Capítulo 3

Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

3.1 Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

Definición 3.1 *Sea V un conjunto dotado de una operación interna "$+$" que llamaremos* **suma***, y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo que define sobre V una operación externa "$\cdot$", que llamaremos* **producto por escalares***.*

$$\alpha \cdot \vec{a} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \vec{a} \in V$$

Diremos que $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ es un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$*, respecto de las operaciones* **suma** *y* **producto por escalares** *si se verifican las siguientes condiciones:*

1. *$(V, +)$ es un grupo conmutativo.*
2. *El producto por escalares cumple las siguientes propiedades:*

   2.1 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \qquad \forall \vec{a} \in V$

   2.2 $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{a} \in V$

   2.3 $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\alpha \cdot \vec{b}) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

   2.4 $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\beta \cdot \vec{a}) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{a} \in V$

Los elementos de V se denominan **vectores** *y los de $\mathbb{K}$* **escalares***.*

Aunque son operaciones distintas la suma de vectores y la de escalares, por comodidad se representan por el mismo signo. Igualmente omitimos el (.) del producto interno en $\mathbb{K}$. Cuando $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, el espacio vectorial se llama **real**.

Propiedades.-

1. $\forall \vec{a} \in V : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
3. $\forall \vec{a} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : -(\alpha \cdot \vec{a}) = (-\alpha) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (-\vec{a})$.
4. $\forall \vec{a} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ó $\vec{a} = \vec{0}$.

Definición 3.2 (Subespacio vectorial) *Sea $(V,+,\cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y F una parte no vacía de V, se dice que F es* **subespacio vectorial** *de V, si las restricciones a F de las dos operaciones de V, dotan a F de una estructura de espacio vectorial, es decir si:*

1. *$(F,+)$ es subgrupo de $(V,+)$* $\left(\forall\ \vec{a},\vec{b}\in F \Rightarrow \vec{a}-\vec{b}\in F\right)$

2. $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall\vec{a}\in F \Rightarrow \alpha\cdot\vec{a}\in F$

Teorema 3.1 (Caracterización de subespacios vectoriales) *Sea $(V,+,\cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea F una parte no vacía de V. F es subespacio vectorial de V si y sólo si:*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall\vec{a},\vec{b}\in F \Rightarrow \alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\in F$$

Obsérvese que:

- El vector nulo $\vec{0}$ pertenece a todos los subespacios de un espacio V.

- Un espacio vectorial V tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto $\{\vec{0}\}$, formado sólo por el vector nulo, que se llamará **subespacio nulo.** El mismo espacio V es un subespacio de sí mismo. Los demás subespacios de V, distintos de V y $\{\vec{0}\}$, se llaman **subespacios propios.**

3.1.1 Intersección y suma de subespacios

Definición 3.3 (Intersección de subespacios vectoriales) *Sea $(V,+,\cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Se define la* **intersección** $(\cap)$ *de dos subespacios vectoriales U y W de V, como el subconjunto de V que verifica:*

$$\vec{a}\ \in U\cap W \iff \vec{a}\ \in\ U\ \wedge\ \vec{a}\ \in\ W$$

Teorema 3.2 *La intersección de un número cualquiera de subespacios vectoriales de un espacio vectorial V es, a su vez, un subespacio vectorial de V.*

La unión de subespacios de un espacio vectorial V, en general no es un subespacio de V.

Definición 3.4 (Suma de subespacios) *Sea $(V,+,\cdot\mathbb{K})$ y sean U_1 y U_2 dos subespacios de V. Se llama suma de U_1 y U_2 al conjunto, que se denota $U_1 + U_2$:*

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1+\vec{u}_2\ /\ \vec{u}_1\in U_1,\ \vec{u}_2\in U_2\}$$

Teorema 3.3 *El conjunto U_1+U_2 es un subespacio de V; es más, se trata del menor de todos los subespacios que contienen a U_1 y U_2.*

Definición 3.5 (Suma directa) *Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial $(V,+,\cdot\mathbb{K})$y sea $L\subseteq V$, U_1+U_2 es* **suma directa de L**, *lo que se denota poniendo $U_1\oplus U_2=L$, si se verifica que $U_1+U_2 = L$ y $U_1\cap U_2 = \{\vec{0}\}$*

Si $L=V$ a los subespacios U_1, U_2 se les denominan subespacios suplementarios.

