Capítulo 1

Matrices y Determinantes

1.1 Matrices. Generalidades

Definición 1.1 *Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, $m, n \in \mathbb{N}$.*

Definimos **matriz de orden m × n** *sobre E a una expresión de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} \in E,\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$

A los elementos a_{ij} se les denomina elementos de la matriz. Atendiendo a la disposición de los elementos en la matriz, diremos que la matriz está compuesta por m filas (de n elementos) y n columnas (de m elementos), siendo a_{ij} el elemento de la fila i y la columna j de la matriz. A la matriz cuyos elementos son a_{ij} se denota por $((a_{ij}))$, o simplemente por A.

Al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre E se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$. En el caso de que una matriz tenga igual número de filas que de columnas ($m = n$) se denomina **matriz cuadrada de orden n**, y el conjunto de dichas matrices se denota por $\mathcal{M}_n(\mathrm{E})$. Si solamente tiene una fila ($m = 1$) se le denomina **matriz fila**, y si sólo tiene una columna ($n = 1$) se le denomina **matriz columna**.

Definición 1.2 *Dos matrices $A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(E)$ son iguales si tienen los mismos elementos.*

$$((a_{ij})) \ = \ ((b_{ij})) \ \Leftrightarrow \ a_{ij} \ = \ b_{ij} \quad \forall i,\ \forall j.$$

Definición 1.3 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(E)$ y $k = min\{m, n\}$. Al conjunto formado por los elementos a_{ii} con $i = 1, 2, \dots, k$ se le llama* **diagonal principal de la matriz A**.
Y al conjunto $\{a_{ij}\ /\ i + j \ = \ n + 1\}$ se le llama **diagonal no principal de la matriz A**.

Definición 1.4 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(E)$. Decimos que A es* **triangular superior** *si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.*
Decimos que A es **triangular inferior** *si los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos.*
La matriz A es **diagonal** *si es triangular superior e inferior.*

Definición 1.5 *A la matriz $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(E)$ cuyos elementos son nulos se le denomina* **matriz nula de orden m × n**.
A la matriz diagonal $I_n \in \mathcal{M}_n(E)$ cuyos elementos de la diagonal principal son unos se le denomina **matriz identidad de orden n**.

1.2 Operaciones con matrices

1.2.1 Suma de matrices

Definición 1.6 (Suma de matrices) *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$, definimos $A + B = ((a_{ij} + b_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Propiedades

1. Conmutativa: $A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C,\ \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. Existe elemento neutro $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\Theta + A = A + \Theta = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \exists -A = ((-a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = \Theta$.

Por tener estas propiedades ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,+) tiene estructura de grupo conmutativo.

1.2.2 Producto por un escalar

Definición 1.7 (Producto de una matriz por un escalar) *Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos $\lambda A = ((\lambda a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Propiedades

1. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A),\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $1 \cdot A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1.2.3 Producto de matrices

Definición 1.8 (Producto de matrices) *$A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{jk})) \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$, definimos la matriz producto*

$$A.B = ((\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk})) \in \mathcal{M}_{m\times l}(\mathbb{K}).$$

Propiedades
Respetando los órdenes de las matrices para que se puedan multiplicar, se verifican las siguientes propiedades:

1. $A.B \neq B.A$, en general.

2. $A.B = \Theta \not\Rightarrow A = \Theta$ o $B = \Theta$. Y por tanto: $A.B = A.C \not\Rightarrow B = C$.
3. $A.(B+C) = A.B + A.C$; $(A+B).C = A.C + B.C$
4. $(A.B).C = A.(B.C)$
5. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A.I_n = I_m.A = A$

Teorema 1.1 *El producto de matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales son, respectivamente, matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales.*

1.3 Matriz traspuesta. Propiedades

Definición 1.9 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(E)$. Denominamos* **matriz traspuesta de A** *a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(E)$ cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A.*

Propiedades

1. $(A^t)^t = A, \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t,\ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t,\ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t,\ A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.

Definición 1.10 *Una matriz A cuadrada es* **simétrica** *si $A^t = A$, y es* **antisimétrica** *si $A^t = -A$.*

1.4 Submatrices y bloques

Definición 1.11 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama* **submatriz** *de A de orden $p \times q$, a la matriz que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-q$ columnas de A.*
Si los índices de filas y columnas que determinan la submatriz son consecutivos, entonces la submatriz se denomina **bloque** *o* **caja**.

