TEMA II: ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

En este capítulo veremos los métodos matemáticos que se disponen para las operaciones relacionadas con los circuitos digitales, así como las funciones más básicas de la aritmética binaria.

1. Definición de Álgebra de Boole. Postulados.

Se define como **álgebra de Boole** a un sistema matemático con un conjunto de elementos B y dos operaciones binarias cerradas (·) y (+) siempre y cuando se cumplan los siguientes postulados:

- P1.- las operaciones tienen la propiedad conmutativa.

$$a+b = b+a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- P2.- las operaciones son distributivas entre sí

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$$

- P3.- las operaciones tienen elementos identidad diferentes dentro de B. Estos elementos son definidos como 0 para (+) y 1 para (·).

$$a+0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

- P4.- para cada elemento, a, del conjunto B, existe otro elemento denominado complemento, $\overline{a}$ también del conjunto B, tal que se cumple:

$$a+\overline{a} = 1$$

$$a \cdot \overline{a} = 0$$

Como podemos ver, en cualquier álgebra booleana se cumple el **principio de dualidad**:

`Cualquier teorema o identidad algebraica deducible de los postulados anteriores puede transformarse en un segundo teorema o identidad válida sin mas que intercambiar las operaciones binarias y los elementos identidad.`

Como en cualquier álgebra, podemos disponer de constantes y de variables. Así,

`una constante se define como cualquier elemento del conjunto B.`

`Mientras que una variable es un símbolo que representa un elemento arbitrario del álgebra, ya sea una constante o una fórmula algebraica completa.`

2. Teoremas del Álgebra de Boole.

En cualquier álgebra de Boole se pueden demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.- El elemento $\overline{a}$ del 4º postulado (denominado complemento o negación de a) está unívocamente determinado, es decir, es único.
Demostración.- Supongamos que existen dos complementos de a: $\overline{a}_1$ y $\overline{a}_2$.

$$\overline{a}_2 = \overline{a}_2 \cdot 1 = \overline{a}_2 \cdot (a + \overline{a}_1) = \overline{a}_2 \cdot a + \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_1 = a \cdot \overline{a}_1 + \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_1 = (a + \overline{a}_2) \cdot \overline{a}_1 = \overline{a}_1$$

Teorema 2.2.- (o Teorema de elementos nulos) Para cada cualquier elemento a, se verifica

$$a+1 = 1 \text{ y } a \cdot 0 = 0$$

Demostración.-

$$a+1 = 1 \cdot (a+1) = (a+a') \cdot (a+1) = a + a' \cdot 1 = a + a' = 1$$
$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot a' = a \cdot (a' + 0) = a \cdot a' = 0$$

Teorema 2.3.- Cada uno de los elementos identidad es el complemento del otro, es decir, 1’ = 0 y 0’ = 1
Demostración.- Si fuese cierto, deberían cumplir el cuarto postulado del álgebra:

$$1 = 0 + 0'$$
$$0 = 0 \cdot 0'$$

Por ser único l complemento: 0’ = 1

$$1 = 1 + 1'$$
$$0 = 1 \cdot 1'$$

Por ser único el complemento: 1’ = 0

Teorema 2.4.- (o Teorema de idempotencia) Para cada elemento a, se verifica:

$$a + a = a$$
$$a \cdot a = a$$

Demostración.-

$$a + a = a + a \cdot 1 = a + a \cdot (a + a') = a + a \cdot a + a \cdot a' = a \cdot (1 + a) = a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot a = a \cdot a + 0 = a \cdot a + a \cdot a' = a \cdot (a + a') = a \cdot 1 = a$$

Teorema 2.5.- (o Teorema de involución) Para cada elemento de a, se verifica que el complemento del complemento de a es a, es decir, (a’)’ = a
Demostración.-

$$a' + (a')' = 1 = a + a' = a' + a \rightarrow a = (a')'$$
$$a' \cdot (a')' = 0 = a \cdot a' = a' \cdot a \rightarrow a = (a')'$$

Teorema 2.6.- (o Teorema de absorción) Para cada par de elementos, a y b, se verifica:

$$a + a \cdot b = a$$
$$a \cdot (a + b) = a$$

Demostración.-

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b) = a + 0 \cdot b = a$$

Teorema 2.7.- Para cada par de elementos, a y b, se verifica:

$$a + a' \cdot b = a + b$$
$$a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

Demostración.-

$$a + a' \cdot b = (a + a') \cdot (a + b) = 1 \cdot (a + b) = a + b$$
$$a \cdot (a' + b) = a \cdot a' + a \cdot b = a \cdot b$$

