Capítulo 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales: Método de Gauss

2.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Generalidades

Uno de los problemas centrales del álgebra lineal es la resolución de ecuaciones lineales simultáneas.

Definición 2.1 *Un sistema de ecuaciones lineales, en concreto de m ecuaciones con n incógnitas, es un conjunto de m igualdades que se pueden escribir en la forma:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Los números $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n$ reciben el nombre de coeficientes y los $b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, m$, términos independientes[1]. Por último, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las incógnitas del sistema.

En el caso particular de que $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ el sistema se denomina **homogéneo.**

Definición 2.2 *La* **matriz del sistema** *dado (o* **matriz ampliada***) es el conjunto formado por los $m \times (n+1)$ números que se obtiene al escribir los coeficientes y los términos independientes, ordenadamente por filas y columnas, en la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Si quitamos la última columna de los términos independientes, la matriz que nos queda recibe el nombre de **matriz de los coeficientes** del sistema.

Al ser más cómodo trabajaremos solamente con la matriz del sistema, en lugar de hacerlo con todo el sistema, pues con ello simplificamos el proceso de resolución.

[1]En el caso de ser $a_{ij} \in \mathbb{C}$, [2.1] puede transformarse en un sistema de coeficientes y términos independientes reales con doble número de ecuaciones que el sistema inicial

2.1.1 Solución de un sistema de ecuaciones. Sistemas equivalentes

Definición 2.3 *Diremos que un conjunto de n números ordenados* $(\alpha_1, \alpha_2, , \cdots, \alpha_n)$ *es una solución del sistema [2.1] si satisfacen todas las ecuaciones del sistema.*

Definición 2.4 *Diremos que dos sistemas de ecuaciones son* **equivalentes** *si tienen las mismas soluciones.*

Obsérvese que no necesariamente han de tener el mismo número de ecuaciones.

Es fácil comprobar que las siguientes transformaciones, que denominaremos **elementales**, efectuadas sobre la matriz de un sistema nos conducen a otro sistema equivalente:

1. F_{ij} : Intercambiar el orden de las filas i, j (equivale a cambiar el orden de dichas ecuaciones).
2. $F_i(\alpha)$: Multiplicar la fila i por el escalar $\alpha \neq 0$ (equivalente a multiplicar la ecuación i-ésima por el escalar α no nulo).
3. $F_{ij}(\alpha)$: Sumar a la fila i la fila j multiplicada por el escalar α (equivalente a sumar a la ecuación i-ésima un múltiplo de la ecuación j-ésima).

2.1.2 Clasificación de un sistema de ecuaciones lineales

Atendiendo a la existencia o no de soluciones, los sistemas lineales se clasifican en:

Compatibles: si tienen al menos una solución.

Incompatibles: si no tienen solución.

A su vez los sistemas de ecuaciones lineales compatibles se clasifican, en función del número de soluciones, en:

Determinados: si tienen una única solución.

Indeterminados: si tienen más de una, en cuyo caso tendrán infinitas soluciones.

Notemos que los sistemas homogéneos tienen siempre, al menos, la solución $(0, 0, \cdots, 0)$ que recibe el nombre de solución trivial, por ello siempre son compatibles.

2.2 Discusión y resolución de sistemas por el método de Gauss

Es un método directo que nos da la solución exacta, si existe, en un número finito de pasos u operaciones.

Pretendemos resolver un sistema de ecuaciones lineales dado mediante su transformación en otro sistema equivalente que se resuelva fácilmente. Dichos sistemas tienen una forma concreta.

Definición 2.5 *Un sistema de ecuaciones lineales se denomina* **escalonado** *(o* **reducido***) si la matriz del sistema verifica que:*

1. *Todos los elementos por debajo de los* a_{ii} *para* $i = 1, 2, \cdots, n$ *son nulos.*
2. *El primer elemento no nulo de cada fila, llamado* **pivote***, está a la derecha del primer elemento diferente de cero (pivote) de la fila anterior.*
3. *Cualquier fila formada únicamente por ceros está bajo todas las filas con elementos diferentes de cero.*