Descomposición en bloques:
Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, consideremos una sucesión creciente de índices de filas

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m$$

y una sucesión creciente de índices de columnas

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n$$

Sea A_{ij} el bloque de A que definen las filas comprendidas entre las $m_{i-1}+1$ y la m_i (ambas inclusive) y las columnas comprendidas entre las $n_{j-1}+1$ y la n_j (ambas inclusive). Se dice que A se descompone en bloques cuando se la expresa en función de los $p \cdot q$ bloques A_{ij}. Estos forman p filas y q columnas y quedan situados como si se tratara de los elementos de una matriz.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{array}\right)$$

Se puede operar con los bloques como si fueran escalares, siempre que los órdenes sean adecuados. Más concretamente:

Multiplicación por bloques

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ y sea $C = A.B$. Si A se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_\alpha = m$ y de columnas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y B se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y de columnas $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_\beta = n$, entonces si $C = [C_{ij}]$

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^{\gamma} A_{ih}B_{hj}$$

1.5 Matriz inversa

Definición 1.12 (Matriz inversa) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es invertible si*

$$\exists\ B \ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A.B \ =\ B.A \ =\ I_n.$$

A la matriz B se le denota por A^{-1} y se denomina **matriz inversa de A.**

Es fácil demostrar que la inversa de una matriz invertible es única.

Teorema 1.2 *Son ciertas las siguientes proposiciones:*

1. *Si A es invertible, A^{-1} también y $(A^{-1})^{-1} \ =\ A$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, A.B también y $(A.B)^{-1} \ =\ B^{-1}.A^{-1}$*
3. *Si A es invertible, entonces A^t también y $(A^t)^{-1} \ =\ (A^{-1})^t$.*

Teorema 1.3 *Las matrices diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores son invertibles si y sólo si los elementos de la diagonal son distintos de cero. Además las inversas de estas matrices siguen siendo diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores.*

1.5.1 Método de Gauss–Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Consiste en someter a una matriz A invertible a transformaciones elementales por filas hasta conseguir transformarla en la matriz identidad. El producto de las matrices asociadas a dichas transformaciones elementales por filas será la inversa de la matriz. Para conseguir transformar la matriz A en la matriz identidad procedemos de la siguiente manera:

1. Ampliamos la matriz A con la matriz identidad: $[A|I_n]$.
2. Triangularizamos la matriz A superiormente; es decir, utilizando transformaciones elementales, conseguimos hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal. Además si A es invertible los elementos de la diagonal serán todos distintos de cero y por tanto podemos hacer unos todos los elementos de la diagonal. Se obtendrá $[L|B]$
3. Utilizando el mismo método pero desde abajo hacia arriba, podemos hacer cero los elementos que están por encima de la diagonal, obteniéndose $[I_n|A^{-1}]$.

1.6 Transformaciones elementales. Matrices asociadas. Inversas

Definición 1.13 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denominan transformaciones elementales por filas (análogamente por columnas) a las transformaciones efectuadas sobre los elementos de la matriz siguientes*

- F_{ij} *(o C_{ij}) Intercambiar la fila i por la j (análog. columnas).*
- $F_i(\alpha)$ *(o $C_i(\alpha)$) con $\alpha \neq 0$. Multiplicar la fila i por $\alpha \in\mathbb{K}$ (análog. columnas).*
- $F_{ij}(\alpha)$ *(o $C_{ij}(\alpha)$). Sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\alpha \in\mathbb{K}$ (análog. columnas).*

Definición 1.14 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos matriz asociada a una transformación elemental por filas (por columnas), que la denotaremos igual que la transformación elemental, como la matriz cuadrada de orden m (de orden n si se trata por columnas) que resulta de someter a la matriz identidad de orden m (de orden n para columnas) a dicha transformación elemental por filas (por columnas).*

Teorema 1.4 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $F \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por filas. Sea A' la matriz que resulta de someter a la matriz A a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $F.A = A'$.*
Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por columnas. Sea B' la matriz que resulta de someter a la matriz B a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $B.C = B'$.

