Capítulo 6

Introducción a la geometría diferencial

6.1. Concepto de curva. Expresiones analíticas

Las curvas en el espacio representan intuitivamente las trayectorias de un punto en movimiento.

Vamos a definir, desde un punto de vista analítico, el concepto de curva comenzando por el caso de coordenadas cartesianas.

Sea un sistema de referencia afín $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ en $\mathbb{R}^3$ donde $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ forman una base ortonormal. Una curva es una aplicación tal como:

$$\begin{array}{ccc} I\subseteq\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \longrightarrow & \boldsymbol{X}(\lambda)\equiv[x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)] \end{array}$$

donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ de longitud finita o infinita.

La expresión

$$\boldsymbol{X}(\lambda)=x(\lambda)\vec{\imath}+y(\lambda)\vec{\jmath}+z(\lambda)\vec{k} \tag{6.1.1}$$

recibe el nombre de expresión cartesiana vectorial de la curva.

Si escomponemos 6.1.1 en sus funciones componentes se obtiene

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & x(\lambda) & \\ y & = & y(\lambda) & \\ z & = & z(\lambda) & \qquad \lambda\in I \end{array}\right. \tag{6.1.2}$$

que son las ecuaciones paramétricas cartesianas de la curva.

Si las funciones componentes son derivables y al menos una de ellas es distinta de cero, por ejemplo $x'(\lambda_0)\neq 0$, la aplicación del teorema de la función inversa determina que existe un entorno $E(\lambda_0)$ donde se puede encontrar una fución $\lambda=\lambda(x)$ y en dicho entorno podemos poner 6.1.2 como

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & y(\lambda(x))=y(x) \\ z & = & z(\lambda(x))=z(x) \end{array}\right. \tag{6.1.3}$$

el mismo razonamiento pero con $y'(\lambda_0) \neq 0$ nos permitiría escribir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(\lambda(y)) = x(y) \\ z & = & z(\lambda(y)) = z(y) \end{array} \right. \tag{6.1.4}$$

y si fuera $z'(\lambda_0) \neq 0$ podríamos poner

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(\lambda(z)) = x(z) \\ y & = & y(\lambda(z)) = y(z) \end{array} \right. \tag{6.1.5}$$

que se denominan ecuaciones cartesianas explícitas de la curva.

Otra forma de definir una curva, bajo las hipótesis del teorema de la función implícita, es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(x, y, z) & = & 0 \\ G(x, y, z) & = & 0 \end{array} \right.$$

denominadas ecuaciones cartesianas impliícitas de la curva. La curva vendría dada como intersección de dos superficies.

Si $I[\lambda_1, \lambda_2]$ / $\boldsymbol{X}(\lambda_1) = \boldsymbol{X}(\lambda_2)$ la curva se dice que es cerrada. Si $\exists \lambda^*, \lambda^\circ \neq \lambda_1, \lambda_2$ / $\boldsymbol{X}(\lambda^*) = \boldsymbol{X}(\lambda^\circ)$ el punto se denomima punto múltiple. Si ocurre para dos valores se dice que el punto es doble, si tres triple, etc.

Ejemplos

• Se llama cicloide a la curva descrita por un punto fijo P de una circunferencia que rueda sin deslizar a lo largo de una recta. Si la recta es el ej OX, el radio de la cirsunferencia a, e inicialmente P está en el origen al girar la circunferencia un ángulo λ el punto se encontrará en la posición que indica la figura 6.1

entonces las ecuaciones paramétricas cartesianas son:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\lambda - a \operatorname{sen} \lambda = a(\lambda - \operatorname{sen} \lambda) \\ y & = & a - a \cos \lambda = a(1 - \cos \lambda) \\ z & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.1.6}$$

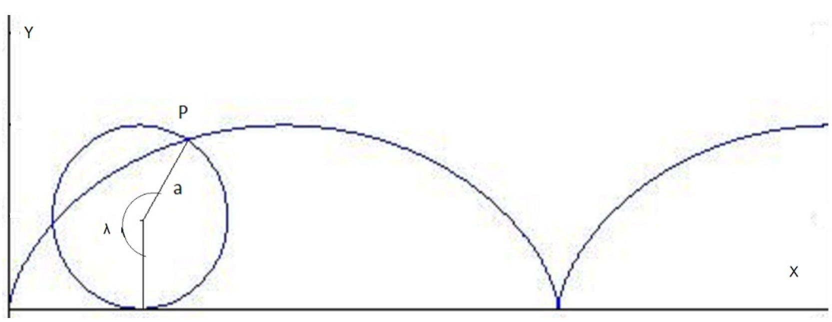

Figura 6.1: Cicloide

si quisiéramos obtener las ecuaciones cartesianas explícitas podríamos despejar λ en $y = a(a - \cos\lambda)$ y sustituir. $\lambda = \arccos\frac{a-y}{a}$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\left[\arccos\frac{a-y}{a} - \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)\right] \\ z & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.1.7}$$

