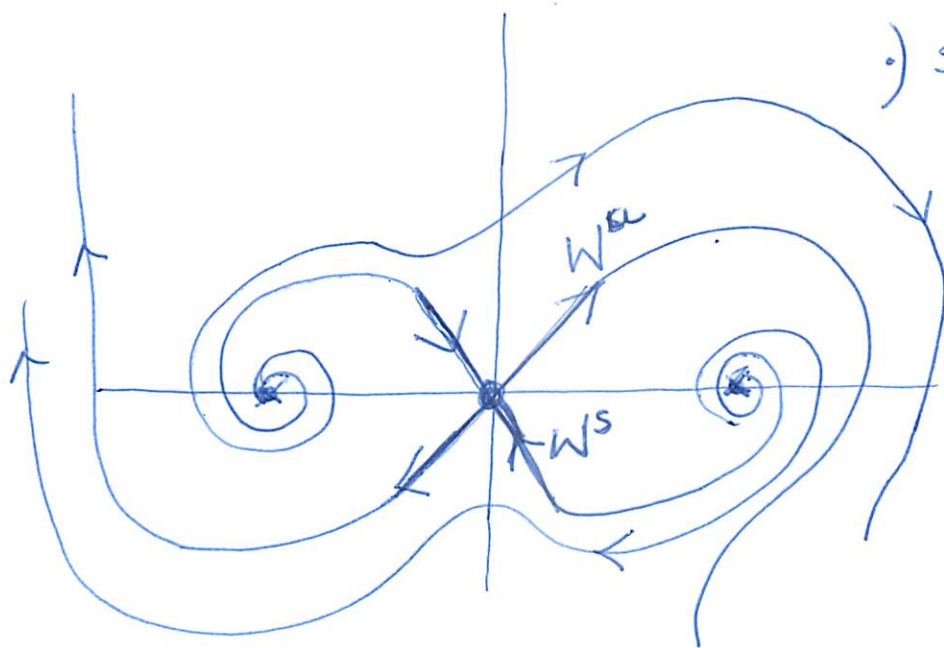
$$(I.H) \quad \dot{y}=0 \equiv y = x - x^3 \quad \text{y sobre esta curva } \dot{x} = y \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} > 0 & y > 0 \\ \dot{x} < 0 & y < 0 \end{cases}$$



$$\text{Pendientes} = \frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3 + y}{y}$$

Sobre $x=0$ y $x=\pm 1$ la pendiente es 1





) SIMÉTRICO al cambio
 $(x, y, t) \leftrightarrow (-x, -y, t)$.

) No hay rectas invariantes

Ejemplo 3:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{x}{2} - y) \\ \dot{y} = y(x - 1 - \frac{y}{2}) \end{cases}$$

Equilibrios. $(0,0), (2,0), (0,-2), (\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \rightarrow u_1(1,0) \rightarrow E^u = \langle (1,0) \rangle \text{ (Silla)} \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow u_2(0,1) \rightarrow E^s = \langle (0,1) \rangle \end{array}$$

$$J_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \rightarrow u_1(-1,1) \rightarrow E^u = \langle (-1,1) \rangle \text{ (Silla)} \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow u_2(1,0) \rightarrow E^s = \langle (1,0) \rangle \end{array}$$