3.2 Dependencia e independencia lineal

3.2.1 Combinación lineal. Subespacio generado por un conjunto de vectores

Definición 3.6 (Combinación lineal) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Se llama* **combinación lineal** *de los vectores $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\ \in V$ a todo vector $\vec{x}$ de V de la forma:*

$$\vec{x}\ =\ \lambda_1 \vec{v}_1\ +\ \lambda_2 \vec{v}_2\ +\ ...\ +\ \lambda_p\ \vec{v}_p, \quad \textit{con}\ \lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_p\ \in \mathbb{K}.$$

Definición 3.7 (Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores) *Consideremos $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea $H\ =\ \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}\ \subset V$.*

El subconjunto $\{\lambda_1 \vec{v}_1\ +\ \lambda_2 \vec{v}_2\ +\ ...\ + \lambda_p \vec{v}_p\ /\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_p\ \in \mathbb{K}\}$ se denomina **variedad lineal generada por el conjunto H**. *Se suele escribir $L(H)$ o $\langle H \rangle$.*

Se demuestra fácilmente que $L(H)$ es un subespacio vectorial de V que recibe el nombre de subespacio vectorial **generado** (o engendrado) por $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ ...,\ \vec{v}_p$.

3.2.2 Independencia lineal. Sistema de generadores

Definición 3.8 (Dependencia lineal) *Sea $H = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.*

- *Se dice que H es un sistema* **linealmente independiente** *o sistema* **libre**, *si la única combinación lineal de ellos que vale $\vec{0}$ es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es, si*

$$\forall \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

- *Se dice que H es un sistema* **linealmente dependiente** *o sistema* **ligado** *si no es un sistema libre, esto es, si existen algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, no todos nulos tales que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}$.*
  Se dice que un vector **depende linealmente** *de otros si es combinación lineal de éstos.*

Propiedades

1. El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier familia de vectores. Por tanto, si un sistema contiene al vector nulo, entonces el sistema es ligado.
2. Un sistema de vectores es ligado si y sólo si alguno de sus vectores depende linealmente de los demás. Por tanto, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces el sistema $S = \{\vec{u}\}$ es libre. Un sistema $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$, formado por dos vectores, es ligado si y sólo si uno de ellos es proporcional al otro.
3. Si un sistema S de vectores es libre, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de S.
4. Si un sistema S de vectores es ligado, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de añadir algún vector a S.

Definición 3.9 (Sistema de generadores de un espacio o subespacio vectorial) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Se dice que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}$ de L son un* **sistema de generadores** *del subespacio vectorial L, si y sólo si, todo vector de L es combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_p\}$.*

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental de la independencia lineal) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial que está generado por un cierto sistema $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$. Si $I = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}$ es un sistema libre de vectores de L entonces se verifica que $h \leq p$.*

3.3 Base y dimensión

Definición 3.10 (Base de un espacio o subespacio vectorial) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y L un subespacio vectorial de V. Diremos que el sistema $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\} \subset L$ es una* **base** *de L si y sólo si verifica:*

1. *Forman un sistema de generadores de L.*
2. *Son linealmente independientes.*

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, los vectores:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

forman una base que se llama **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.5 (Teorema de existencia de la Base) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito (es decir, generado por un número finito de vectores) y sea $L \subseteq V,\ L \neq \{\vec{0}\}$ subespacio vectorial. Cualquier sistema generador de L incluye una base. En consecuencia, todo subespacio vectorial de tipo finito posee alguna base.*

Teorema 3.6 (Teorema de la dimensión) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y L un subespacio vectorial de V. Todas las bases de L tienen igual número de vectores. A este número se le llama* **dimensión** *del subespacio L y se representa por $dim(L)$.*

Se conviene en que el espacio $\{\vec{0}\}$ tiene dimensión 0.

Teorema 3.7 *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y L un subespacio vectorial de V. Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ es un sistema de vectores de L, entonces se verifica que:*

1. *Si S es un sistema generador de L, entonces $p \geq dim(L)$.*
2. *Si S es un sistema libre , entonces $p \leq dim(L)$.*
3. *Si S es generador de L y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.*
4. *Si S es libre y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.*

Por tanto, la dimensión de un subespacio vectorial L es el número máximo de vectores de L linealmente independientes. Además, la dimensión de L es el número mínimo de vectores de un sistema generador de L.

Teorema 3.8 (Teorema de Steinitz o de la base incompleta) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n, $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ una base de V y el conjunto $S = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ ...,\ \vec{v}_p\}$ un sistema libre de vectores de V, donde $p < n$. Entonces existe algún sistema S' de $n - p$ vectores de V, tal que $S \cup S'$ sea una base de V. Es más, los vectores de S' se pueden tomar de entre los de una base cualquiera $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de V.*

Teorema 3.9 (Fórmula de Grassmann) *Si U_1 y U_2 son dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, se verifica:*

$$dim(U_1)\ +\ dim(U_2)\ =\ dim(U_1 + U_2)\ +\ dim(U_1 \cap U_2)$$

3.3.1 Coordenadas de un vector. Unicidad

Lo que hace del concepto de base algo realmente útil es que, recurriendo a ellas, cualquier vector queda identificado mediante los coeficientes de la única combinación lineal que lo expresa en función de los vectores de la base. A estos coeficientes se les llama coordenadas. En un espacio vectorial de dimensión finita, si se dispone de una base, conocer un vector viene a ser lo mismo que conocer sus coordenadas.