Para conseguir nuestro objetivo utilizaremos el **método de eliminación de Gauss** que consiste en, utilizando transformaciones elementales sobre la matriz del sistema, pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente que sea escalonado. Los sucesivos pasos de este proceso son:

1. Localizamos en la primera columna no nula, de la matriz del sistema, el primer elemento no nulo **a**.
2. Intercambiamos la primera fila con la fila en la que se encuentra **a**.
3. Multiplicamos la primera fila por a^{-1}.
4. Sumando múltiplos adecuados de la primera fila a las demás, anulamos todos los elementos de la primera columna no nula menos el primero.
5. Repetimos el proceso, con la matriz que resulta de eliminar la primera fila y la primera columna, hasta conseguir un sistema escalonado.

En algunos casos podemos ahorrarnos cálculos no siguiendo a rajatabla los pasos del proceso explicado. Por ejemplo, si en la primera columna no nula hay un **uno** conviene, en el primer paso, tomar **a** como dicho elemento, pues así nos ahorraremos el paso tercero. Esto nos permite afirmar que dado un sistema, el sistema escalonado obtenido a partir de él no es único, aunque si hay ciertas características que son comunes a todos ellos, a saber:

- El número de filas no nulas (número de ecuaciones independientes que tiene el sistema) que coincide con el número de pivotes.
- El pivote de cada fila está situado siempre en la misma columna.

Finalmente, una vez obtenido el sistema escalonado, lo resolvemos por sustitución regresiva.

2.2.1 Aplicación del método de Gauss a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con o sin parámetros

Estudiamos la eliminación gaussiana como un método para la manipulación de sistemas de ecuaciones con el fin de obtener un sistema escalonado cuya resolución fuese más cómoda.

Nuestro objetivo ahora, es dar criterios generales que nos faciliten la resolución del sistema escalonado obtenido y, en consecuencia, del sistema inicialmente planteado [2.1].

Para ello dividimos las incógnitas de nuestro sistema $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$ en dos grupos, aquellas que corresponden a columnas con pivotes, que llamaremos **incógnitas básicas** y las restantes, correspondientes a las columnas sin pivotes, que llamaremos **incógnitas libres**. Al número de incógnitas libres se le denomina número de **grados de libertad** del sistema.

En el sistema escalonado puede ocurrir entonces lo siguiente:

1. Aparece una fila al menos, en la matriz del sistema, que tiene todos los elementos nulos salvo el último (es decir hay alguna ecuación de la forma $0 = b$ con $b \neq 0$). En dicho caso el sistema escalonado y por tanto el inicial [2.1] es incompatible.
2. En caso contrario el sistema [2.1] es compatible.
   (a) Si el número de pivotes coincide con el de incógnitas, es decir, no hay incógnitas libres, el sistema tiene solución única. La solución se obtiene por sustitución regresiva empezando por la última ecuación hasta llegar a la primera (determinado).

(b) Si el número de pivotes es menor que el de incógnitas, es decir, hay incógnitas libres, el sistema tiene infinitas soluciones (indeterminado). En este caso las soluciones se obtienen dando valores arbitrarios a las incógnitas libres y poniendo las incógnitas básicas, por sustitución regresiva, en función de dichos valores arbitrarios.

A veces aparecen sistemas de ecuaciones en los cuales ciertos coeficientes o términos independientes no tienen un valor fijo predeterminado, sino que son parámetros, y se nos pide estudiar el sistema para todos los valores posibles de dichos parámetros (**discutir el sistema**). Pues bien, en dichos casos, aplicamos también la técnica de eliminación gaussiana para clasificar estos sistemas atendiendo a los distintos valores de los parámetros.

2.2.2 Método de Gauss con pivoteo parcial y total

Cuando un proceso matemático no está definido para un valor particular de un parámetro, es muy posible que el proceso funcione numéricamente mal cerca de ese valor. El siguiente ejemplo ilustra las consecuencias de operar con un pivote pequeño.