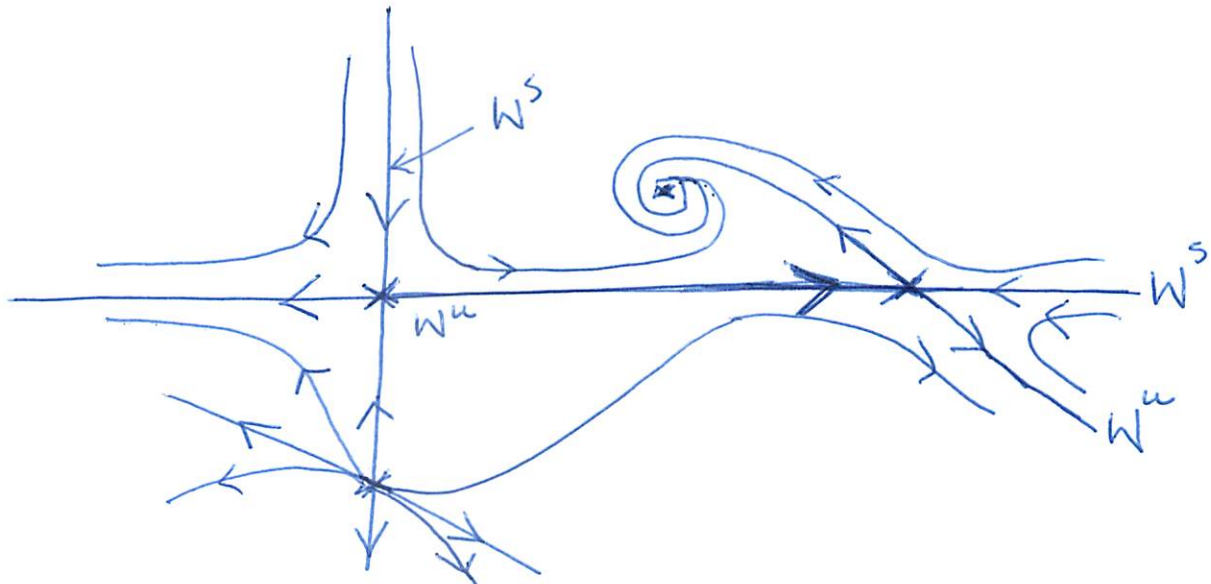
$$J_{(0,-2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \rightarrow u_1(1,-1) \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow u_2(0,1) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}} \right\} E^u \text{ (Nodo inestable)}$$

$$J_{(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{2}{5} \pm \frac{\sqrt{11}}{5}i \quad \text{(foco estable)}$$

(I.V.) $\dot{x} = 0 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1-\frac{x}{2} \end{cases}$ ~~además~~ (I.H.) $\dot{y} = 0 \equiv \begin{cases} y=0 \\ y=2x-2 \end{cases}$

La dirección del flujo sobre las isoclinas se obtiene considerando \dot{y} , \dot{x} sobre estas curvas.

Las rectas $x=0$, $y=0$ son invariantes
 No hay simetría a ningún cambio de signo.



En este caso $W^s \equiv E^s(2,0) \equiv \text{eje } x \equiv \{y=0\}$
 Más concretamente $W^s(2,0) = \{(x,0) : x > 0\}$

$W^u(0,0) \equiv E^u(0,0) = \{(x,0) : x < 2\}$
 $W^s(0,0) \equiv E^s(0,0) = \{(0,y) : y > -2\}$.

Ejemplo 4:

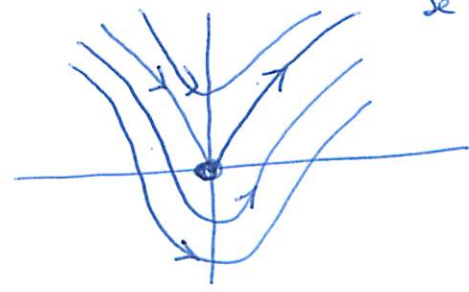
$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Equilibrio $(0,0) \rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

(No se puede aplicar Hartman-Grobman)

EQUILIBRIO NO HIPERBÓLICO.

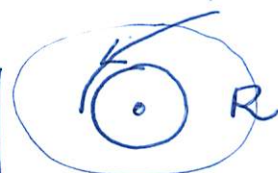
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} \rightarrow y^2 dy = x dx$ (Ec. de variables separables)
 se conoce la sol. general.