• La circunferencia es una curva plana, si la suponemos en el plano $z = 0$ y de radio a, podemos expresarla mediante sus ecuaciones paramérticas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\cos\lambda \\ y & = & a\operatorname{sen}\lambda \\ z & = & 0, \qquad\qquad \lambda \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \tag{6.1.8}$$

sus ecuaciones cartesianas explícitas serán:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\cos\left(\arcsin\frac{y}{a}\right) \\ z & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.1.9}$$

y las ecuaciones cartesianas implícitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.1.10}$$

• La hélice circular se puede describir como la curva que describe un punto que recorre una circunferencia y a al vez se desplaza verticalmente con respecto a dicho desplazamiento como podemos observar en la figura 6.2.

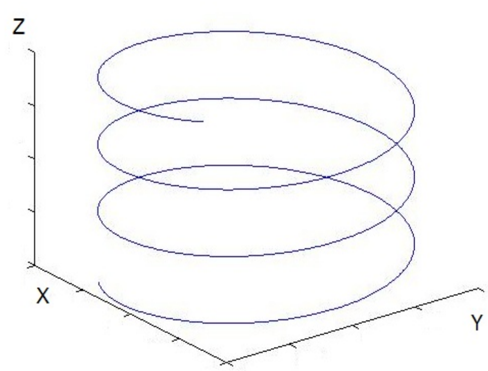

Figura 6.2: Hélice circular

Unas ecuaciones posibles de la hélice circular serían:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos\lambda \\ y & = & a\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ z & = & b\lambda, \qquad\qquad \lambda\in[-\infty,+\infty], \qquad a,b\in\mathbb{R} \end{array}\right. \tag{6.1.11}$$

• La **lemniscata** se define como el lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de distancias a dos puntos fijos es constante. Si los puntos fijos se situan simétricos en el eje OX con coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, figura 6.3, la ecuación en coordenadas polares resulta ser:

$$r^2 = 2a^2\cos 2\phi, \qquad \phi\in[0,2\pi)$$

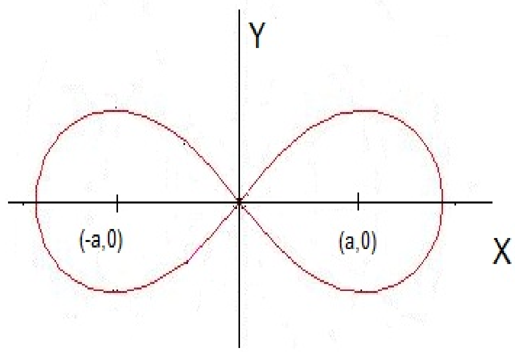

Figura 6.3: Lemniscata de Bernouilli

Obsérvese que el origen es un punto múltiple de la curva.

■

De los ejemplos mostrados las curvas como la lemniscata, cicloide o circunferencia que están contenidas en un plano se denominan curvas **planas** mientras que las las que no lo están se denominan **alabeadas**.

6.2. Puntos singulares y puntos regulares

Sea Γ una curva expresada por sus ecuaciones paramétricas cartesianas, ecuación 6.1.2, y sea $\lambda_0 \in I \ \setminus \ \exists E(\lambda_0)$ donde $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)$ son derivables, se dice que el punto $P_0 \equiv [x(\lambda_0), y(\lambda_0), z(\lambda_0)]$ es un punto singular de Γ si $x'(\lambda_0)^2+y'(\lambda_0)^2+z'(\lambda_0)^2 = 0$, en caso contrario se dice que el punto es regular.