Teorema 3.10 (Unicidad de la expresión de un vector en una base) *Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Todo vector de un subespacio vectorial $L \subseteq V$, $L \neq \{\vec{0}\}$ se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de una base de L.*

Definición 3.11 *Sea V espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $L \subseteq V$, $L \neq \{\vec{0}\}$ un subespacio vectorial de V. Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de L, (según el teorema anterior) para cada $\vec{x} \in L$ existen unos únicos escalares $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$. Entonces se dice que la n-upla $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ son las* **coordenadas** *del vector $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}$.*

3.3.2 Rango de un conjunto finito de vectores

Definición 3.12 *Se llama* **rango** *de un sistema S con un número finito de vectores de un cierto espacio vectorial V, y se denota por $rg(S)$, a la dimensión del subespacio que engendra S.*

Es decir $rg(S) = dim(L(S))$ =número máximo de vectores linealmente independientes que hay en S y, en consecuencia, la familia $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ es libre si y sólo si su rango es igual al número p de vectores que lo forman.
Además, en un espacio vectorial de dimensión finita n, un sistema de vectores es generador si y sólo si su rango es n.

3.3.3 Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n. Consideremos una variedad lineal (o subespacio vectorial) U generado por los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$. Sabemos que $\vec{x} \in U$, entonces $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_k\vec{u}_k$. Si cada vector lo referimos a la base $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de V, y desarrollando la expresión, obtendremos:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + ... + \lambda_k u_{k1} \\ x_2 & = & \lambda_1 u_{12} + \lambda_2 u_{22} + ... + \lambda_k u_{k2} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n} + ... + \lambda_k u_{kn} \end{array} \right.$$

A las ecuaciones (1) se le llaman **ecuaciones paramétricas** de la variedad lineal U.

Eliminando parámetros en las ecuaciones (1), aplicando el método de Gauss y considerando como incógnitas los parámetros λ_i obtendremos $n-k$ relaciones entre las componentes $(x_1, x_2, , ..., x_n)$, que se llaman **ecuaciones implícitas** de U.

Se verifica la siguiente relación:

$$\text{N}^o \text{ de ecuaciones implícitas linealmente independientes de } U = \dim V - \dim U.$$

3.4 Cambio de base en un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Hemos visto que cualquier vector $\vec{x}$ queda determinado de manera única conociendo un sistema de coordenadas respecto de una base de V. Ahora bien, si elegimos otra base de V, $\vec{x}$ tendrá otras coordenadas distintas a las anteriores. Como, a veces, hay que realizar cambios de base en los espacios vectoriales, nos preguntamos:
¿Qué relación guardan las coordenadas del vector respecto de ambas bases ?

Este problema se podrá resolver si se conocen las relaciones de dependencia entre los vectores de las dos bases, es decir, cuando se conozcan las coordenadas de los vectores de una base respecto de los de la otra.

Sean $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, ...,\ \vec{u}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_n\}$ bases de V. Supongamos que $\vec{v}_j = a_{j1}\vec{u}_1 + a_{j2}\vec{u}_2 + ... + a_{jn}\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\vec{u}_i \quad (j = 1,\ ...,\ n)$. En estas condiciones, cualquier vector $\vec{x} \in V$ puede expresarse en una u otra base de la siguiente manera:

$$\text{En } \mathcal{B}, \quad \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i$$

$$\text{En } \mathcal{B}', \quad \vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + ... + x'_n\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j\vec{v}_j$$

donde $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ son las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}$ y $(x'_1,\ x'_2,\ ...,\ x'_n)$ son las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}'$. En consecuencia:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\vec{u}_i\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x'_j\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ji}\big)\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i$$

es decir:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x'_j\ , \quad \forall\ i = 1,\ ...,\ n$$

que son las relaciones buscadas entre ambas coordenadas. Explícitamente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + ... + a_{n1}x'_n \\ x_2 & = & a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + ... + a_{n2}x'_n \\ \vdots & & \\ x_n & = & a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + ... + a_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

3.5 Aplicaciones Lineales. Definición y propiedades

Una vez que hemos estudiado la estructura de espacio vectorial, a continuación se estudiarán las aplicaciones lineales. Veremos sus propiedades más importantes y cómo se pueden representar mediante una matriz.

Definición 3.13 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que la aplicación $f : V \longrightarrow W$ es una* **aplicación lineal** *u* **homomorfismo** *de V en W si se verifica:*

(1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ *para todo* $\vec{x}, \vec{y} \in V$

(2) $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K},\ \ \vec{x} \in V$.