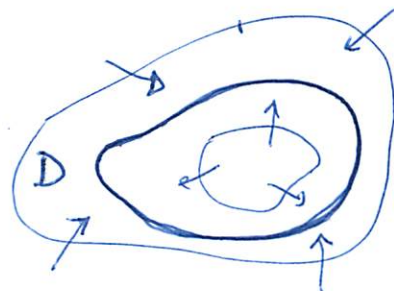
Teorema de Poincaré-Bendixson

Supongamos que $\gamma^+(x_0, y_0)$ está contenida en una región cerrada y acotada que sólo tiene un número finito de equilibrios de (1). Entonces $\Lambda^+(x_0, y_0)$ es o bien:

- 1) Un punto de equilibrio.
- 2) Una ~~órbita~~ órbita cerrada (o periódica)
- 3) Un gráfico (Punto de equilibrio unidos por órbitas heteroclinas)
(Ejemplo el péndulo)



Corolario Sea D un conjunto cerrado y acotado que no contiene puntos críticos y positivamente invariante. Entonces existe un ciclo límite contenido en D



Ejemplo: Considerando el flujo en el rectángulo de vértices $(-1, 2), (1, 2), (1, -2)$ y $(-1, -2)$. Probar que el sistema tiene al menos un ciclo límite.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 8x^3 \\ \dot{y} = 2y - 4x - 2y^3 \end{cases}$$

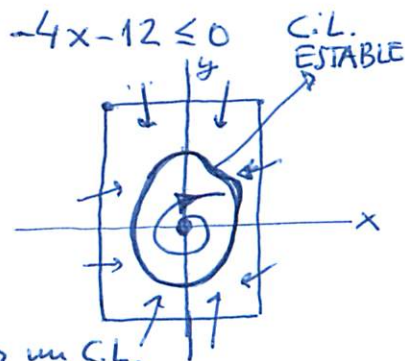
Equilibrios $\rightarrow (0, 0)$ es foco inestable

lados del rectángulo: $\circ) y=2, |x| \leq 1 \Rightarrow \dot{y} = -4x - 12 \leq 0$

$\bullet) y=-2, |x| \leq 1 \Rightarrow \dot{y} = -4x + 12 \geq 0$

$\bullet) x=1, |y| \leq 2 \Rightarrow \dot{x} = y - 8 < 0$

$\bullet) x=-1, |y| \leq 2 \Rightarrow \dot{x} = y + 8 > 0$



Por corolario de Poincaré-Bendixson tiene al menos un C.L.

Criterio de Dulac : Sea D una región anular contenida en \mathbb{U} ; $P, Q \in C^1(\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $X = (P, Q)^t$

Si

$$\nabla \cdot (\psi X) = \text{div}(\psi X) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi Q)$$

no cambia de signo en D , entonces hay a lo más un ciclo límite enteramente contenido en D .

Ejemplo: Usar criterio de Dulac para probar que el sistema $\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2) \end{cases}$ tiene un único ciclo límite en una región anular.

Pasando a polares queda:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - 2r^2 - r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Sobre $r = \frac{1}{2}$ (Circunferencia de radio $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \underbrace{\sin^2 \theta}_{\leq 1} \right) > 0$

$r = 1$ (Circunferencia de radio 1) $\Rightarrow \dot{r} = 1(-1 - \sin^2 \theta) < 0$

$r \geq 1 \Rightarrow \dot{r} < 0$

$0 < r \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \dot{r} \geq 0$

Por corolario de Poincaré-Bendixson, en la región anular.

$D = \{(r, \theta) : \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$ el sistema tiene al menos un ciclo límite. (Hay un sólo equilibrio en $(0,0)$)

Por otro lado $\text{div}(X) = 2(1 - 4r^2 - 2r^2 \sin^2 \theta) \leq 0$

para $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, entonces por Criterio de Dulac tiene un sólo ciclo límite en D el sistema de ec. dif. dado.