Teorema 2.8.- (o Leyes de DeMorgan) Para cada par de elementos, a y b, se verifica

$$(a + b)' = a' \cdot b'$$
$$(a \cdot b)' = a' + b'$$

Demostración.- Se comprobará si se satisface el cuarto postulado

$$a + b + (a + b)' = a + b + a' \cdot b' = a + a' \cdot b' + b + b' \cdot a' =$$
$$= a + b' + b + a' = a + a' + b + b' = 1 + 1 = 1$$

$$(a + b) \cdot (a' \cdot b') = a \cdot a' \cdot b' + b \cdot b' \cdot a' = b' \cdot 0 + 0 \cdot a' = 0 + 0 = 0$$

$$a \cdot b + (a \cdot b)' = a \cdot b + a' + b' = a \cdot b + a' + a \cdot b + b' =$$
$$= a + a' + b + b' = 1 + 1 = 1$$
$$a \cdot b \cdot (a' + b') = a \cdot a' \cdot b + a \cdot b \cdot b' = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

Teorema 2.9.- (o Leyes de DeMorgan generalizadas) Para cualquier conjunto de elementos se verifica:

$$\overline{(X_0 + X_1 + \dots + X_n)} = \overline{X_0} \cdot \overline{X_1} \cdot \dots \cdot \overline{X_n}$$
$$\overline{(X_0 \cdot X_1 \cdot \dots \cdot X_n)} = \overline{X_0} + \overline{X_1} + \dots + \overline{X_n}$$

Teorema 2.10.- (o Teorema de asociatividad) Cada uno de los operadores binarios (+) y (·) cumple la propiedad asociativa, es decir, para cada tres elementos, a, b y c, se verifica

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Álgebra de Conmutación.

Hasta ahora no hemos puesto ninguna restricción al conjunto de elementos ni a los operadores binarios (salvo los postulados que deberían cumplir). Si particularizamos para el caso de los circuitos digitales, restringimos el conjunto de elementos a los dos dígitos binarios {0,1} y las operaciones binarias son las siguientes:

A	B	+	·	Negación
0	0	0	0	$\overline{0} = 1$
0	1	1	0	
1	0	1	0	$\overline{1} = 0$
1	1	1	1	

Tabla 2.1. Operaciones del álgebra de conmutación.

Se verifica que un álgebra definida de la forma mostrada en la tabla 2.1 se trata de un álgebra de Boole. La demostración de esta afirmación se realiza mediante la verificación de los cuatro postulados:

- P1.- Se comprueba por simple inspección de la definición de las operaciones.
- P2.- Se puede comprobar evaluando todas las combinaciones posibles.

A	B	C	A·(B+C)	A·B + A·C	A + B·C	(A + B)·(A+C)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Tabla 2.2. Demostración de la propiedad distributiva.

- P3.- Por inspección de los operadores se puede verificar.

A	B	A·B	A+B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabla 2.3. Demostración de los elementos neutros.

- P4.- Por definición del operador complemento.

Un álgebra así definida se denomina álgebra de conmutación. Los operadores de esta álgebra reciben los siguientes nombres:

- operador + —> operador OR
- operador · —> operador AND
- operador ‘ —> operador NOT

y los circuitos electrónicos que realizan estas operaciones se denominan puertas (OR, AND y NOT o inversor). Estas puertas tienen unos símbolos especiales, los cuales son mostrados en la figura 2.1. Éstos son los símbolos tradicionales; y aunque existe una simbología internacional también mostrada, usaremos preferentemente estos símbolos:

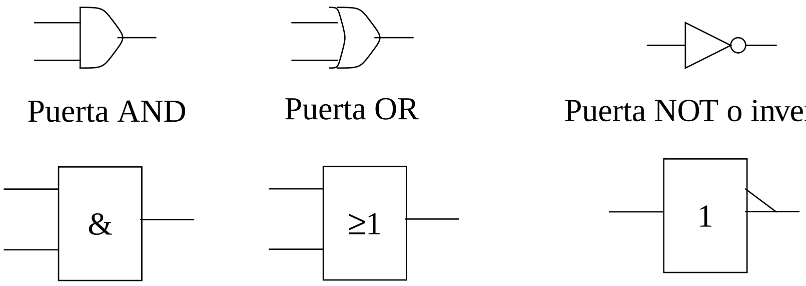

Figura 2.1.- Símbolos tradicionales e internacionales de las puertas lógicas más básicas.

4. Funciones y Fórmulas de Computación.

En primer lugar vamos a definir las relaciones existentes entre los elementos del álgebra, es decir, lo que se entiende por una función.

Se define una función completa de un conjunto S en otro T como un subconjunto de SxT de forma que para cualquier elemento s que pertenezca a S, exista un solo elemento t de T, llamado valor de la función para s.