6.3. Cambio de parámetro

Podemos cambiar de parámetro si efectuamos un cambio dado por $\lambda = \lambda(t)$, donde si $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \Rightarrow t \in [t_1, t_2]$, entonces la curva quedará definida por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x[(\lambda(t)] = x^*(t) \\ y & = & y[(\lambda(t)] = y^*(t) \\ z & = & z[(\lambda(t)] = z^*(t) \qquad\quad t \in [t_1, t_2] \end{array} \right. \tag{6.3.1}$$

Un cambio de parámetro se dice que es admisible si no altera el carácter de los puntos de la curva, los puntos regulares continuan sinedo regulares y los puntos singulares, singulares. El teorema que caracteriza los cambio de parámetro es:

Teorema 6.3.1. *Un cambio de parámetro es admisible si y sólo si* $\lambda'(t) \neq 0$

6.4. Longitud de un arco de curva. Parámetro de curva

Sea la curva $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\lambda)$ para $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ y sean $\lambda^*, \lambda^\circ \in [\lambda : 1, \lambda_2]$, la longitud de un arco de curva en coordenadas cartesianas entre los puntos λ^* y λ° del parámetro se expresa como

$$s_{[\lambda^*,\lambda^\circ]} = \int_{\lambda^*}^{\lambda^\circ} \sqrt{\boldsymbol{X}' \cdot \boldsymbol{X}'}\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda^*}^{\lambda^\circ} \sqrt{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2}\, \mathrm{d}\lambda \tag{6.4.1}$$

Ejemplo

Vamos a calcular la longitud de un paso de hélice circular, un paso de hélice es el intervalo $[\lambda_0, \lambda_{0+2\pi}]$. Las ecuaciones paramétricas cartesianas de la hélice circular, según vimos, eran:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a \cos \lambda \\ y & = & a \operatorname{sen} \lambda \\ z & = & b\lambda, \qquad\quad \lambda \in [-\infty, +\infty], \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{6.4.2}$$

La longitud será:

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \lambda + a^2 \cos^2 \lambda + b^2}\ \ \mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, \mathrm{d}\lambda = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

■

En coordenadas polares una curva plana tiene por ecuaciones paramétricas cartesianas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r(\theta) \cos \theta \\ y & = & r(\theta) \operatorname{sen} \theta \\ z & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.4.3}$$

Universidad de Huelva
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Derivando con respecto a θ se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{d\theta} & = & \dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} & = & \dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta \\ \dfrac{dz}{d\theta} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.4.4}$$

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r(\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

Ejemplo

Vamos a calcular la longitud del arco de la espiral $r = \mathbf{e}^\theta$ medido desde $-\infty$ hasta θ.

$$s = \int_{-\infty}^{\theta} \sqrt{(\mathbf{e}^\theta)^2 + r(\mathbf{e}^\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\theta} \mathbf{e}^\theta\, \mathrm{d}\theta = \text{lím}_{\theta_0 \to -\infty} \mid \mathbf{e}^\theta\big|_{\theta_0}^{\theta} = \sqrt{2}\ \mathbf{e}^\theta$$

■

Hemos visto la ecuación, 6.4.1, que me permite calcular la longitud de un arco de curva. Si se trata de puntos regulares podemos poner:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2} \neq 0$$

y entonces en virtud del teorema de la función inversa existe un $\lambda = \lambda(s)$ y la curva puede expresarse:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = x(\lambda) = & x[(\lambda(s)] = x^*(s) \\ y & = y(\lambda) = & y[(\lambda(s)] = y^*(s) \\ z & = z(\lambda) = & z[(\lambda(s)] = z^*(s) \end{array}\right. \tag{6.4.5}$$

$'s'$ recibe el nombre de parámetro arco o simplemente arco de la curva.

Una curva referida al parámetro arco verifica $\| \dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds} \| = 1$ ya que $d\boldsymbol{X} \circ d\boldsymbol{X} = ds^2$ y entonces

$$\boldsymbol{X}'(s) \circ \boldsymbol{X}'(s) = 1 \tag{6.4.6}$$

.