NO EXISTENCIA DE CICLOS LÍMITES

Criterio de Bendixson - Dulac

Sea el sistema (1) y supongamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo (No tiene agujeros) y que

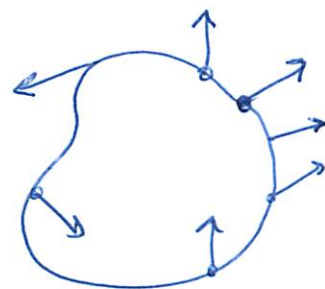
$$\nabla \cdot (\psi X) = \operatorname{div}(\psi X) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi Q) \neq 0$$

en D . Entonces no hay ciclos límites de (1) contenidos en D .

Definición. Sea una curva de Jordan C (Curva cerrada simple). Supongamos que hay un compás con una de sus puntas recorriendo la curva C en sentido contrario al de las agujas del reloj, y la otra punta en el extremo del campo vectorial (1) X . Cuando se retorna al punto de inicio el ángulo recorrido por el compás es $k(2\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Se define índice de una curva C respecto del campo X :

$$i_X(C) = k.$$



La definición anterior puede ser extendida a puntos de equilibrios, tomando ~~en~~ curvas cerradas que rodean sólo al equilibrio en estudio. Así se demuestra que el índice de un nodo, foco o centro es $+1$ y el índice de un silla es -1 .

Teorema 1 La suma de los índices de los puntos de equilibrios contenidos dentro de un ciclo límite es +1.

Teorema 2 Un ciclo límite contiene al menos un punto de equilibrio en su interior.

Ejemplo. Probar que ninguno de los siguientes sistemas tiene ciclos límites.

a)
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + y^2 + e^x y \\ \dot{y} = xy + \cos^2 y \end{cases}$$

No tiene equilibrios, entonces por teorema 2 no tiene ciclos límites.

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = y + x^2 + yx^3 \end{cases}$$

El origen (0,0) es el único equilibrio y es un silla y su índice es -1, por teorema 1, no hay ciclos límites.

c)
$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = x + y + y^3 \end{cases}$$

$\text{div}(X) = 3x^2 + 3y^2 + 1 \neq 0$, por Bendixson-Dulac, no hay ciclos límites

d)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - xy^3 \end{cases} \cdot \text{div}(X) = -3x^2 y = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \rightarrow \dot{x} = -2y^4 \leq 0 \\ y=0 \rightarrow \dot{y} = x^2 \geq 0 \end{matrix}$$

Por tanto de existir ciclo límite debe estar en alguno de los cuatro cuadrantes, por Bendixson-Dulac, no hay ciclos límites.

e)
$$\begin{cases} \dot{x} = x(2-y-x) \\ \dot{y} = y(4x-x^2-3) \end{cases} \text{ usar } \Psi(x,y) = \frac{1}{xy}$$

Los ejes son invariantes. $x=0$ e $y=0$.

$\text{div}(\Psi X) = -\frac{1}{y}$ que no cambia de signo en ningún cuadrante, por B-D, no hay ciclos límites

SISTEMAS HAMILTONIANOS

Definición: Un sistema de E.D. en \mathbb{R}^2 es un Hamiltoniano si se puede expresar en la forma:

$$(1) \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

donde $H \in C^2(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, U abierto de \mathbb{R}^2 .

El sistema (1) se dice conservativo, no hay disipación. En aplicaciones, $H(x,y) = K(x,y) + V(x,y)$, donde K es la energía cinética y V es la energía potencial.

Teorema (Conservación de la energía)