Una función completa también es denominada funciones completamente especificadas o función de conmutación. Una forma de representación de las funciones de conmutación es la llamada **tabla de combinaciones o tabla de verdad**. Está formada por n+1 columnas: n columnas para las variables de entrada y una para el valor de la función; y 2^n filas (de todas las combinaciones posibles de las n entradas). Un ejemplo de tabla de combinaciones, para una función de tres variables, sería la mostrada en la tabla 2.4:

X_2	X_1	X_0	$F(X_2, X_1, X_0)$
0	0	0	F(0, 0, 0)
0	0	1	F(0, 0, 1)
0	1	0	F(0, 1, 0)
0	1	1	F(0, 1, 1)
1	0	0	F(1, 0, 0)
1	0	1	F(1, 0, 1)
1	1	0	F(1, 1, 0)
1	1	1	F(1, 1, 1)

Tabla 2.4. Ejemplo de tabla de verdad de una función lógica

Las funciones de conmutación se pueden expresar mediante fórmulas o expresiones de conmutación. Una fórmula o expresión de conmutación de n variables se define recursivamente como:

- Las constantes 1 y 0 son fórmulas de conmutación
- La variables x_i es una fórmula si se encuentra restringida al conjunto {0,1}
- Si A es una fórmula, entonces $\overline{A}$ también lo es

- Si A y B son fórmulas de conmutación, entonces el resultado de cualquier operación binaria de ellas también lo es. Es decir, A+B y A·B también son fórmulas de conmutación
- Nada más es una fórmula de conmutación, a menos que se sigan los anteriores puntos en un número finito

Así, encontramos que son fórmulas de conmutación:

$$x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4$$
$$x_1 \cdot (x_2' + x_3)$$
$$(x_1' + x_2) \cdot (x_3 + x_4)$$

Mientras que los siguientes ejemplos no son fórmulas de conmutación:

$$x_1 \cdot + x_3 \cdot x_4$$
$$x_1 \cdot (x_2 +' x_3)$$

Como todos los postulados y teoremas del álgebra de conmutación fueron formulados mediante variables (las cuales pueden ser tanto constantes como expresiones completas), éstos pueden ser aplicados a cualquier función o fórmula de conmutación.

Teorema 2.11.- Cada fórmula de conmutación describe una única función de conmutación.
Demostración.- De cada fórmula podemos obtener una tabla de combinaciones que es única, evaluando la fórmula para todas las combinaciones posibles de las variables de entradas. Como una función es biunívocamente representada por una tabla de combinaciones, si la última es única, la primera también lo será.

Se dice que dos fórmulas de conmutación son equivalentes (A = B) si describen la misma función de conmutación. Por ejemplo, si consideramos la función mostrada en la tabla 2.5, las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$F(X_1, X_2) = X_2$$
$$F(X_1, X_2) = X_1'X_2 + X_1X_2$$
$$F(X_1, X_2) = (X_1+X_2)(X_1'+X_2)$$

X_1	X_2	$F(X_1, X_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabla 2.5. Ejemplo de función lógica.

Como se puede ver, pueden existir muchas fórmulas de conmutación que describan a la misma función de conmutación.

Dentro de las fórmulas de conmutación, hay algunas que son de especial interés, las cuales se definen a continuación:

`Se denomina término producto a la operación AND de un número dado de literales (variables o constantes).`

Se denomina término suma a la operación OR de un número dado de literales (variables o constantes).

Se define fórmula normal disyuntiva a la expresión de la función como suma de términos productos, o se dice que se encuentra expresada en forma normal disyuntiva.

Se define fórmula normal conjuntiva a la expresión de la función como producto de términos suma, o se dice que se encuentra expresada en forma normal conjuntiva.

Por ejemplo:

- Fórmula normal disyuntiva —> $F(X_0, X_1, X_2) = X_1'\cdot X_2 + X_1\cdot X_2$
- Fórmula normal conjuntiva —> $F(X_0, X_1, X_2) = (X_1' + X_2)\cdot(X_1 + X_2)$

Se define mintérmino al término producto en el que aparecen todas las variables una y una sola vez, ya sea complementada o sin complementar; por lo tanto, un mintérmino es un caso especial de término producto.

Por ejemplo, X1'·X2 es un mintérmino denominado m_1.

A la fórmula normal disyuntiva en el que todos los términos productos que aparecen son mintérminos, se le denomina fórmula canónica disyuntiva.

Se verifican los siguientes teoremas:

Teorema 2.12.- Dada la lista completa de mintérminos de n variables, asignando arbitrariamente 1's y 0's a cada variable, se verifica que un único mintérmino tomará el valor 1.

Demostración.- Para que dos o más mintérminos tomasen el valor 1 con una sola combinación de las variables de entrada, se debe cumplir que dichos mintérminos no se vean influidos por alguna variable, que se traduce en la inexistencia de dicha variable en el mintérmino. Pero dicha afirmación, contradice la definición de mintérmino en la deben aparecer todas las variables de la función.

Teorema 2.13.- La fórmula compuesta por los 2^n mintérminos será idénticamente 1.

Demostración.- Del teorema anterior, vemos que una determinada combinación de 1's y 0's en las variables de entrada, provoca que un mintérmino tome el valor 1. Por lo tanto si sumamos todos los mintérminos posibles, siempre habrá algún mintérmino que tome el valor 1, que al sumarlo con los restantes 0's, dará a la función el valor 1.

Teorema 2.14.- Cada función puede expresarse como suma de mintérminos.