El parámetro de arco facilita el estudio teórico de una curva

Ejemplos

- Parametrizar por su arco la circunferencia de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & a\cos\lambda \\ y & = & a\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ z & = & 0, \qquad\qquad \lambda\in[0,2\pi] \end{array}\right. \tag{6.4.7}$$

Escogemos como origen de arco $\lambda = 0$, entonces:

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\lambda + a^2\cos^2\lambda}\;\; \mathrm{d}\lambda = \int_0^\lambda a \;\; \mathrm{d}\lambda = a\lambda$$

luego $\lambda = \dfrac{s}{a}$, entonces la parametrización buscada será:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & a\cos\frac{s}{a} \\ y & = & a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{a} \\ z & = & 0, \qquad\qquad s\in[0,2\pi a] \end{array}\right. \tag{6.4.8}$$

■

- Parametrizar por su arco la hélice circular de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & a\cos\lambda \\ y & = & a\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ z & = & b\lambda, \qquad\qquad \lambda\in[-\infty,+\infty], \qquad a,b\in\mathbb{R} \end{array}\right. \tag{6.4.9}$$

Tomando como origen de arco $\lambda = 0$

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\lambda + a^2\cos^2\lambda + b^2}\;\; \mathrm{d}\lambda = \int_0^\lambda \sqrt{a^2+b^2}\;\; \mathrm{d}\lambda = \sqrt{a^2+b^2}\lambda$$

y por tanto $\lambda = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, entonces la parametrización será:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y & = & a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z & = & b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad\qquad s\in[-\infty,\infty] \end{array}\right. \tag{6.4.10}$$

■

6.5. Triedro de Frenet

Sea $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(s)$ una curva, donde s representa el arco; tratamos de definir en cada punto $\boldsymbol{X}(s_0)$ donde sea posible una referncia afín $\{\boldsymbol{X}(s_0); \boldsymbol{T}(s_0), \boldsymbol{N}(s_0), \boldsymbol{B}(s_0)\}$ donde los vectores $\boldsymbol{T}(s_0)$ (vector tangente), $\boldsymbol{N}(s_0)$ (vector normal) y $\boldsymbol{B}(s_0)$ (vector binormal) forman un triedro ortonormal denominado triedro móvil o triedro de Frenet.
Se define para todo punto regular de la curva el vector tangente $\boldsymbol{T}(s) = \dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}$ y por lo tanto $\boldsymbol{T}(s_0) = \left.\dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}\right|_{s=s_0}$, que es unitario según 6.4.6.
El vector normal principal $\boldsymbol{N}(s_0)$ es un vector unitario en la dirección del vector $\left.\dfrac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}\right|_{s=s_0}$. Es un vector ortogonal a $\boldsymbol{T}(s_0)$ ya que $\dfrac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}$ es el vector derivada de un vector $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}$ de módulo constante. El vector normal principal no tiene determinado su sentido, teniéndose

$$\left.\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}\right|_{s=s_0} = \kappa(s_0)\boldsymbol{N}(s_0) \tag{6.5.1}$$

donde $\kappa(s)$ es la curvatura. El escalar $\kappa(s_0)$ tampoco tiene determinado su signo, dependiendo del sentido elegido para $\boldsymbol{N}(s_0)$. Sim embargo el producto, el producto $\kappa(s_0) \cdot \boldsymbol{N}(s_0)$ está perfectamente determinado.
El vector binormal $\boldsymbol{B}(s_0)$ se define

$$\boldsymbol{B}(s_0) = \boldsymbol{T}(s_0) \wedge \boldsymbol{N}(s_0). \tag{6.5.2}$$

El $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ así obtenido es directo.

Ejemplos

• Determinar el triedro de Frenet en el punto $(a, 0, 0)$ de la hélice circular de ecuación 6.4.10.
El punto $(a, 0, 0)$ corresponde al $s = 0$. Por tanto tendremos que obtener los vectores $\{\boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{N}(0), \boldsymbol{B}(0)\}$.
De $\boldsymbol{X}(s) = \left(a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\,\mathrm{sen}\,\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ obtenemos $\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{X}'(s)$
$\boldsymbol{X}'(s) = \left(\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ haciendo $s = 0$

$$\boldsymbol{T}(0) = \left(0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Por otra parte

$$\boldsymbol{X}''(s) = \left(\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-a}{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

y para $s = 0$

$$\boldsymbol{X}''(0) = \left(\frac{-a}{a^2+b^2}, 0, 0\right)$$

Un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{X}''(0)$ es $\boldsymbol{N}(0) = (1,0,0)$ y entonces

$$\boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{T}(0) \wedge \boldsymbol{N}(0) = \left(0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \wedge (1,0,0) = \left(0,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