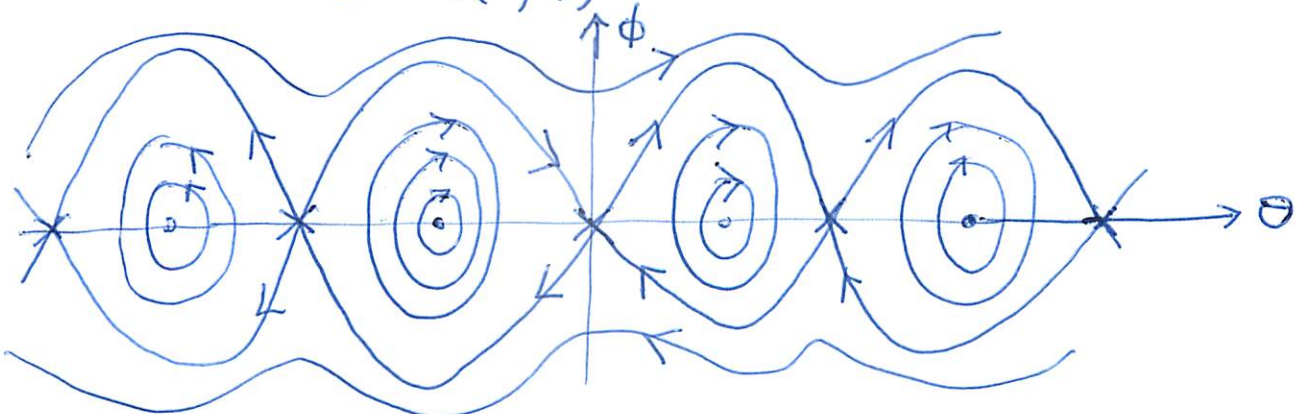
La energía total $H(x,y)$ es una integral primera de (1) (Una constante del movimiento)

Ejemplo (Péndulo no lineal)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad \equiv \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \phi \\ \dot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin\theta \end{cases}$$

$$H(\theta, \phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\theta \quad (\text{Cinética} + \text{Potencial})$$

$$\text{Sol} \equiv H(\theta, \phi) = \text{cte}$$



Definición Un punto crítico del sistema (punto de equilibrio)

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^2$$

cuya matriz Jacobiana no tiene autovalores nulos es llamado no-degenerado. En caso contrario se llama degenerado.

Teorema: Un punto crítico ~~no~~ degenerado de un sistema Hamiltoniano es un SILLA o un CENTRO.

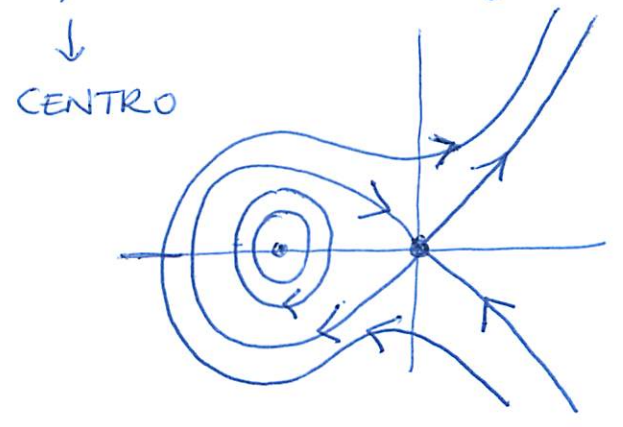
Ejemplos: Encontrar el Hamiltoniano y calcular retrato de fases de los sistemas:

$$a) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases} \quad H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

Las curvas solución son: $H(x,y) = C \in \mathbb{R}$

Equilibrios: $(0,0)$, $(-1,0)$ ambos no-degenerados

SILLA
 $\bar{u}_1(1,-1)$, $\bar{u}_2(1,1)$



SIMÉTRICO:
 $(x,y,t) \leftrightarrow (x,-y,-t)$

$$b) \begin{cases} \dot{x} = y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x - 2xy \end{cases} \quad H(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2y - \frac{y^3}{3}$$