Demostración.- Cualquier función se puede expresar como suma de términos productos, al evaluar los paréntesis de una fórmula equivalente. Una vez que tengamos una fórmula equivalente a la original escrita como suma de términos productos, pasamos a incluir en todos los términos, todas las variables de la función. Para ello, haremos uso del elemento identidad y el cuarto postulado (a+a'=1, en particular), sustituiremos los 1's necesarios de los términos productos por expresiones del tipo (a+a') de las variables que no aparecen. De nuevo se evalúan los paréntesis y obtendremos finalmente la fórmula canónica disyuntiva.

Supongamos que tenemos la fórmula disyuntiva $F(x,y,z) = x\cdot y + z'$

Para pasar a fórmula canónica debería multiplicar por las variables que faltan en cada término producto, es decir,

$F(x,y,z) = x\cdot y\cdot (z+z') + (x+x')\cdot (y+y')\cdot z' =$

$= x\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot z' \cancel{+ x\cdot y\cdot z'} + x\cdot y'\cdot z' + x'\cdot y\cdot z' + x'\cdot y'\cdot z'$

Teorema 2.15.- La fórmula canónica disyuntiva o de mintérminos es única.

Demostración.- Como una combinación de las variables hará que un solo mintérmino tome el valor 1, para obtener una fórmula equivalente de mintérminos, éste no puede ser sustituido. Repitiendo este razonamiento en todos los mintérminos que aparecen en la fórmula, vemos que ninguno es sustituible. Tampoco se puede añadir más mintérminos ya que éstos harán que la función tome el valor 1 en un caso erróneo. Y por último, tampoco se puede eliminar ningún mintérmino ya que para la combinación que se haría 1, la función ya no tendría el valor correcto. Por lo tanto, no se pueden añadir, eliminar o sustituir mintérminos, por lo que la fórmula queda inalterable.

Teorema 2.16.- (o Primer teorema de expansión) Para una función de conmutación, se cumple que $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = x_1\cdot f(1, x_2,\ldots, x_n) + x_1' \cdot f(0, x_2,\ldots, x_n)$

Demostración.- Usando los postulados y teoremas del álgebra de Boole podemos representar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\cdot A + x_1' \cdot B$. Por lo que:

$$\text{Si } x_1 = 1,\ f(1, x_2,\ldots, x_n) = A$$
$$\text{Si } x_1 = 0,\ f(0, x_2,\ldots, x_n) = B$$

Teorema 2.17.- Cada función completa puede escribirse como:

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \sum f(i) \cdot m_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

donde i es el número decimal que hace que dicho mintérmino tenga el valor 1. Por ejemplo

$$m_0 = x_1' \cdot x_2' \cdot \ldots \cdot x_n'$$
$$m_1 = x_1' \cdot x_2' \cdot \ldots \cdot x_n$$
$$m_{2^n-1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Es decir, el número del mintérmino es igual al número decimal que coincide con la combinación de señales de entrada que le da el valor “1” a dicho mintérmino.

Demostración.- Se aplica sucesivamente el teorema de expansión. Vamos a particularizar a una función de tres variables (aunque el desarrollo sería perfectamente válido para cualquier número de entradas).

$$\begin{gathered} F(x,y,z) = x\cdot F(1,y,z) + x'\cdot F(0,y,z) = x\cdot (y\cdot F(1,1,z)+y'\cdot F(1,0,z)) + x'\cdot (y\cdot F(0,1,z)+y'\cdot F(0,0,z)) = \\ x\cdot \{y\cdot (z\cdot F(1,1,1)+z'\cdot F(1,1,0))+y'\cdot (z\cdot F(1,0,1)+z'\cdot F(1,0,0))\} + \\ x'\cdot \{y\cdot (z\cdot F(0,1,1)+z'\cdot F(0,1,0))+y'\cdot (z\cdot F(0,0,1)+z'\cdot F(0,0,0))\} = \\ x\cdot y\cdot z\cdot F(1,1,1)+x\cdot y\cdot z'\cdot F(1,1,0)+x\cdot y'\cdot z\cdot F(1,0,1)+x\cdot y'\cdot z'\cdot F(1,0,0) + \\ x'\cdot y\cdot z\cdot F(0,1,1)+x'\cdot y\cdot z'\cdot F(0,1,0)+x'\cdot y'\cdot z\cdot F(0,0,1)+x'\cdot y'\cdot z'\cdot F(0,0,0) \end{gathered}$$

Por lo tanto, en una fórmula de mintérminos sólo aparecerán aquellos que tomen el valor 1 para alguna combinación de las variables de entrada, ya que el producto por 0 anulará dicho mintérmino. Por ejemplo, la tabla 2.6 de combinaciones tendrá la siguiente fórmula de mintérminos.

X_0	X_1	X_2	$F(X_0,X_1,X_2)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(X_0,X_1,X_2) = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7 = \sum m(1,2,3,5,7)$$

Tabla 2.6. Ejemplo de una fórmula expresada como suma de mintérminos.

Por la aplicación directa del principio de dualidad,

`se define maxtérmino como el término suma en el que aparecen una y una sola vez todas las variables de la función, ya sean complementadas o sin complementar; por lo tanto, un maxtérmino es un caso especial de término suma.`

Por ejemplo, $X_1'+X_2$ es un maxtérmino denominado M_1.