■

Una vez construido el triedro de Frenet en un punto P de una curva se pueden definir tres rectas y tres planos asociados a él. Supongamos la curva $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\lambda)$ y sea el punto P el correspondiente al valor λ_0 del parámetro, entonces definimos:

Definición 6.5.1 (Recta tangente). *Es la recta que pasa por P y tiene como vector director $\boldsymbol{T}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}(\lambda_0) + \mu\,\boldsymbol{T}(\lambda_0), \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{6.5.3}$$

Definición 6.5.2 (Recta normal principal). *Es la recta que pasa por P y tiene como vector director $\boldsymbol{N}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}(\lambda_0) + \mu\boldsymbol{N}(\lambda_0), \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{6.5.4}$$

Definición 6.5.3 (Recta binormal). *Es la recta que pasa por P y tiene como vector director $\boldsymbol{B}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}(\lambda_0) + \mu\boldsymbol{B}(\lambda_0), \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{6.5.5}$$

Definición 6.5.4 (Plano normal). *Es el plano que pasa por P y tiene como vector característico $\boldsymbol{T}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$[\,\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}(\lambda_0)] \circ \boldsymbol{T}(\lambda_0) = 0 \tag{6.5.6}$$

Definición 6.5.5 (Plano rectificante). *Es el plano que pasa por P y tiene como vector característico $\boldsymbol{N}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$[\,\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}(\lambda_0)] \circ \boldsymbol{N}(\lambda_0) = 0 \tag{6.5.7}$$

Definición 6.5.6 (Plano osculador). *Es el plano que pasa por P y tiene como vector característico $\boldsymbol{B}(\lambda_0)$. Su ecuación será:*

$$[\,\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}(\lambda_0)] \circ \boldsymbol{B}(\lambda_0) = 0 \tag{6.5.8}$$

En la figura 6.4 podemos ver el triedro de Frenet y sus elementos asociados.

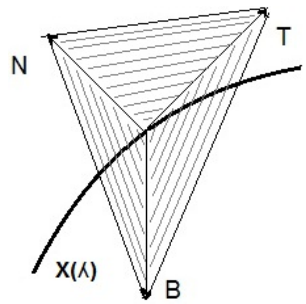

Figura 6.4: Triedro de Frenet

6.6. Fórmulas de Frenet. Curvatura y torsión

Sea el triedro ortonormal $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}$. Los vectores $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds},\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds},\ \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ vienen dados por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} & = & \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds} & = & -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) \qquad +\tau(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds} & = & -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) \end{array}\right. \tag{6.6.1}$$

expresiones que reciben el nombre de fórmulas de Serret-Frenet. Al ser $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}$ linealmente independientes, constituyen una base ; cualquier vector del espacio podrá expresarse en función de dicha base, veamos como podemos encontrar dichas coordenadas.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} & = & a_{11}\boldsymbol{T} \quad +a_{12}\boldsymbol{N} \quad +a_{13}\boldsymbol{B} \\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds} & = & a_{21}\boldsymbol{T} \quad +a_{22}\boldsymbol{N} \quad +a_{23}\boldsymbol{B} \\ \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds} & = & a_{31}\boldsymbol{T} \quad +a_{32}\boldsymbol{N} \quad +a_{33}\boldsymbol{B} \end{array}\right. \tag{6.6.2}$$

Como $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ son de módulo constante, sus vectores derivada serán perpendiculares a ellos, luego

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \tag{6.6.3}$$

$\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{N}$ son ortogonales, por tanto $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{N} = 0$ y derivando con respecto a s,

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \circ \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} \circ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = 0$$

Teniendo en cuenta 6.6.2 y 6.6.3:

$$(a_{12}\boldsymbol{N} + a_{13}\boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} \circ (a_{21}\boldsymbol{T} + a_{23}\boldsymbol{B}) = 0$$

lo que implica que $a_{12} + a_{21} = 0$ y por tanto

$$a_{21} = -a_{12} \tag{6.6.4}$$

$\boldsymbol{N} \circ \boldsymbol{B} = 0$ por ser ortogonales; derivando y teniendo en cuenta 6.6.2, 6.6.3 y 6.6.4