Teorema 1.5 *Las matrices asociadas a transformaciones elementales son invertibles. Además:*

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad F_i^{-1}(\alpha) = F_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad F_{ij}^{-1}(\alpha) = F_{ij}(-\alpha)$$

$$C_{ij}^{-1} = C_{ij}, \quad C_i^{-1}(\alpha) = C_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad C_{ij}^{-1}(\alpha) = C_{ij}(-\alpha)$$

1.7 Determinantes: definición y propiedades

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pretendemos asignarle un escalar de $\mathbb{K}$, que llamaremos determinante de A y representaremos por $\det(A)$ o $\mid A \mid$, para obtener información acerca de la matriz dada. Entre otras cosas dicho número proporciona criterios de invertibilidad de A y resulta ser también igual al volumen de un paralelepípedo P en el espacio n-dimensional, donde las aristas de P vienen de las filas de A.

1.7.1 Permutaciones (recordatorio)

Dado un conjunto de N elementos que podemos suponer que es $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para permutar estos elementos, es decir para situarlos en distinto orden, bastará recurrir a un aplicación biyectiva $\sigma : N \longrightarrow N$, que representaremos escribiendo debajo de cada $i \in N$ su imagen $\sigma(i)$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Estas biyecciones de N en N se llaman *permutaciones* de n elementos. Con una de ellas, σ, los elementos de N, que inicialmente se suponen que están ordenados en el orden natural $(1, 2, \ldots, n)$, se consideran ahora formando la nueva sucesión $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$. En total hay $n!$ permutaciones de n elementos. El conjunto de todas

ellas se denota $\mathcal{P}_n$.
Se llaman *trasposiciones* a aquellas permutaciones en las que, salvo dos elementos de N, que vamos a llamar i y j, todos los demás permanecen fijos (es decir, coinciden con su imagen); los elementos que varían se transforman uno en el otro (es decir i en j y j en i).
Se llama *índice* de una permutación y se denota por $i(\sigma)$, al número de trasposiciones que presenta dicha permutación.

1.7.2 Definición de determinante

Definición 1.15 *Dada* $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, se define el* **determinante de A** *como:*

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

donde el sumatorio se extiende a las $n!$ *permutaciones de* $\{1, 2, \dots, n\}$*,*

Por ejemplo, si $n = 2$, $\mathcal{P}_2 = \{(12), (21)\}$ y, por lo tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si $n = 3$, $\mathcal{P}_3 = \{(123), (132), (213), (231), (312), (321)\}$ y $i(123) = 0$, $i(132) = 1$, $i(213) = 1$, $i(231) = 2$, $i(312) = 2$, $i(321) = 3$, por tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

es decir

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

expresión que se puede recordar más fácilmente con ayuda de la conocida regla de Sarrus.

Si se examina cualquiera de las expresiones obtenidas para el determinante de matrices de orden 2 ó 3, se verá que cada uno de los productos incluye un término de cada una de las filas de A y un término de cada una de las columnas. En general, $|A|$ es la suma de todos los productos posibles de n elementos de A, con los signos adecuados, y donde en cada producto hay exactamente un término de cada fila y exactamente uno de cada columna.

1.7.3 Menor complementario y adjunto

Definición 1.16 *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *se denomina menor complementario del elemento* a_{pq} *y se denota* M_{pq}*, al determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila* p *y la columna* q *de* A*.*
Se llama adjunto del elemento a_{pq} *al número, que representaremos por* A_{pq}*, definido por* $A_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$

Notemos que los signos de la definición de adjunto tienen una disposición de tablero de ajedrez:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ & & \cdots & \end{bmatrix}$$

Teorema 1.6 (Desarrollo de $|A|$ por una fila o columna) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el $|A|$ se puede calcular desarrollándolo con respecto a cualquier fila o a cualquier columna,mediante*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

1.8 Propiedades de los determinantes. Cálculo de la inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

1. $|A| = |A^t|$.

2. Si todos los elementos de una fila (columna) de A son nulos, entonces $|A| = 0$.

3. Si se permutan entre sí dos líneas (filas o columnas) de un determinante, éste cambia de signo.

4. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales vale 0.

5. Si se multiplican todos los elementos de una fila (columna) de A por un número λ, el determinante de la matriz B resultante, queda $|B| = \lambda|A|$.

6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales vale 0.