Ejemplo. Por eliminación gaussiana y trabajando con dos y cuatro cifras respectivamente, resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} 0,0001\,x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

Este ejemplo prueba que la aparición de un pivote pequeño puede ser el anuncio de un desastre computacional. Por ello debemos modificar el método de eliminación de Gauss para evitar pivotes pequeños intercambiando las filas y las columnas de la matriz A. Concretamente:

Eliminación gaussiana con pivoteo total. Si en la etapa r-ésima del proceso de eliminación el pivote a_{rr} es demasiado pequeño,elegimos el elemento $a_{pq} = max\,\{|a_{ij}| \ / \ i,\, j \geq r\}$ como nuevo pivote. Para ello intercambiamos las filas r y p y las columnas r y q de forma que situamos el elemento a_{pq} en la posición (r,r). Obviamente hemos tomado $i,\, j \geq r$ para no perturbar los ceros que ya teníamos. Posteriormente continuamos la eliminación con el nuevo pivote.

Eliminación gaussiana con pivote parcial. En este caso la alternativa consiste en buscar solamente en la r-ésima columna; es decir, tomar
$a_{pr} = max\,\{|a_{ir}| \ / \ i \geq r\}$ como nuevo pivote. Para ello intercambiamos las filas r y p, continuando posteriormente el proceso de eliminación.

En la práctica, el método de Gauss con pivoteo total puede consumir mucho tiempo, computacionalmente hablando, pues para hallar el máximo en cada paso hay que buscar entre $(m - r + 1) \cdot (n - r + 1)$ elementos.

En el otro caso, además del ahorro de tiempo, las incógnitas de nuestro sistema no cambian de orden en el sistema reducido. Por ello, en general, es suficiente utilizar un pivoteo parcial.

2.3 Factorización L.U de una matriz.

Teorema 2.1 (Descomposición L.U) *Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}\ )$, siempre que no sea necesario realizar un intercambio de filas, se puede descomponer en la forma $A = L.U$ con $L \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}\ )$ triangular inferior con unos en la diagonal y $U \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}\ )$ triangular superior.*

Para el caso $m < n$, supuesto que únicamente utilicemos la transformación $F_{ij}(\alpha)$, sería:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & p_{22} & \cdots & u_{2m} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{mm} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde:

- La matriz U es la matriz escalonada resultado de aplicar a la matriz A las trasformaciones elementales por filas del tipo $F_{ij}(\alpha)$.
- los elementos p_{ij} de la diagonal de U, son los pivotes de la matriz A.
- El elemento $l_{ij}, i > j$ de la matriz L es exactamente el valor α cambiado de signo que aparece en la transformación elemental $F_{ij}(\alpha)$ que se aplicó a A para obtener la matriz U.

2.4 Aplicaciones de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales a la vida real.

- **Ejercicio de aplicación 1**
  La economía de la provincia de Zamora se basa en el tejido industrial de tres actividades básicas que son dependientes entre sí, pero que no dependen de industrias externas. Estas son la agricultura, la construcción y el textil. La fracción de cada producto que consume cada una de dichas actividades está dado por

		Producción		
		Agricultura	Construcción	Textil
Consumo	Agricultura	4/13	1/8	1/13
	Construcción	7/13	2/8	4/13
	Textil	2/13	5/8	8/13

  La componente a_{ij} denota la fracción de bienes *producidos* por la gente que trabaja en la industria j, que son *consumidos* por gente que trabaja en la industria i.

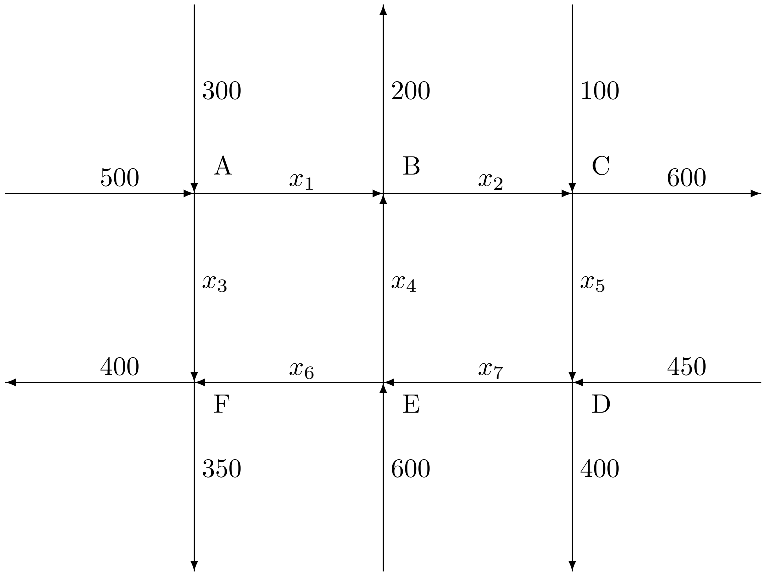
  Bajo la hipótesis de que los ingresos de agricultura, construcción y textil de Zamora son I_1, I_2 e I_3 respectivamente, determinar los ingresos de cada sector de la economía con la condición de equilibrio de que el gasto debido al consumo es igual al ingreso debido a las rentas del producto.