Soluciones: $H(x,y) = C$

Equilibrios: $(0,0)$, $(0,1)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

no-degen. CENTRO SILLAS

$\bar{u}_1(1,\sqrt{3})$ $\bar{u}_1(1,-\sqrt{3})$ $\bar{u}_1(1,0)$

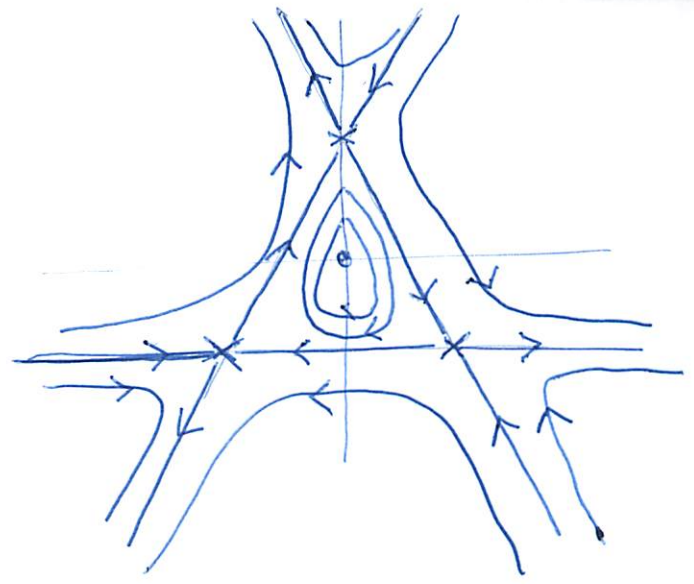
$\bar{u}_2(1,-\sqrt{3})$ $\bar{u}_2(1,0)$ $\bar{u}_2(1,\sqrt{3})$

Lineas invariantes:

$$y = -1/2$$

$$y = -\sqrt{3}x + 1$$

$$y = \sqrt{3}x + 1$$



FUNCIONES DE LYAPUNOV

Definición: Un punto crítico x_0 del sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice ESTABLE si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall t \geq 0$ se tiene $\|\Phi(t; x) - \underbrace{\Phi(t; x_0)}_{x_0}\| < \epsilon$ siempre que $\|x - x_0\| < \delta$

($\Phi(t; x)$ es el flujo (solución) de $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x \end{cases}$)

Definición: Un punto crítico x_0 de $\dot{x} = f(x)$ se dice ASINTÓTICAMENTE ESTABLE si es ESTABLE y existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t; x) - x_0\| = 0.$$

Teorema (Lyapunov)

Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo un punto crítico x_0 . Supongamos que $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y que existe una función $V \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \in U \setminus \{x_0\}$. Entonces.

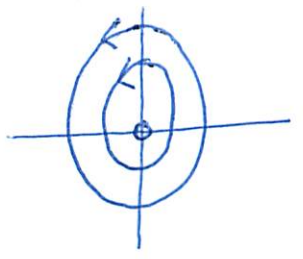
- 1) Si $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in U$, x_0 es stable.
- 2) Si $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in U \setminus \{x_0\}$, x_0 es asintót. stable.
- 3) Si $\dot{V}(x) > 0 \forall x \in U \setminus \{x_0\}$, x_0 es inestable.

donde $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$.

Una función V cumpliendo las hipótesis del teorema se llama función de Lyapunov.

Ejemplo: Determinar la estabilidad del origen para los sistemas:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -y^3 \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$ $(0,0)$ equilibrio degenerado



Tomando $V(x,y) = x^4 + y^4$, se tiene

$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = 0 \Rightarrow V$ es una integral primera

y las curvas soluciones son $V(x,y) = C$. El origen es CENTRO (ESTABLE)

2) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y(1-x^2) \end{cases}$ Usar: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\frac{dV}{dt} = 2y^2(x^2 - 1) \Rightarrow \dot{V} \leq 0$ si $|x| \leq 1$.

$\dot{V} = 0$ si $y = 0$ ó $x = \pm 1$.

sobre $y=0$ se tiene $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$, entonces cuando $x \neq 0$

la trayectoria pasa por $y=0$ y sale de la línea $y=0$.