`A la fórmula normal conjuntiva escrita mediante maxtérminos se le denomina fórmula canónica conjuntiva o fórmula de maxtérminos.`

Se verifican los siguientes teoremas:

Teorema 2.18.- Dada la lista completa de maxtérminos de n variables, asignando arbitrariamente 1's y 0's a cada variable, se verifica que un único maxtérmino tomará el valor 0.

Demostración.- Para que dos o más maxtérminos tomasen el valor 0 con una sola combinación de las variables de entrada, se debe cumplir que dichos maxtérminos no se vean influidos por alguna variable, que se traduce en la inexistencia de dicha variable en el maxtérmino. Pero dicha afirmación, contradice la definición de maxtérmino en la deben aparecer todas las variables de la función.

Teorema 2.19.- La fórmula compuesta por los 2^n maxtérminos será idénticamente 0.

Demostración.- Del teorema anterior, vemos que una determinada combinación de 1's y 0's en las variables de entrada, provoca que un maxtérmino tome el valor 0. Por lo tanto si sumamos todos los mintérminos posibles, siempre habrá algún maxtérmino que tome el valor 0, que al multiplicarlo con los restantes 1's, dará a la función el valor 0.

Teorema 2.20.- Cada función puede expresarse como suma de maxtérminos.

Demostración.- Cualquier función se puede expresar como suma de términos suma, al evaluar los paréntesis de una fórmula equivalente. Una vez que tengamos una fórmula equivalente a la original escrita como suma de términos suma, pasamos a incluir en todos los términos, todas las variables de la función. Para ello, haremos uso del elemento identidad y el cuarto postulado ($a \cdot a'=0$, en particular), sustituiremos los 1's necesarios de los términos productos por expresiones del tipo (a·a’) de las variables que no aparecen. De nuevo se evalúan los paréntesis y obtendremos finalmente la fórmula canónica conjuntiva.

Si consideramos la fórmula disyuntiva F(x,y,z)=(x+y’)·z, para pasarla a su forma canónica actuamos con la adición de los términos

F(x,y,z) = (x+y’+z·z’)·(x·x’+y·y’+z) =

= (x+y’+z)·(x+y’+z’)·(x+y+z)~~(x+y’+z)~~·(x’+y+z)·(x’+y’+z)

Teorema 2.21.- La fórmula canónica conjuntiva o de maxtérminos es única.

Demostración.- Para obtener una fórmula equivalente de maxtérminos, un maxtérmino no puede ser sustituido, ya que el valor 0 de dicho maxtérmino no puede ser añadido con otro. Repitiendo este razonamiento en todos los maxtérminos que aparecen en la fórmula, vemos que ninguno puede ser sustituido. Tampoco se puede añadir más maxtérminos ya que éstos harán que la función tome el valor 0 en un caso erróneo. Y por último, tampoco se puede eliminar ningún maxtérmino ya que para la combinación que se haría 0, la función ya no tendría el valor correcto. Por lo tanto, no se pueden añadir, eliminar o sustituir maxtérminos, por lo que la fórmula queda inalterable.

Teorema 2.22.- (o Segundo teorema de expansión) Para una función de conmutación, se cumple que $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = [x_1+ f(0, x_2,\ldots, x_n)] \cdot [x_1' + f(1, x_2,\ldots, x_n)]$

Demostración.- Usando los postulados y teoremas del álgebra de Boole podemos representar $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = (x_1+ A) \cdot (x_1' + B)$. Por lo que:

$$\text{Si } x_1 = 0,\ f(0, x_2,\ldots, x_n) = A$$
$$\text{Si } x_1 = 1,\ f(1, x_2,\ldots, x_n) = B$$

Teorema 2.23.- Cada función completa puede escribirse como:

$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \prod i\ [f(i) + Mi(x_1, x_2,\ldots, x_n)]$

donde i es el número decimal que hace que dicho maxtérmino tenga el valor 0. Por ejemplo

$$M_0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$M_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n'$$
$$M_{2^n-1} = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$$

Es decir, el número del maxtérmino es igual al número decimal que coincide con la combinación de señales de entrada que le da el valor “0” a dicho maxtérmino.

Demostración.- Se aplica sucesivamente el teorema de expansión.Vamos a particularizar a una función de tres variables (aunque el desarrollo sería perfectamente válido para cualquier número de entradas).

$$F(x,y,z) = (x+F(0,y,z))\cdot(x'+F(1,y,z)) =$$
$$\{x + (y+F(0,0,z))\cdot(y'+F(0,1,z))\}\cdot\{x'+(y+F(1,0,z))\cdot(y'+F(1,1,z))\} =$$
$$\{x + (y+(z+F(0,0,0))\cdot(z'+F(0,0,1)))\cdot(y'+(z+F(0,1,0))\cdot(z'+F(0,1,1)))\} \cdot$$
$$\{x'+(y+(z+F(1,0,0))\cdot(z'+F(1,0,1)))\cdot(y'+(z+F(1,1,0))\cdot(z'+F(1,1,1)))\} =$$
$$(x+y+z+F(0,0,0))\cdot(x+y+z'+F(0,0,1))\cdot(x+y'+z+F(0,1,0))\cdot(x+y'+z'+F(0,1,1)) \cdot$$
$$(x'+y+z+F(1,0,0))\cdot(x'+y+z'+F(1,0,1))\cdot(x'+y'+z+F(1,1,0))\cdot(x'+y'+z'+F(1,1,1))$$