7. Si cada elemento de una fila (columna), por ejemplo p, de la matriz A es de la forma $a_{pq} = a'_{pq} + a''_{pq}$, entonces $|A| = |B| + |C|$, donde

$$\left\{ \begin{array}{llll} b_{ij} = a_{ij}, & \text{si} & i \neq p, & b_{pj} = a'_{pj} \\ c_{ij} = a_{ij}, & \text{si} & i \neq p, & c_{pj} = a''_{pj} \end{array} \right.$$

8. Al sumar a una línea una combinación lineal de las restantes líneas paralelas el determinante de A no varía.

   Esta propiedad se utiliza a menudo en la práctica para calcular el determinante de una matriz de una forma más simple. Se toma un elemento de una línea distinto de cero como pivote y con él, utilizando la anterior propiedad, se hacen ceros el resto de elementos de dicha línea, con lo cual el determinante de orden n se reduce al cálculo de un determinante de orden $n-1$.

9. Si una línea de la matriz A es combinación lineal de otras líneas paralelas a ella, el $|A| = 0$.

   (En consecuencia si $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ las líneas de A son linealmente independientes)

10. El producto de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) es nulo.

Teorema 1.7 *Si $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.*

Corolario 1.8 *Si A es no singular, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.*

1.8.1 Cálculo de la inversa mediante determinantes

Queremos calcular una fórmula explícita para la matriz inversa de A, supuesto que existe.

Definición 1.17 *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *a la matriz cuadrada de orden* n, $adj(A) = ((A_{ij}))$ *se le llama adjunta de la matriz* A.

Teorema 1.9 *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *entonces* A *es invertible si y sólo si ,* $|A| \neq 0$. *En dicho caso es:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adj(A^t) = \frac{1}{|A|}.(adj(A))^t$$

1.9 Menores de una matriz

Definición 1.18 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se llama* **menor de orden p** *de la matriz* A *al determinante de la matriz cuadrada obtenida por la intersección de* p *filas y* p *columnas de* A.

Definición 1.19 *Se llama* **orlar** *un menor de orden* p *a obtener un menor de orden* $p+1$ *añadiéndole una fila y una columna al menor original.*

Si en una matriz A, una fila p (columna) es combinación lineal de otras h filas (columnas), todos los menores de orden $h+1$ que pueden formarse con la fila p y las h filas (columnas) consideradas son nulos, en virtud de la propiedad 9 de los determinantes. El siguiente teorema es un recíproco de este resultado.

Teorema 1.10 *Si un menor de orden* h *de una matriz* A *es distinto de cero, y todos los menores de orden* $h+1$, *que pueden formarse orlando éste con la fila* p *de la matriz y cada una de las columnas que no figuran en el menor son nulos, entonces la fila* p *es combinación lineal de las filas de la matriz que figuran en el menor.*

1.9.1 Rango de una matriz

Definición 1.20 *Se llama* **rango por menores de** A, *y lo denotamos por* $r(A)$, *al mayor orden de sus menores no nulos. Es decir,* $r(A) = h$ *si* A *tiene algún menor no nulo de orden* h *y todos los menores de orden* $h+1$ *de* A *son nulos.*

Si $r(A) = h$, un menor de orden h de A se denomina menor principal.

Proposición 1.1 *Si* A *es una matriz cuadrada de orden* n, $r(A) = n \iff |A| \neq 0$

Como consecuencia del teorema (1.10) se verificará que si $r(A) = h$ y M es un menor principal de A, entonces cualquier fila (columna) de A será combinación lineal de las filas (columnas) de A que figuran en el menor.

Teorema 1.11 *El rango de una matriz no varía si se añade o se suprime una fila (columna) combinación lineal de las demás.*

1.9.2 Cálculo del rango

El **método de los orlados** consiste:

1. Se suprimen todas las líneas de la matriz A que sean combinación lineal de otras.

2. Se busca en la matriz un menor de orden uno no nulo.
3. Orlamos dicho menor con una fila determinada y con el resto de las columnas de la matriz A.
   (a) Si todos los orlados son nulos, se suprime dicha fila y se repite la operación con otra fila determinada.
   (b) Si algún orlado es no nulo se vuelve a repetir el proceso con dicho menor desde el punto (3).
4. Una vez agotadas todas las filas, el orden del último menor no nulo es el rango de la matriz A.

Ejercicios y problemas

1.1 Hallar la matriz X que cumple $X.A+B=C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

1.2 Calcular A y B sabiendo:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A+A^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B-B^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Hallar todas las matrices de orden 3 que conmutan con la matriz diagonal $D(\alpha,\beta,\gamma)$, con α,β,γ escalares.