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \circ \boldsymbol{B} + \boldsymbol{N} \circ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = 0$$

$$(-a_{12}\boldsymbol{T} + a_{23}\boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{B} + \boldsymbol{N} \circ (a_{31}\boldsymbol{T} + a_{32}\boldsymbol{N}) = 0$$

de donde $a_{23} + a_{32} = 0$ y resultará

$$a_{23} = -a_{32} \tag{6.6.5}$$

$\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{B} = 0$ por ser ortogonales; derivando y teniendo en cuenta 6.6.2, 6.6.3 y 6.6.5

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \circ \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \circ \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$$

$$(a_{31}\boldsymbol{T} - a_{23}\boldsymbol{N}) \circ \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \circ (a_{12}\boldsymbol{N} + a_{13}\boldsymbol{B}) = 0$$

de donde $a_{31} + a_{13} = 0$ y resultará

$$a_{31} = -a_{13}. \tag{6.6.6}$$

Como $\boldsymbol{N}$ tiene la dirección de $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ será

$$a_{13} = 0. \tag{6.6.7}$$

Si designamos a_{12} por $\kappa(s)$ y a_{23} por $\tau(s)$ y trasladamos los resultados a 6.6.2 nos quedarán las fórmulas de Serret-Frenet. Estas fórmulas pueden expresarse de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}(s) \\ \boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{B}(s) \end{pmatrix}$$

Nota: Las fórmulas de Frenet sólo son válidas si el parámetro es el arco.

La función $\kappa(s)$ recibe el nombre de curvatura, y la función $\tau(s)$ recibe el nombre de torsión.

6.6.1. Expresiones de la curvatura y la torsión

Vamos a considerar, unicamente, el caso en el que la curva venga expresada en función del parámetro arco.

Calculemos la curvatura. Sea $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(s)$, multiplicando escalarmente por si misma esta expresión

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \tag{6.6.8}$$

se obtiene

$$\kappa(s)^2 = \frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} \circ \frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} \tag{6.6.9}$$

Calculemos la torsión. Multiplicando escalarmente la segunda fórmula de Frenet por el vector $\boldsymbol{B}$ obtenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \circ \boldsymbol{B} = (-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{B} = \tau \tag{6.6.10}$$

$$\tau = \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \circ \boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \circ (\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N}) =< \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} > \tag{6.6.11}$$

Ejemplo

- Determinar la curvatura y la torsión de la hélice circular de ecuación 6.4.10.

Para calcular la curvatura partimos de $\boldsymbol{X}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ y obtenemos $\boldsymbol{X}'(s)$ y $\boldsymbol{X}''(s)$

$$\boldsymbol{X}'(s) = \left(\frac{-\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{X}''(s) = \left(\frac{-\,a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-\,a}{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

y entonces

$$\kappa(s)^2 = \frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} \circ \frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}$$

Observémos que en esta exprrsión está determinado κ^2 y no κ ya que una variación en el sentido del vector $\boldsymbol{N}$ lleva consigo un cambio de signo en la curvatura.

La torsión la calculamos de la siguiente forma. Partiendo de $\boldsymbol{X}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ calculamos $\boldsymbol{X}'(s)$ $\boldsymbol{X}''(s)$ y $\boldsymbol{X}'''(s)$

$$\boldsymbol{X}'(s) = \left(\frac{-\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{X}''(s) = \left(\frac{-\,a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-\,a}{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

$$\boldsymbol{X}'''(s) = \left(\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-\,a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

entonces $\dfrac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} \circ \dfrac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} = \dfrac{a^2}{(a^2+b^2)^2}$ y

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{ds} \wedge \frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2} \equiv \left(\frac{ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-\,ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$< \boldsymbol{X}'(s),\ \boldsymbol{X}''(s),\ \boldsymbol{X}'''(s) >= \begin{vmatrix} \dfrac{-\,a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{-\,a}{a^2+b^2} \cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-\,a}{a^2+b^2} \operatorname{sen} \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ \dfrac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen} \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-\,a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}} \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ba^2}{(a^2+b^2)^3}$$

■

Problemas

6.1 Hallar la recta tangente y el plano normal a la curva de ecuaciones
$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x^2 & +y^2 & +z^2 & = & 3 \\ 9x^2 & +4x^2 & -13z^2 & = & 0 \end{array} \right. \text{ en el punto } (1,1,1).$$

6.2 Hallar la ecuación del plano osculador a la curva $x = 2\mathrm{senh}\frac{\lambda}{2},\ y = 2\cosh\frac{\lambda}{2},\ z = 3\lambda.$