Las dos condiciones anteriores se pueden resumir en una:

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

En el caso en el que ambos espacios vectoriales coincidan, es decir, $U \equiv V$, recibe el nombre de **endomorfismo**. Si el homomorfismo es biyectivo se denomina **isomorfismo**.

Propiedades de las aplicaciones lineales.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre ellos. Se verifican las siguientes propiedades:

(1) $f(0) = 0$.

(2) $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(3) Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V y $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ son n elementos arbitrarios de W, existe una y sólo una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que

$$f(\vec{e}_k) = \vec{w}_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

(4) Las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal pero, en general, no conservan la independencia lineal.

(5) Si L es un subespacio vectorial de V, entonces $f(L)$ es un subespacio vectorial de W.

(6) Si E es un subespacio vectorial de W, entonces $f^{-1}(E)$ es un subespacio vectorial de V. (Recuérdese que si A y B son dos conjuntos y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación entre ellos, si $E \subset B$ se define $f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$.)

3.5.1 Operaciones con las aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. En el conjunto formado por las aplicaciones lineales entre esos espacios se pueden definir dos operaciones: la suma de aplicaciones lineales y el producto de un número por una aplicación lineal.

Suma de aplicaciones lineales

Si f y g son dos aplicaciones lineales de V en W se define su suma y se representa por $f + g$, como la aplicación que a cada elemento $\vec{x} \in V$ le asocia $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$, es decir, $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$:

$$\begin{array}{rccl} f+g: & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{x} & \longrightarrow & (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{array}$$

Producto de un número por una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ y un número $\lambda \in \mathbb{K}$, se define el producto de dicho número por esa aplicación lineal y se representa por $\lambda \cdot f$ o simplemente por λf, como la aplicación que a cada elemento $\vec{x} \in V$ le asocia $\lambda f(\vec{x})$, es decir, $(\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$:

$$\begin{array}{rccl} \lambda f: & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{x} & \longrightarrow & (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \end{array}$$

Teorema 3.11 *El conjunto $\mathcal{L}(V,W)$ formado por todas las aplicaciones lineales de V en W, tiene estructura de espacio vectorial respecto de las operaciones suma y producto por un número de $\mathbb{K}$, siendo su dimensión* $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

Composición de aplicaciones lineales

Esta operación no utiliza la estructura algebraica de espacio vectorial y puede definirse entre conjuntos cualesquiera.

Definición 3.14 *Dados los conjuntos V, W y U; si f es una aplicación de V en W y g es una aplicación de W en U tal que la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la* **composición de las aplicaciones** *f y g y lo representaremos por $g \circ f$, como la aplicación que asocia a cada $\vec{x} \in V$ el elemento $g(f(\vec{x}))$, es decir, $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$.*

$$\begin{array}{rcccccl} g \circ f: & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ & \vec{x} & \longrightarrow & f(\vec{x}) & \longrightarrow & (g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})). \end{array}$$

De esta definición se deduce que si f y g son aplicaciones, entonces $g \circ f$ también es una aplicación. Además, esta operación cumple la propiedad asociativa.

Definición 3.15 *Si f es una aplicación de V sobre sí mismo, se definen las potencias enteras de f de la siguiente manera:*

$$f^0 = i, \qquad f^n = f \circ f^{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1,$$

donde i representa la aplicación identidad de V, es decir, $i(\vec{x}) = \vec{x}$ para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición 3.1 *Si V, W y U son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ son aplicaciones lineales tales que la imagen de f está contenida en el dominio de g, entonces la composición $g \circ f : V \longrightarrow U$ es una aplicación lineal.*

3.5.2 Representación matricial de las aplicaciones lineales

La propiedad (3) de las aplicaciones lineales asegura que una aplicación lineal f de un espacio vectorial V de dimensión n en el espacio vectorial W de dimensión m, queda determinada dando los transformados mediante f de una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de V. Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ es una base del espacio W, como cada elemento $f(\vec{e}_k)$ pertenece a W se podrá expresar de manera única como una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_1$, es decir,

$$f(\vec{e}_k) = a_{1k}\vec{u}_1 + a_{2k}\vec{u}_2 + \cdots + a_{mk}\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{u}_i, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora bien, si $\vec{x}$ es un vector cualquiera de V se podrá expresar de manera única como una combinación lineal de los elementos $\vec{e}_k$ por ser $\mathcal{B}$ una base:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k.$$

Aplicando f a los dos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\vec{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)\vec{u}_i. \end{aligned}$$

Por otra parte, $f(\vec{x}) \in W$ y como $\mathcal{B}_1$ es una base se podrá expresar como una combinación lineal de sus elementos:

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \cdots + y_m\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} y_i\vec{u}_i.$$

Como las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, se sigue que

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Se deduce de aquí que **fijadas las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$ en V y W**, respectivamente, a cada aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ le corresponde una matriz $A = [a_{ik}]$ de dimensiones $m \times n$ unívocamente determinada.

