Capítulo 4

Autovalores y autovectores. Diagonalización y formas canónicas

Dado un homomorfismo, nos hemos planteado el problema de elegir bases cualesquiera de manera que la matriz del homomorfismo sea diagonal. Con los endomorfismos el problema se nos complica un poco. Si V es un espacio vectorial y $f \in End(V)$, dada una base de V, existirá una matriz cuadrada A, de tal forma que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. La matriz A depende de la base de V que elijamos. La **diagonalización** consiste en encontrar una base de V en la que la matriz del endomorfismo f tenga forma diagonal.

Existen varias formas de diagonalizar un endomorfismo. Nos vamos a centrar en este tema en la diagonalización por semejanza, es decir, buscamos que la nueva matriz del endomorfismo sea diagonal y semejante a la actual.

4.1 Autovalores y Autovectores. Propiedades

4.1.1 Matrices semejantes

Definición 4.1 (Matrices semejantes) *Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Decimos que A es semejante a B si existe una matriz cuadrada P invertible tal que $A = P^{-1}BP$.*

Propiedades de las matrices semejantes

1. Si A es semejante a B, entonces $|A| = |B|$.
2. Si A es semejante a B, A^k es semejante a B^k.
3. Si A es semejante a B y p(t) es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces $p(A)$ es semejante a $p(B)$.
4. Si A es semejante a B y A es regular, entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

4.1.2 Autovalores y autovectores

Definición 4.2 (Autovalor y autovector) *Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un* **autovalor** *o* **valor propio** *de f si $\exists\ \vec{x} \in V,\ \vec{x} \neq \vec{0}\ /\ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. El vector $\vec{x}$ se llama* **autovector** *o* **vector propio** *asociado al autovalor λ.*

Obsérvese que los autovectores son aquellos cuyos transformados tienen su misma dirección.

Definición 4.3 *Dada una matriz cuadrada A, llamamos* **autovalores** *y* **autovectores** *de A, a los* **autovalores** *y* **autovectores** *del endomorfismo f de matriz asociada A, es decir* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es un* **autovalor** *o* **valor propio** *de A si* $\exists\ \vec{x} \in V,\ \vec{x} \neq \vec{0}\ /\ A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. *El vector* $\vec{x}$ *es el* **autovector asociado al autovalor** λ.

Definición 4.4 (Espectro de f) *Se llama* **espectro** *de f, y se designa* $\sigma(f)$ *, al conjunto de todos los autovalores del endomorfismo f*

$$\sigma(f) \ \equiv\ \{\lambda \in \mathbb{K}\ /\lambda \text{ es } \textbf{autovalor} \text{ de } f\ \}$$

Definición 4.5 (Espectro de A) *Se llama* **espectro** *de A, y se designa* $\sigma(A)$ *, al conjunto de todos los autovalores de la matriz A*

$$\sigma(A) \ \equiv\ \{\lambda \in \mathbb{K}\ /\lambda \textit{ es } \textbf{autovalor} \textit{ de } A\}$$

Definición 4.6 (Subespacio propio) *Al conjunto de todos los autovectores asociados a un autovalor* λ*, junto con el vector* $\vec{0}$ *se denomina subespacio propio asociado al autovalor* λ *y se suele denotar* A_λ.

$$A_\lambda = \{\vec{x}\ /\ A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \cup \{\vec{0}\}$$

Propiedades de los autovalores.

1. Dos autovalores distintos no tiene autovectores comunes, es decir si $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \sigma(A),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.

   Esto es equivalente a decir que "`Un autovector` $\vec{x}$ `está asociado a un único autovalor`". El recíproco, no es cierto.

2. A y A^t tienen los mismos autovalores.

3. Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es un autovalor de kA.