Por lo tanto, en una fórmula de maxtérminos sólo aparecerán aquellos que tomen el valor 0 para alguna combinación de las variables de entrada, ya que la suma de 1 a los términos sumas consigue su no influencia. Por ejemplo, la tabla 2.7 de combinaciones tendrá la siguiente fórmula de maxtérminos.

X_0	X_1	X_2	$F(X_0,X_1,X_2)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = M_0 \cdot M_4 \cdot M_6 = \prod M(0,4,6)$$

Tabla 2.7. Ejemplo de fórmula expresada como producto de maxtérminos.

El modo de transformar una fórmula de mintérminos en otra de maxtérminos se basa en la doble complementación ya que (f')' = f. En esta transformación se verifican los siguientes teoremas:

Teorema 2.24.- El complemento de una fórmula de mintérminos está formado por la suma de los mintérminos que no aparecen en la fórmula original.

Demostración.- Como ya hemos visto, en una fórmula de mintérminos únicamente aparecen aquellos que pueden tomar un valor de 1, mientras que los que toman siempre el valor 0 no aparecen. No obstante, como la complementación consiste en intercambiar 1's por 0's, en la fórmula complementada tomarán el valor 1 aquellos mintérminos que tomaban el valor 0, mientras que tomarán el valor 0 aquellos que tomaban el valor 1. Por lo tanto, en la fórmula complementada aparecerán todos los mintérminos que pasan a tomar el valor 1, que son los mismos que en la fórmula original tomaban el valor 0 y por tanto no aparecían.

Teorema 2.25.- El complemento de una fórmula de maxtérminos está formado por el producto de los maxtérminos que no aparecen en la fórmula original.

Demostración.- Como ya hemos visto, en una fórmula de maxtérminos únicamente aparecen aquellos que pueden tomar un valor de 0, mientras que los que toman siempre el valor 1 no aparecen. No obstante, como la complementación consiste en intercambiar 1's por 0's, en la fórmula complementada tomarán el valor 1 aquellos maxtérminos que tomaban el valor 0, mientras que tomarán el valor 0 aquellos que tomaban el valor 1. Por lo tanto, en la fórmula complementada aparecerán todos los maxtérminos que pasan a tomar el valor 0, que son los mismos que en la fórmula original tomaban el valor 1 y por tanto no aparecían.

Teorema 2.26.- Siempre se verifica las siguientes igualdades: $m_i' = M_i$ y $M_i' = m_i$.

Demostración.- Por definición, i es el número decimal, codificado en binario con las variables de entrada, que hace que el mintérmino tome el valor de 1 y el maxtérmino tome el valor de 0. Como el mintérmino es el producto de todas las variables (complementadas o sin complementar), todas aquellas que aparezcan sin complementar se sustituirán por 1, mientras que las complementadas se sustituyen por 0. Y como el maxtérmino es la suma de todas las variables (complementadas o sin complementar), todas aquellas que aparezcan sin complementar se sustituirán por 0 y las que estén complementadas se sustituirán por 1. Ahora bien, por las leyes de DeMorgan generalizadas, el complemento de mintérmino será un maxtérmino (cambiar operación AND por OR) con las variables invertidas (las que estaban sin complementar, ahora aparecerán complementadas y viceversa). Por lo tanto, el índice del mintérmino y del maxtérmino obtenido de su complementación es el mismo. Y como el complemento del complemento de un elemento es ese mismo elemento, la segunda igualdad también queda demostrada.

No obstante, a la hora de implementar las funciones de conmutación mediante circuitos o puertas lógicas, las expresiones en formas canónicas no derivan en una implementación óptima, generalmente. Las expresiones más empleadas para su posterior implementación son las que siguen una serie de criterios de minimalidad. Los criterios más comunes son los siguientes:

- Menor número de variables.
- Menor número de términos (ya que, por lo general, un término suele corresponderse con una puerta lógica).
- Menor valor asociado. Este valor sigue la siguiente fórmula:

nº términos + nº variables – nº términos con un solo literal –1

El primer criterio (el número de variables) nos va a dar idea del número de entradas que debe tener cada puerta lógica del primer nivel, es decir, en el caso de suma (producto) de productos (sumas), nos indicará el número de entradas de cada puerta AND (OR). El segundo criterio nos va a dar idea del número aproximado de puertas del primer nivel. Por último, el tercer criterio nos va a dar idea del número de términos que no serán implementados con puertas (la figura de términos con un solo literal, que será implementada con un solo cable).