- **Ejercicio de aplicación 2**
  Tres productos químicos X, Y y Z, utilizados en los laboratorios de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Huelva, tienen los siguientes porcentajes de Fe, Zn y Cu:

	Fe	Zn	Cu
X	50	30	20
Y	40	30	30
Z	30	70	0

  ¿Cuánto de cada producto debe combinarse para obtener un nuevo producto que contenga 44% de Fe, 38% de Zn y 18% de Cu?

- **Ejercicio de aplicación 3**
  Para analizar el flujo de tráfico de una importante ciudad española como puede ser Barcelona, consideremos la siguiente red de calles de una dirección:



Los números indican la cantidad de coches/hora que pasan por ese punto. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_7$, representan el número de coches/hora que pasan de la intersección A a la B, de la B a la C, etc. Suponiendo que en las calles está prohibido aparcar, ¿qué valores tomarán las variables $x_1, x_2, \ldots, x_7$ en los siguientes casos?

a) Hay obras en la calle de D a E y por tanto queremos que en ese tramo el tráfico sea mínimo.

b) Análogamente, hay obras en la calle de D a F.

(*)Número de operaciones del método de Gauss

Si nos encontramos en la etapa k-ésima:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & \dots & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
0 & a_{22}^* & a_{23}^*\dots & \dots & \dots & a_{2n}^* & a_{2,n+1}^* \\
0 & 0 & a_{33}^*\dots & \dots & \dots & a_{3n}^* & a_{3,n+1}^* \\
\vdots & \vdots & \vdots\dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0\ \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} & a_{k,n+1} \\
0 & 0 & 0\ \dots & a_{k+1,k} & \dots & a_{k+1,n} & a_{k+1,n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots\dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0\ \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1}
\end{array}\right)$$

para hacer ceros por debajo del elemento a_{kk} son necesarias:

- $n-k$ divisiones.
- $(n+1-k)(n-k) = (n-k)^2 + n - k$ sumas.
- $(n+1-k)(n-k) = (n-k)^2 + n - k$ multiplicaciones.

En total son necesarias para llevar el sistema a la forma escalonada:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$ divisiones
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)^2 + (n-k)] = \frac{n(n^2-1)}{3}$ sumas y productos.

Por tanto el número total de operaciones es:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(n^2-1)}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+7)$$

Para resolver el sistema escalonado son necesarias:

- n divisiones.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ sumas y productos.

En total:

$$n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$$

En definitiva son necesarias las siguientes operaciones para resolver un sistema por el método de Gauss

$$\frac{1}{6}n(n-1)(4n+7) + n^2 = \frac{1}{6}n(4n^2+9n+7)$$

En consecuencia, para un n grande (es lo único que influye en las operaciones), el método de Gauss necesita para su implementación, alrededor de

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 \text{ operaciones}}$$

Desde el punto de vista computacional, el método de Gauss tiene la ventaja de que si la matriz de coeficientes del sistema (respectivamente el término independiente) no va a ser utilizada en lo sucesivo, en cada etapa del método los coeficientes de la matriz del nuevo sistema que se encuentra (resp. el término independiente) pueden ocupar la zona de memoria de los coeficientes de la matriz del sistema anterior (resp. el término independiente anterior), por lo que los coeficientes de la matriz triangular final pueden ocupar la zona de memoria de los de la matriz original (resp. el término independiente).