4. Si λ es un autovalor de A, $\lambda - k$ es un autovalor de $A - kI$.

5. Si λ es un autovalor de A, y A es regular $(\mid A \mid \neq 0)$, $\dfrac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

6. Autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

7. Si λ es autovalor de A, $\Rightarrow$ λ^k es autovalor de A^k.

4.1.3 Polinomio característico

Dado $f \in End(V)$, fijada una base de V, en dicha base f tendrá asociada una matriz cuadrada A. La definición dada en 4.3 es equivalente a la expresión $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$ o bien $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

Esta última relación representa un sistema homogéneo. Recordemos que para que un sistema homogéneo admita solución distinta de la trivial, debe ocurrir que el determinante de la matriz del sistema sea cero, es decir

$$\mid A - \lambda I \mid = 0$$

Para obtener pues, los autovalores de A, bastará resolver la ecuación $\mid A - \lambda I \mid = 0$, llamada *ecuación característica* de A.

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando la expresión $|A - \lambda I|$ se obtiene el polinomio en λ , de grado n

$$P(\lambda) \;=\; a_0\lambda^n \;+\; a_1\lambda^{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_{n-1}\lambda \;+\; a_n$$

llamado **polinomio característico** de A.

Los autovalores de A son, pues, los ceros de su polinomio característico.

Definición 4.7 (Multiplicidad algebraica) *Si λ_0 es una raíz de multiplicidad α de la ecuación característica de A, se dirá que λ_0 es un autovalor de orden α de A. A α se le llama* **multiplicidad algebraica** *de λ y se suele notar $m_a(\lambda)$.*

Se observa fácilmente que:

$$a_0 = (-1)^n \qquad a_1 = (-1)^{n-1}\text{traza}(A) \qquad a_n = |A|$$

donde la traza de A se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A.

Teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los coeficientes de una ecuación y sus soluciones, se observa que si $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ son las raíces del polinomio característico (no necesariamente autovalores de A, pues pudiera darse el caso de que $\lambda_i \notin \mathbb{K}$), entonces

$$\lambda_1 \;+\; \lambda_2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n = \text{traza}(A) \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

Una vez resuelta la ecuación característica y obtenidos, por tanto, los autovalores de A, para calcular los autovectores habrá que resolver el sistema $(A \;-\; \lambda_i I)\vec{x} \;=\; \vec{0}$ para obtener los autovectores correspondientes.

Nota:
De la igualdad $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n =\mid A \mid$, se deduce que si A es una matriz regular, no puede tener ningún autovalor nulo.

Proposición 4.1 *Si B y A son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos autovalores.*

Nota:
De la proposición anterior se deduce que el polinomio característico de la matriz de un endomorfismo no depende de la base que hayamos elegido, sino del endomorfismo.

4.1.4 Subespacios invariantes

Definición 4.8 (Subespacio invariante de un endomorfismo) *Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V, y sea $U \subset V$ un subespacio. Se dice que U es invariante por f si $\forall\ \vec{u} \in U \;\Rightarrow\; f(\vec{u}) \in U$ o, lo que es lo mismo, $f(U) \subset U$.*

Proposición 4.2 *El subespacio propio A_λ asociado a un autovalor λ de una matriz (o endomorfismo) es un subespacio vectorial invariante.*

Definición 4.9 (Multiplicidad geométrica) *Se llama* **multiplicidad geométrica** *de λ y se denota $m_g(\lambda)$, al número de autovectores linealmente independientes asociados asociados a λ es decir*

$$m_g(\lambda) = \dim(A_\lambda)$$

Proposición 4.3 *La dimensión del subespacio A_λ viene dado por*

$$dim(A_\lambda) = dim(\mathcal{N}(A - \lambda I)) = dim(V) - rango(A - \lambda I)$$

Proposición 4.4 *Si λ es un autovalor de A con multiplicidad algebraica r, entonces $1 \leq \dim(A_\lambda) \leq r$, es decir*

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

4.1.5 Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 4.1 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Toda matriz cuadrada A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es raíz de su polinomio característico.*

Es decir, si $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ es el polinomio característico y Θ_n es la matriz nula de orden n , entonces

$$p(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = \Theta_n$$

Aplicación al cálculo de A^{-1}

Sea A una matriz invertible (es decir, $|A| \neq 0$)
Teniendo en cuenta que $a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = \Theta_n$, se obtiene

$$a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A = -a_nI$$

Al ser $a_n = |A| \neq 0$,

$$I = -\frac{a_0}{a_n}A^n - \frac{a_1}{a_n}A^{n-1} - \frac{a_2}{a_n}A^{n-2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}A$$