El paso de una fórmula a otra, y en particular a la fórmula mínima, se basa en la aplicación de los postulados y los teoremas correspondientes al álgebra de conmutación.

Hasta ahora hemos visto funciones que se encuentran definidas para todas las combinaciones posibles de variables. No obstante, también se pueden dar casos de funciones que no se encuentren definidas para todas las combinaciones de entradas. Esto suele pasar cuando las variables de entrada no son independientes entre sí o que no puedan darse todas las combinaciones. A este tipo de funciones se les denomina funciones incompletas o incompletamente especificadas. Una función incompleta puede ser la expresada por la tabla 2.8 de combinaciones:.

X_0	X_1	X_2	$F(X_0,X_1,X_2)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	--
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	--
1	1	1	--

Tabla 2.8. Ejemplo de tabla de verdad de una función incompleta.

En este caso, las combinaciones para las que la función no está especificada son 011, 110 y 111. Para estas combinaciones, la función puede tomar cualquier valor ya que éste no es significativo porque no se dará o no influirá. Estas funciones se pueden expresar mediante la unión de dos funciones diferentes:

- Una función completa, f, que contempla todas las inespecificaciones como 0 ó 1, según el tipo de representación. En el caso anterior sería $f = m_1 + m_2 + m_5 = M_0 \cdot M_4$.
- Y otra función completa, denominada función inespecificación, que contempla todas las combinaciones para las que la función no está definida, soliéndose denominar como la función ϕ. En el caso anterior sería $\phi = m_3 + m_6 + m_7 = M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$.

A la hora de crear la fórmula que expresa dicha función, hay que tener en cuenta dos puntos:

- La función f debe ser completamente implementada.
- La función ϕ no tiene porqué ser completamente implementada. Ésta puede que no sea implementada, que sea implementada sólo parcialmente o que esté completamente implementada.

Las inespecificaciones suelen ser empleadas para ayudar a la minimización de las fórmulas de conmutación. Debido a estas inespecificaciones, se cumple que la fórmula de mintérminos o de maxtérminos no es única, ya que pueden existir tantas fórmulas como combinaciones de que sus inespecificaciones existan o no.

Se define el complemento de una función incompleta como otra función incompleta con la misma función de inespecificación y el complemento de los valores definidos. Por ejemplo:

X_0	X_1	X_2	$F(X_0,X_1,X_2)$	$F(X_0,X_1,X_2)'$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	--	--
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	--	--
1	1	1	--	--

Tabla 2.9. Ejemplo de una función incompleta y su complemento.

5. Aritmética binaria.

Una vez visto el álgebra de Boole, y en particular el de conmutación, pasaremos a ver como se harían las operaciones más básicas de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división) utilizando el código binario.

5.1. Suma binaria.

La suma binaria tiene dos salidas: suma y acarreo. La salida suma es el resultado, mientras que el acarreo es lo que se le añade a la siguiente suboperación. La tabla de combinaciones para la suma de dos entradas es la tabla 2.10, que se encuentra junto a un ejemplo:

A	B	Suma	Acarreo
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Tabla 2.10. Tabla de verdad correspondiente a la suma aritmética.

Acarreo	111111 1	
Sumando A	010110.011	22.375
Sumando B	011011.110	27.750
Resultado	110010.001	50.125

5.2. Resta.

La resta binaria tiene dos salidas: resta y desbordamiento. La salida resta es el resultado, mientras que el desbordamiento es lo que se le vuelve a restar a la siguiente suboperación, como si fuese un nuevo substraendo. La tabla de combinaciones para la suma de dos entradas es la tabla 2.11, que se encuentra junto a un ejemplo:

A	B	Resta	Desbordamiento
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Tabla 2.11. Tabla de verdad correspondiente a la resta aritmética.

Sustraendo	10100.11	20.75
Desbordamiento	10110 0	
Minuendo	01011.01	11.25
Resultado	01001.10	09.50

5.3. -Complemento.

Al igual que la resta de los números reales se puede ver como la suma del número negativo, en la resta binaria se puede hacer lo mismo. El número negativo en binario es el denominado complemento a dos de dicho número, representado por ^2B. El complemento a dos de un número binario se calcula invirtiendo dicho número y sumarle 1 a la inversión, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

$$^2(1011) = 0100 + 1 = 0101$$

+1111 -------------> +1111
-<u>1011</u> ------------->+<u>0101</u>
+0100 ------------> +0100

Otra forma de obtener el complemento a dos es la siguiente: empezando por la derecha se deja todo igual hasta encontrar el primer 1 (inclusive) y a partir de ahí se invierte la parte restante bit a bit.

En el caso de que el resultado sea negativo, tanto con la suma con el complemento a dos como en la resta binaria, el número que se obtiene es el número negativo binario, y por tanto, el complemento a dos del número en cuestión.