Por consecuencia las trayectorias que comienzan dentro del círculo unidad se aproximan al origen asintóticamente

El origen es ASINT. ESTABLE

3) $\begin{cases} \dot{x} = -8x - xy^2 - 3y^3 \\ \dot{y} = 2x^2y + 2xy^2 \end{cases}$ $V(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

$\dot{V} = 8x^2(y^2 - 4) \Rightarrow \begin{cases} \dot{V} \leq 0 & \text{si } |y| \leq 2 \\ \dot{V} = 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = \pm 2 \end{cases}$

Sobre $x=0$; $\dot{x} = -3y^2$, $\dot{y} = 0$ (la trayectoria sale de la recta $x=0$)

El origen es ASINT. ESTABLE con dominio de estabilidad

$V(x,y) = 2x^2 + 3y^2 < 12$.

SISTEMAS GRADIENTES

Definición: Un sistema de E.D. se llama un sistema gradiente si existe una función $G \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que

$$(1) \quad \begin{matrix} \dot{x} = \nabla G(x) \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} \equiv \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial G}{\partial x} \\ \dot{y} = \frac{\partial G}{\partial y} \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dG}{dt} = \nabla G(x) \cdot f(x) = \nabla G(x) \cdot \nabla G(x) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \geq 0$$

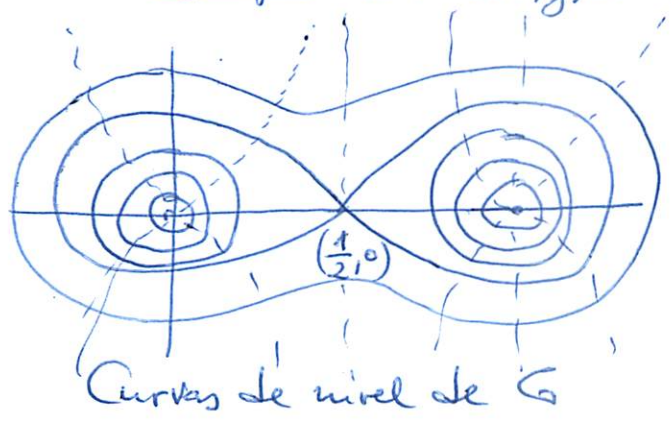
por tanto, el valor de G crece a lo largo de toda órbita excepto en puntos críticos de G . La función $-G$ disminuye a lo largo de las órbitas.

Teorema: Un sistema gradiente (1) no puede tener una órbita periódica no-degenerada.

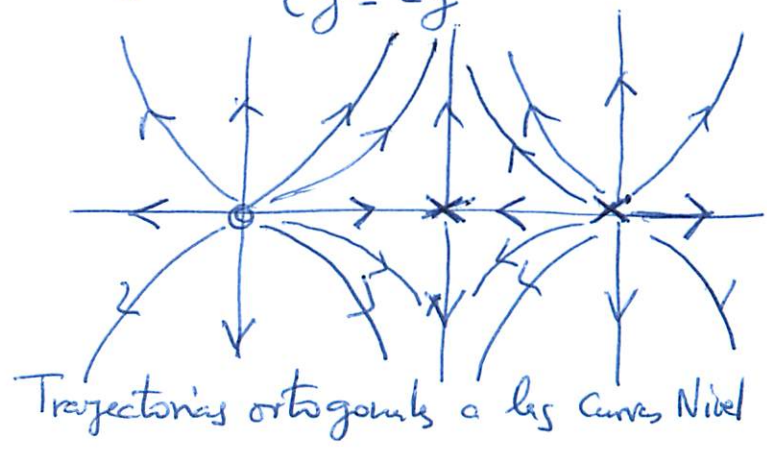
Teorema: Un sistema gradiente (1) no puede tener focos ni centros no-degenerados.

Teorema: Los puntos de equilibrios de (1) son puntos críticos de G . Además, si G tiene un máximo en dicho punto, el equilibrio es asintóticamente estable. Si tiene un mínimo es inestable y si tiene un punto de silla G , el equilibrio es un silla.

Ejemplo: Sea $G(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2 \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$



Curvas de nivel de G



Trajectorias ortogonales a las Curvas Nivel