Multiplicando por A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{a_0}{a_n}A^{n-1} - \frac{a_1}{a_n}A^{n-2} - \frac{a_2}{a_n}A^{n-3} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}I$$

4.2 Matrices diagonalizables.

Definición 4.10 (Matriz diagonalizable) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diremos que A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si es semejante a una matriz diagonal.*

Dado un espacio vectorial V, fijada una base $\mathcal{B}$, un endomorfismo f de V, tendrá asociada una matriz A, donde $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$. Si conseguimos encontrar una base $\mathcal{B}'$ formada por autovectores, $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$, entonces

$$\begin{array}{c} f(\vec{x}_1) = \lambda_1\vec{x}_1 = (\lambda_1, 0, 0, \cdots, 0) \\ f(\vec{x}_2) = \lambda_2\vec{x}_2 = (0, \lambda_2, 0, \cdots, 0) \\ f(\vec{x}_3) = \lambda_3\vec{x}_3 = (0, 0, \lambda_3, \cdots, 0) \\ \vdots \\ f(\vec{x}_n) = \lambda_n\vec{x}_n = (0, 0, 0 \cdots, \lambda_n) \end{array}$$

y, por tanto, referida a esta base, la matriz del endomorfismo será, pues, diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

siendo $D = P^{-1}AP$, con P la matriz del cambio de base, que resulta ser la matriz que tiene por columnas los autovectores de A colocados en el mismo orden en el que se colocan los autovalores de f en la diagonal.

Así pues, es bastante importante obtener la mencionada base formada por autovectores. ¿ Es siempre posible encontrar dicha base? En general, la respuesta es **NO**.

Teorema 4.2 *La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es*

(a) que el polinomio característico se pueda factorizar en $\mathbb{K}$

(b) que la multiplicidad de cada autovalor λ sea igual a la dimensión del subespacio propio asociado A_λ, es decir, que las multiplicidades algebraica y geométrica coincidan $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

4.3 Forma canónica de Jordan.

Hasta ahora hemos visto cuándo una matriz es diagonalizable. Hemos dado condiciones en las cuales una matriz cuadrada A era semejante a una matriz diagonal.

Ahora bien, ese resultado no es siempre posible (basta encontrar autovalores múltiples cuya multiplicidad algebraica no coincida con su multiplicidad geométrica, o bien que el polinomio característico no se pueda factorizar en el cuerpo en que estemos trabajando).

Ejemplo.-
La matriz cuadrada de orden n:

$$J_\lambda^{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & & \\ & 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable (estas matrices se conocen con el nombre de bloques de Jordan).

El problema es que aunque λ tiene multiplicidad algebraica igual a n, no da lugar a n autovectores independientes sino a uno sólo.

Finalizaremos con el resultado más conocido para matrices no diagonalizables: el teorema de Jordan. Este teorema prueba que cualquier matriz cuadrada es semejante a una matriz formada por bloques de Jordan.

Teorema 4.3 *Sea A una matriz cuadrada. Entonces existen r autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ (que pueden ser iguales) y r números naturales $m_1, m_2, \ldots, m_r$ tales que A es semejante a la matriz diagonal por bloques:*

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1}^{(m_1)} & & & \\ & J_{\lambda_2}^{(m_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_r}^{(m_r)} \end{bmatrix}$$

Esta matriz recibe el nombre de **forma canónica de Jordan** de la matriz A. En ella un mismo autovalor λ aparece en tantos bloques como indica $m_g(\lambda)$ y el número de veces que aparece en la diagonal de J es $m_a(\lambda)$.

Si P es la matriz que reduce A a su forma de Jordan, entonces sus m_1 primeras columnas satisfacen:

$$\begin{array}{ll} Ax_1 = \lambda_1 x_1, & \textit{i.e., } x_1 \textit{ es un autovector correspondiente a } \lambda_1 \\ Ax_i = \lambda_1 x_i + x_{i-1} & i = 2, \cdots, m_1 \end{array}$$

Los vectores x_i $(i = 2, \ldots, m_1)$ se llaman autovectores generalizados de A, y la sucesión $x_1, \cdots, x_{m_1}$ se dice que es una cadena de Jordan correspondiente a λ_1. Naturalmente, cada bloque tiene su cadena correspondiente.