5.4. Desplazamiento.

En el caso que queramos realizar operaciones complejas (multiplicación y/o división) con números de potencia de dos (2, 4, 8, 16, 32), éstas resultan muy simples por propia construcción del código binario. La multiplicación (división) por 2^n se realiza desplazando el punto decimal n dígitos a la derecha (izquierda). En el caso de que no existan más dígitos, se rellenarán con ceros. Esta forma se puede demostrar por la expresión polinómica de los números binarios.

$$(b_n \cdot 2^n + \dots + b_0 \cdot 2^0 + b_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots b_{-q} \cdot 2^{-q}) \text{ x } 2j = b_n \cdot 2^{(n+j)} + \dots + b_0 \cdot 2^{(0+j)} + b_{-1} \cdot 2^{(-1+j)} + \dots + b_{-q} \cdot 2^{(-q+j)}$$

100110101.1 x 16= 1001101011000

5.5. Multiplicación.

La multiplicación de dos números binarios cualesquiera se basa en la tabla 2.12 de combinaciones:

A	B	Producto
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 2.12. Tabla de verdad correspondiente al producto aritmético.

Después se realiza la suma de los productos parciales (como en el caso decimal). Así, mostramos como ejemplo la multiplicación de 5.75 x 5 = 28.75.

101.11	5.75
x 101	x 5
10111	
000000	
1011100	
11100.11	28.75

5.6. División.

La división es la operación más compleja, realizándose generalmente a través de una algoritmo. El algoritmo que vamos a emplear será el siguiente. El divisor se alineará con la parte más significativa (más a la izquierda) del dividendo y se restará. Si el resultado de esta resta es negativo, al cociente se le añade un cero a la derecha y el divisor se desplaza un dígito a la derecha y volvemos a restar. Si el resultado es positivo, al cociente se le añade un 1 a la derecha y al resultado de la resta se le añade el dígito inmediatamente siguiente de la derecha del dividendo, y se vuelve a empezar. A continuación, vemos en la figura 2.2, y a modo de ejemplo, la división correspondiente a 45/5:

101101	101
101	1001
000101	
101	
000	

Figura 2.2.- Ejemplo de la división binaria.

6. Apéndice: Funciones Complejas.

Hasta ahora hemos visto funciones de forma general. No obstante, existen funciones con unas determinadas propiedades especiales que suelen darle el nombre.

6.1. Funciones simétricas.

Una función se denomina totalmente simétrica cuando permanece inalterable ante cualquier permutación de sus variables.

En estos casos, lo que realmente da el comportamiento de la función no son las variables individuales, sino su conjunto. En el caso de que la simetría se dé para algunas variables complementadas, se dice que la función es simétrica mixta. Pero en ambos casos se dice que la función es simétrica. La forma de representar estas funciones es mediante la letra S, seguida (mediante subíndices) del número de 1's para los que la función toma el valor 1. En la tabla 2.13 mostramos un ejemplo:

X_0	X_1	X_2	nº de 1's	$F(X_0,X_1,X_2)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	2	0
1	0	0	1	1
1	0	1	2	0
1	1	0	2	0
1	1	1	3	1
$F(X_0,X_1,X_2) = S_{0,1,3}(X_0,X_1,X_2)$				

Tabla 2.13. Ejemplo de una función simétrica.

No obstante, cuando la función no es simétrica para todas sus variables sino para un conjunto de ellas, se dice que la función es parcialmente simétrica.

La ventaja de estas funciones es la fácil implementación mediante conmutadores.

6.2. Funciones frontales y backales.

Cuando se puede encontrar una fórmula en suma de productos en la que una variable, x_i, sólo aparece sin complementar (o complementada), se dice que dicha función es positiva (o negativa) para la variable x_i.

En cambio, si en todas las fórmulas aparece tanto la variable sin complementar como la complementada, se dice que la función es mixta en x_i.

Mientras que si existe una fórmula en la que no aparece la variable x_i, se dice que la función es vacua en x_i.

Extendiendo estas definiciones al conjunto completo de variables de la función, se dice que una función es frontal (backal) si es positiva (negativa) en todas sus variables.

La ventaja de las funciones frontales (backales) es que si disponemos del valor sin complementar (complementado) de las variables de entrada, no nos harán falta inversores a las entradas, simplificando de este modo la implementación del circuito lógico.

6.3. Funciones umbrales.

Una función umbral se define como aquella que se puede definir mediante desigualdades a modo de pesos, por ejemplo

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ si n $x_i \cdot w_i > T$

donde w_i representa el vector peso y T el umbral. La representación gráfica de estas funciones (figura 2.3) se realiza mediante una caja en la que cada entrada está acompañada del peso asociado, mientras que en la esquina superior derecha se le indica el umbral a partir del cual el valor de la función será 1.

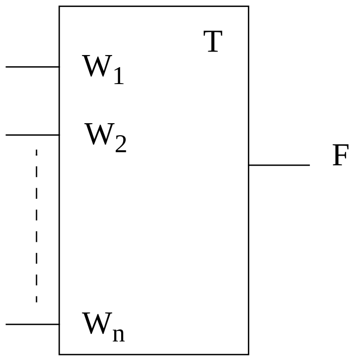

Figura 2.3.- Símbolo de una función umbral.

La ventaja de estas funciones radica en una fácil implementación física.