Recíprocamente, dados los espacios vectoriales V y W de dimensiones n y m, respectivamente, fijadas en ellos las bases $\mathcal{B}$ en V y $\mathcal{B}_1$ en W, a la matriz $B = [b_{ik}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ le corresponde la aplicación lineal $g : V \longrightarrow W$ unívocamente determinada en virtud de la propiedad (3) antes señalada, definiendo

$$g(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} b_{ik}\vec{u}_i, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 3.12 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m, respectivamente. Fijadas sendas bases en V y W, se verifica que los espacios vectoriales de las aplicaciones lineales $\mathcal{L}(V, W)$ y de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ son isomorfos.*

En el caso en que $V = \mathbb{K}^n$ y $W = \mathbb{K}^m$, fijadas las respectivas bases canónicas en $\mathbb{K}^n$ y en $\mathbb{K}^m$, en virtud del isomorfismo anterior se suelen identificar la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ con la matriz correspondiente $A = [a_{ij}]$, donde cada columna

$$f(\vec{e}_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, está formada por las coordenadas del vector $f(\vec{e}_j)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^m$.

Nota. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se denomina **forma lineal** o **funcional lineal** de V a cualquier aplicación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $\mathcal{B}$ es una base de V a cada forma lineal de V le corresponde una matriz fila, es decir, un vector $\omega \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \omega^t\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición 3.2 *Sean V, W y U espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n, m y p, respectivamente; fijadas las bases $\mathcal{B}$ de V, $\mathcal{B}_1$ de W y $\mathcal{B}_2$ de U, si a la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ le corresponde la matriz A y a la aplicación lineal $g : W \longrightarrow U$ le corresponde la matriz B, entonces a la composición de aplicaciones $g \circ f : V \longrightarrow U$ le corresponde la matriz producto BA.*

3.6 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre ellos.

Definición 3.16 (Núcleo) *Se denomina* **núcleo** *de la aplicación lineal f y se representa por $\mathcal{N}(f)$ o por $Ker(f)$, al conjunto de todos los elementos de V que mediante f se transforman en el vector nulo de W, es decir,*

$$\mathcal{N}(f) = Ker(f) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = 0\}.$$

De esta definición se sigue que $\mathcal{N}(f) = f^{-1}(0)$ y como $\{0\} \subset W$ es el subespacio vectorial nulo de W, entonces $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio vectorial de V por la propiedad (6) anterior. Se denomina **nulidad** de f a la dimensión del subespacio vectorial $\mathcal{N}(f)$.

Definición 3.17 (Imagen) *Se denomina* **imagen** *de la aplicación lineal f y se representa por $\mathcal{R}(f)$ o por $Img(f)$, al conjunto formado por todos los elementos de W que son imagen de algún elemento de V, es decir,*

$$\mathcal{R}(f) = Img(f) = \{\vec{y} \in W : \exists\, \vec{x} \in V, \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Al ser $\mathcal{R}(f) = f(V)$ y ser V un subespacio vectorial de sí mismo, se sigue que $\mathcal{R}(f)$ es un subespacio vectorial de W por la propiedad (5) anterior. A la dimensión del subespacio vectorial $\mathcal{R}(f)$ se denomina **rango** de f.

Proposición 3.3 *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se verifica que*

$$dim\ Im f + dim\ Ker f = \ dim\ (V).$$

Proposición 3.4 *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se verifica que*

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$$

3.6.1 Aplicaciones lineales biyectivas

Definición 3.18 *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación biyectiva y además es lineal, entonces se dice que es un* **isomorfismo** *entre esos espacios vectoriales. En este caso se dice que los espacios V y W son* **isomorfos** *y se representa así: $V \approx W$.*

En el caso particular de que $V = W$ la aplicación lineal biyectiva se denomina **automorfismo**.

Propiedades.

Los isomorfismos, al ser aplicaciones lineales, poseen las seis propiedades dadas anteriormente; pero además tienen las siguientes:

(7) Si $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces la aplicación inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es una aplicación lineal.

(8) Los isomorfismos conservan la independencia lineal.

(9) Si f es una aplicación lineal sobreyectiva de V en W, entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathcal{N}(f) = \{0\}$.

(10) Dos espacios vectoriales son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.

Obsérvese que todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, son isomorfos a $\mathbb{K}^n$.

3.7 Cambio de base y aplicaciones lineales

Hemos demostrado que fijadas unas bases $\mathcal{B}$ en V y $\mathcal{B}_1$ en W, a cada aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ le corresponde una matriz A. Ahora bien, si consideramos la bases $\mathcal{B}'$ en V y $\mathcal{B}'_1$ en W, a la misma aplicación lineal f anterior le corresponderá otra matriz C. La pregunta inmediata es: ¿qué relación existe entre las matrices A y C?