1.4 a) Sea una matriz de orden $m\times n$, demostrar que $A^t.A$ y $A.A^t$ son matrices simétricas.

b) Hallar $A^t.A$ y $A.A^t$ en el caso $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.5 Encontrar todas las matrices idempotentes ($A^2=A$) de orden 2, con elementos en $\mathbb{R}$. Deducir que en una matriz idempotente de orden 2, distinta de I_2 las columnas y filas son proporcionales.

1.6 Sea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a\neq 0$. Calcular $A^m,\ m\in\mathbb{N}$

1.7 Calcular $(I+A)^{12}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.8 Calcular la potencia n-ésima de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n.

1.10 Sean $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ matrices tridiagonales de orden n tales que
$a_{ij} = 0$ si $\ i < j + r$ y $b_{ij} = 0$ si $i < j + s$, donde r y $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, fijos.
Sea $C = A.B,\ C = (c_{ij})$

a) Probar que $c_{ij} = 0$, si $i < j + r + s$

b) Probar que si A es una matriz triangular inferior de orden n con los elementos de la diagonal nulos entonces $A^n = \Theta$.

1.11 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que A es nilpotente ($\exists\ n / A^n = \Theta$)

b) Demostrar que $I_3 + A + A^2$ es la inversa de $I_3 - A$.

1.12 Hallar el rango de las siguientes matrices según los diferentes valores de los parámetros.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & p-1 & 0 \\ 3-p & 1 & p-2 \\ 1 & 2p-3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.13 Si D es una matriz diagonal de orden n, tal que los elementos de su diagonal son todos no nulos, demostrar que D es invertible. Hallar $D^n,\ n \in \mathbb{N}$. Demostrar que una matriz triangular es invertible si y sólo si sus elementos diagonales son todos no nulos.

1.14 a) Demostrar que toda matriz cuadrada de orden n que verifica la ecuación:
$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = \Theta\ ,\quad a_0 \neq 0$ es invertible.
¿Cuál es la inversa?

b) Demostrar que toda matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, satisface la ecuación $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I_2 = \Theta$.

c) ¿Qué debe verificar la matriz del apdo. anterior para ser invertible?

d) Hallar la inversa.

1.15 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular las potencias sucesivas de A.

b) Sea $B = I + A$, expresar B^n en función de I, A, A^2.

c) Demostrar que la inversa de B es $I - A + A^2$.

1.16 Calcular, si es posible, las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17 Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
y resolver, aplicando el resultado anterior, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ 4x & + & 2y & & & = & -1 \\ -3x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

1.18 Resolver matricialmente, si es posible, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & -2 \end{array} \right.$$

1.19 Dada una matriz A cuadrada de orden n ¿qué relación existe entre $det(A)$, $det(-A)$, $det(-3A)$ y $det(A^3)$?

1.20 Una matriz A se dice que es antisimétrica si $A^t = -A$, como en

$$\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $det(A) = 0$, comparándolo con $det(A)$ y $det(-A)$. ¿Por qué una matriz antisimétrica de orden 5×5 debe tener determinante cero pero una de orden 4×4 no?

1.21 Resolver $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

1.22 Sin desarrollar, demostrar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ m+n & n+l & m+l \\ x+y & y+z & x+z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

1.23 Sea A una matriz cuadrada de orden impar y antisimétrica ($A = -A^t$). Probar que $|A| = 0$.

1.24 Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ¿Es $|\lambda B|^{-1} = \lambda^{-n}|B|^{-1}$?

1.25 Resolver $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$=0

1.26 Demostrar que el determinante llamado de Vandermonde es igual a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \text{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

Como aplicación calcular

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 25 & 49 & 81 \\ 8 & 125 & 343 & 729 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 & \ln 5 & \ln 6 \\ (\ln 2)^2 & (\ln 3)^2 & (\ln 4)^2 & (\ln 5)^2 & (\ln 6)^2 \\ (\ln 2)^3 & (\ln 3)^3 & (\ln 4)^3 & (\ln 5)^3 & (\ln 6)^3 \\ (\ln 2)^4 & (\ln 3)^4 & (\ln 4)^4 & (\ln 5)^4 & (\ln 6)^4 \end{vmatrix}$

1.27 Calcular el valor de los siguientes determinantes de orden n:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & \cdots & x \\ x & -1 & x & \cdots & x \\ x & x & -1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$