Ejercicios

2.1 Resolver, cuando sea posible, los sistemas:

$$a)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & & = & 5 \\ -x_1 & & +x_3 & & +2x_5 & = & 3 \\ & 3x_2 & +x_3 & -2x_4 & & = & -1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & & -x_3 & = & -3 \\ -x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

2.2 Utilizando el método de Gauss, estudiar los sistemas según los parámetros y resolverlos cuando sea posible:

$$a)\left\{\begin{array}{rrrcr} mx_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2x_1 \\ x_1 & +2mx_2 & -mx_3 & = & x_2 \\ x_1 & +mx_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +ax_2 & +x_3 & = & a+2 \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & = & -2a-2 \\ ax_1 & +x_2 & +x_3 & = & a \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +x_2 & = & a \\ 4x_1 & +2x_2 & = & 1+b \\ 5x_1 & +3x_2 & = & 2 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +ax_2 & +a^2x_3 & = & 1 \\ x_1 & +ax_2 & +abx_3 & = & a \\ bx_1 & +ax_2 & +a^2bx_3 & = & a^2b \end{array}\right.$$

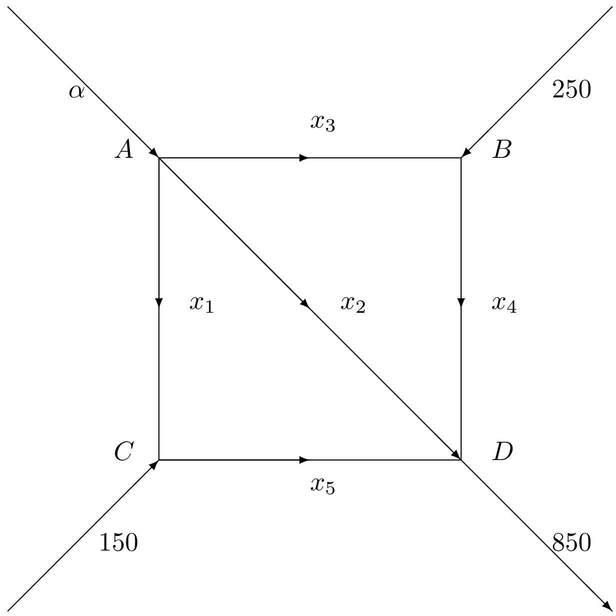
$$e)\left\{\begin{array}{rrrcr} (a+1)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +(a+1)x_2 & +x_3 & = & b \\ x_1 & +x_2 & +(a+1)x_3 & = & b^2 \end{array}\right.$$

2.3 Una industria utiliza tres máquinas en la elaboración de cuatro productos diferentes. Las máquinas se utilizan a pleno rendimiento 8 horas al día. El número de horas que cada máquina necesita para elaborar una unidad de cada producto es:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

¿Cuál es el número de unidades de cada producto que elaborará la industria en un día?

2.4 En una red telefónica como la de la figura las centrales $A, B,$ y C se encargan de distribuir las llamadas a la central D. Los números que aparecen en la figura son las llamadas/hora que entran o salen de las centrales A, B, C y D.



a) Hallar el valor de α que hace que sea posible la distribución de llamadas.

b) Para dicho valor de α, hallar el número de llamadas por cada tramo, si por una avería en la línea, se quiere que en el tramo BD el tránsito sea mínimo.

2.5 Hallar la factorización LU de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6 Calcular la inversa de las matrices A y B del ejercicio anterior por el método de Gauss-Jordan.

2.7 Resolver matricialmente el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + y + z & = & 1 \\ 3x - y + 4z & = & 0 \\ x + y + z & = & -2 \end{array} \right.$$

Hallar la factorización LU de la matriz del sistema.

2.8 Dado el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + z & = & 1 \\ x + aby + z & = & b \\ x + by + az & = & 1 \end{array} \right.$. Se pide:

1. Discutirlo según los valores de a y b.
2. Para $a = 2$ y $b = 1$, hallar A^{-1} por el método de Gauss-Jordan donde A es la matriz de los coeficientes.
3. ¿ Para qué valores de a y b admite descomposición LU la matriz de los coeficientes ? Calcular dicha descomposición para dichos valores.