De acuerdo con lo anterior

1. La representación matricial de la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$ será $\vec{y} = A\vec{x}$;
2. La representación matricial de f respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}_1'$ será $\vec{y}' = C\vec{x}'$;
3. Si las fórmulas de cambio de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ son $\vec{x} = P\vec{x}'$;
4. Y de la base $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1'$ son $\vec{y} = Q\vec{y}'$,

basta sustituir en $\vec{y} = A\vec{x}$ y se tiene que $Q\vec{y}' = AP\vec{x}'$, de donde se sigue que $\vec{y}' = Q^{-1}AP\vec{x}'$, es decir, que $C = Q^{-1}AP$. Como sabemos, las matrices P y Q son no singulares. Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases en el espacio vectorial V, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_1'$ bases en el espacio W y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal representada por la matriz A respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$. Entonces la matriz que representa a f respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}_1'$ es $Q^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y Q la matriz de paso de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1'$.*

En muchos casos los espacios V y W coinciden y entonces se considera la misma base en el espacio origen y en el espacio final. En estos casos la relación entre las matrices A y C es más sencilla, como se muestra a continuación.

Corolario 3.13 *Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio vectorial V y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal representada por la matriz A respecto de la base $\mathcal{B}$. Entonces la matriz que representa a f respecto de la base $\mathcal{B}'$ es $P^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Definición 3.19 *Diremos que dos matrices cuadradas A y C son semejantes si existe una matriz no singular P tal que $C = P^{-1}AP$. O, equivalentemente, si A y C representan a la misma aplicación lineal respecto de bases distintas.*

(*)Rango de una matriz

Definición 3.20 *Se denomina* **rango de la matriz** *A y se representa por $r(A)$ al rango de f donde f es la aplicación lineal con matriz A respecto de ciertas bases (coincide con la dimensión del espacio generado por las columnas de A; $\mathcal{R}(A)$); y se denomina* **nulidad** *de A a la dimensión del núcleo de A ($ker(f) = \mathcal{N}(A)$), representándose por $n(A)$.*

La dimensión de la imagen de una aplicación lineal no depende de las bases de referencias utilizadas en cada uno de los espacios vectoriales, por tanto $r(BAC) = r(A)$, con B y C matrices no singulares. Es decir, al multiplicar una matriz (tanto a la izquierda como a la derecha) por matrices no singulares, el rango no se altera. El mismo razonamiento es trasladable a la nulidad; $n(BAC) = n(A)$, con B y C matrices no singulares.

Teorema 3.2 *Sea A una matriz no nula $m \times n$. Entonces $r(A) = r$ si y sólo si existen matrices no singulares X e Y, de órdenes m y n, respectivamente tales que*

$$XAY = \begin{bmatrix} I_r & \Theta_1 \\ \Theta_2 & \Theta_3 \end{bmatrix}$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r, $\Theta_1 \in \mathcal{M}_{n-r}$, $\Theta_2 \in \mathcal{M}_{m-r}$ y $\Theta_3 \in \mathcal{M}_{(m-r)\times(n-r)}$.

De este Teorema se deducen las siguientes propiedades del rango de una matriz que recogemos en el siguiente Corolario.

Corolario 3.14 *Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. Entonces se tiene:*

1. $r(A) = r(A^t)$.
2. $r(AB) \leq r(A)$.
3. $r(AB) \leq r(B)$.

Dada una matriz A hemos considerado el espacio vectorial generado por sus columnas y hemos definido el rango de dicha matriz como el número de columnas linealmente independientes. De manera análoga podemos considerar el espacio vectorial generado por las filas de A y definir su rango como el número de filas linealmente independientes. La primera de las propiedades de este Corolario nos dice que en toda matriz el rango por filas es igual al rango por columnas.

Teorema 3.3 (Rouché-Frobenius) *Sea A una matriz $m \times n$, el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = b$ tiene solución si y sólo si $r([A, b]) = r(A)$. En dicho caso si:*

1. $r([A, b]) = r(A) = n$ *(número de incógnitas), el sistema es compatible determinado (SCD).*
2. $r([A, b]) = r(A) < n$ *el sistema es compatible indeterminado (SCI).*

Teorema 3.4 (Estructura de las soluciones) *Sea $\vec{x}_0$ una solución de $A\vec{x} = b$. Entonces el conjunto de todas las soluciones de $A\vec{x} = b$ es la variedad lineal $\vec{x}_0 + \mathcal{N}(A)$.*

Nota:

Como consecuencia de los teoremas anteriores, se verifica:

- Si $r(A) = m$, entonces $A\vec{x} = b$ tiene solución.
- Una solución de $A\vec{x} = b$ es única si y sólo si $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.
- Si $n > m$ entonces $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$; luego en el caso de que haya soluciones, hay infinitas.

Ejercicios

3.1 Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \{(x, 0, z)/x, z \in \mathbb{R}\}$
(b) $B = \{(x, y, z)/2x + y + z = 4\}$
(c) $C = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{Z}\}$

3.2 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales:

(a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$
(b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 = 0\}$
(c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid m_i < x_i < M_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ donde m_i y M_i son constantes.
(d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$

3.3 Establecer la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

(a) $\{(1, 2, -1),\ (1, 0, -3),\ (3, 10, 1)\}$
(b) $\{(a, 1, 0),\ (1 - a, 1 + a, 2),\ (5a + 1, 1 - 2a, -a - 2)\}$
(c) $\{(1, 4, a, b),\ (1, 2, -1, 2),\ (0, 1, 2, 1)\}$

3.4 Sea $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Estudiar si el siguiente conjunto $B' = \{\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

3.5 Determinar λ y μ para que el subespacio de $\mathbb{R}^4$
$L = \langle(\lambda, 0, \lambda, 0),\ (3, \mu, 1, \mu),\ (1, 1, 0, 1)\rangle$ tenga dimensión 2 ó dimensión 3.

3.6 Hallar dos bases diferentes de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

(a) El subespacio formado por los vectores cuyas coordenadas suman 0.
(b) El subespacio formado por los vectores $(a, b - a, a + b, b)$ con a y b en $\mathbb{R}$.
(c) El subespacio formado por los vectores cuyas dos primeras coordenadas son iguales.

3.7 Sean $U_1 = \langle(1, 2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 2, 1), (3, 2, 3, 4, 3), (7, 4, 7, 10, 7)\rangle$ y
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid\ x_1 - x_2 = 0\ ,\ x_2 + x_4 = 0\}$. Hallar:

(a) Base y dimensión de U_1 y U_2
(b) Base y dimensión de $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$
(c) ¿Es $(1, 2, 1, 2, 1)$ combinación lineal de $(1, 2, 1, 0, 1)$ y $(1, 0, 1, 2, 1)$?
(d) ¿Existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que $(\alpha, \beta, \gamma, 0, \gamma - \beta) \in U_2$?
(e) ¿$\langle(1, 2, 1, 0, 1)\ ,\ (1, 0, 1, 2, 1)\rangle = \langle(3, 2, 3, 4, 3)\ ,\ (7, 4, 7, 10, 7)\rangle$?

3.8 Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$: $(1,1,1,1),(1,2,-1,0),(1,-1,5,\alpha),(1,0,\beta,2)$

(a) Calcular el número de vectores independientes según los valores de α y β y ampliarlo en cada caso a una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Para $\alpha=3,\beta=1$, dar condiciones que debe verificar un vector $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, que verifica también $x_1+x_2+x_3=0; x_4=0$, para que sea dependiente con ellos.

(c) Dada $M=\{x_1+x_2+x_3=0; x_4=0\}$, hallar otra variedad N que verifique: $M+N=\{x_1+x_2+x_3=x_4\}$, $M\cap N=\{x_4=0; x_1+2x_2=0; x_1+2x_3=0\}$

3.9 Extender a una base de $\mathbb{R}^4$ los siguientes conjuntos de vectores:

(a) $\{(1,0,-1,2),\ (2,0,3,1)\}$

(b) $\{(1,0,1,1),\ (-1,-1,0,0),\ (0,1,1,0)\}$

3.10 Determinar una base, la dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio V de $\mathbb{R}^4$ dado por las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{lcrrr} x & = & \alpha & -\beta & +2\gamma \\ y & = & 2\alpha & +\beta & \\ z & = & 2\alpha & & -7\gamma \\ t & = & & \beta & +\gamma \end{array}\right.$$

3.11 Sean $L_1=L(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$, con $\vec{u_1}=(2,1,0,-1)$, $\vec{u_2}=(1,-1,0,0)$, $\vec{u_3}=(1,1,1,1)$, y $L_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z-t=0\}$.
Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de L_1, L_2, L_1+L_2 y $L_1\cap L_2$

3.12 Sean $\mathcal{B}_1=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ y $\mathcal{B}_2=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ bases de V, sabiendo que $\vec{u_1}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$, $\vec{u_2}=\vec{v_1}-\vec{v_3}$, $\vec{u_3}=\vec{v_2}+2\vec{v_3}$. Hallar:

(a) Ecuación del cambio de base.

(b) Sabiendo que $\vec{v}=(3,2,1)$ en $\mathcal{B}_1$, calcular las coordenadas de $\vec{v}$ en $\mathcal{B}_2$

(c) Sabiendo que $\vec{v}=(1,0,1)$ en $\mathcal{B}_2$, calcular las coordenadas de $\vec{v}$ en $\mathcal{B}_1$.

3.13 Sea $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0,\ x-2y=0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, referido a la base canónica. Calcular las ecuaciones de U con respecto a la base $\mathcal{B}=\{(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$

3.14 Sean $\mathcal{B}_1=\{\vec{u_1}(1,0,0),\ \vec{u_2}(0,1,1),\ \vec{u_3}(1,0,1)\}$ y $\mathcal{B}_2=\{\vec{v_1}(0,0,1),\ \vec{v_2}(0,1,1),\ \vec{v_3}(1,1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0,\ x+y=0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones están referidas a $\mathcal{B}_1$. Se pide:

(a) Ecuaciones de U en $\mathcal{B}_2$.

(b) Calcular una base respecto de la cual las ecuaciones de U sean $x=0$, $y=0$.

3.15 Sea $H=\{(x,y,z) \mid x-y-z=0,\ x+y=0\}$ referido a la base canónica. Encontrar una base respecto de la cual el subespacio H venga dado por

$$H=\{(x,y,z) \mid x=0,\ y-z=0\}$$

3.16 Razonar cuáles de las siguientes aplicaciones, entre los espacios considerados, son lineales y estudiar para las que lo son su inyectividad o suprayectividad:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, 0, 2y)$.
(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (xz, -y, -2z)$.
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xyz$.

3.17 Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x, -y, z, x + y + z), g(x, y, z) = (-x, y, 3z, -x - y + z).$$

(a) Hallar la expresión matricial del homomorfismo $f + g$ respecto de las bases canónicas.
(b) Idem para $3f - 2g$.

3.18 Dados los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

- $f(1, 0, 1) = (2, 1, -1),\ f(0, 1 - 1) = (0, 1, -1),\ f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
- $f(2, 0, 1) = (4, -3, 12),\ f(1, 1, 1) = (1, -2, 13),\ f(-1, 2, -1) = (0, 2, -4)$.
- $f(-1, 1, 3) = (6, -4, 16),\ f(-2, 1, 1) = (-2, -5, 1),\ f(3, 2, -1) = (1, 14, -12)$.

Se pide:

(a) Hallar las ecuaciones de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
(b) Hallar una base del $ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$, así como sus ecuaciones implícitas y paramétricas.

3.19 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y, x + 2y + z, x - z)$. Hallar:

(a) $f(E)$ siendo $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
(b) $f^{-1}(U)$ siendo $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

3.20 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal. Sean $\mathcal{B}\{\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}\}$ y $\mathcal{B}'\{\vec{u_1},\ \vec{u_2}\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. La aplicación lineal viene definida por $\left\{\begin{array}{rcr} f(\vec{e_1}) & = & \vec{u_1} + 3\vec{u_2} \\ f(\vec{e_2}) & = & -\vec{u_1} + 2\vec{u_2} \\ f(\vec{e_3}) & = & \vec{u_1} - 3\vec{u_2} \end{array}\right.$

Se pide:

(a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo e imagen de f.
(b) Siendo $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0,\ x - y = 0\}$ y $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 0\}$. Hallar $f(E)$ y $f^{-1}(U)$.

3.21 Se considera el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que hace corresponder a los vectores $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$, los vectores $(1, 0), (0, 2), (1, 1)$. Se pide:

(a) Matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
(b) Subespacio transformado de $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\}$.
(c) Ecuación de $f(V)$ en la base $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$.

3.22 Hallar una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que :

(a) f es lineal.
(b) $f(1,0,0)$ es proporcional a (0,0,1).
(c) $f^2 = f$.
(d) $ker(f) = \{(x,y,z) \mid x+z=0\}$.

¿Es f única?

3.23 Determinar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $ker(f)$ esté engendrado por (-1,0,0,1) y (1,3,2,0) e $Im(f)$ engendrado por (1,1,1) y (0,-2,1).

3.24 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $ker(f) = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$ y $f(1,1,0) = (1,1,1)$. Se pide:

(a) Ecuación de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
(b) Encontrar dos bases en $\mathbb{R}^3$, respecto de las cuales $f(x,y,z) = (x,0,0)$.

3.25 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y,\ y-z)$ respecto de las bases canónicas. Encontrar dos bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respecto de las cuales la aplicación lineal tenga por ecuaciones $f(x,y,z) = (x,y)$.

3.26 Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definidas por:
$f(x,y,z) = (x+y,\ y-z,\ x+y+z,\ 2x+3y)$, $g(x,y,z,t) = (x-y,\ z+t,\ x+z)$

(a) Hallar el espacio imagen de f y su dimensión.
(b) Obtener una base del núcleo de g.
(c) Hallar la matriz de $F = f \circ g$.

3.27 Sean F y G subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$F \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad G \equiv x_1 = x_2 = 0$$

Se pide:
Comprobar que F y G son complementarios y determinar la matriz de la aplicación f, que a cada vector $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, con $\vec{u} \in F$ y $\vec{v} \in G$, le hace corresponder $f(\vec{x}) = \vec{u}$.