En el caso de que haya autovalores complejos (simples o múltiples), la *forma canónica real de Jordan* de la matriz A adopta la forma

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} D & I_2 & & & \\ & D & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D & I_2 \\ & & & & D \end{bmatrix}$$

siendo $D = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para $\lambda = a \pm ib$, pues si λ es un autovalor, también lo es su conjugado $\bar{\lambda}$ y con la misma multiplicidad.

4.3.1 Método de Caros para el cálculo de J

1. Se calculan los autovalores de A $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ con sus multiplicidades correspondientes $m_1, m_2, \cdots, m_k$
2. Para cada autovalor λ de multiplicidad m se calculan los rangos de las matrices $(A - \lambda I)^p$ (a lo sumo habría que calcular la potencia $(A - \lambda I)^m$

$$\begin{array}{lllr} rg(A-\lambda I) = r_1 \rightarrow q_1 = n - r_1 & & \text{si } q_1 < m, & \text{seguimos} \\ rg(A-\lambda I)^2 = r_2 \rightarrow q_2 = r_1 - r_2 & & \text{si } q_1 + q_2 < m, & \text{seguimos} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ rg(A-\lambda I)^p = r_p \rightarrow q_p = r_{p-1} - r_p & & \text{si } q_1 + q_2 + \cdots + q_p = m, & \boxed{\text{FIN}} \end{array}$$

$$\boxed{q_1 + q_2 + \cdots + q_p = \text{multiplicidad de } \lambda}$$

3. Al valor propio λ le corresponden:

$q_1 - q_2$	bloques de Jordan de orden	1
$q_2 - q_3$	bloques de Jordan de orden	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q_{p-1} - q_p$	bloques de Jordan de orden	$p - 1$
q_p	bloques de Jordan de orden	p

4.3.2 Cálculo de P

Una vez calculada la matriz J por el método de Caros, procedemos a calcular la matriz P.
Para ello, llamemos $\mathcal{N}_{k,\lambda} = Ker(A - \lambda I)^k$. Tomemos un vector

$$\vec{v}_i \in N_{i,\lambda} \setminus N_{i-1,\lambda}$$

o lo que es lo mismo, un vector para el cual, según el método de Caros, exista un bloque de Jordan de orden i.
Una vez obtenido $\vec{v}_i$, calculamos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{i-1} &= (A - \lambda I)\vec{v}_i \\ \vec{v}_{i-2} &= (A - \lambda I)\vec{v}_{i-1} \\ &\cdots\cdots \\ \vec{v}_2 &= (A - \lambda I)\vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 &= (A - \lambda I)\vec{v}_2 \end{aligned}$$

y el vector $\vec{v}_1$ resulta ser un autovector de A (o una combinación lineal de ellos) y los vectores $\{\vec{v}_j\}$ $j = 2, \cdots, i$ son sus autovectores *generalizados*.

Esta operación se repite para cada bloque de Jordan que nos indique el método de Caros, obteniendo así m autovectores (propios o generalizados) asociados al autovalor λ .

Repitiendo el proceso para cada λ llegamos a obtener n autovectores independientes, es decir, una base respecto de la cual, la matriz del endomorfismo es su Forma Canónica de Jordan, o lo que es lo mismo, hemos encontrado la matriz P.

4.4 Sistemas de ecuaciones en diferencias.

En esta sección se estudiará el comportamiento de los sistemas de ecuaciones en diferencias dados por una ecuación recurrente de la forma $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$. Como casos particulares importantes, se considerarán las ecuaciones en diferencias lineales, los procesos de Markov y los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Definición 4.11 *Sea A una matriz cuadrada de orden p y sea $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n, \cdots$ una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^p$ definidos de manera recurrente por*

$$\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

a partir de un vector inicial $\vec{u}_0 \in \mathbb{K}^p$. Una relación de recurrencia de esta forma se llama **sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo** *(que son los únicos que estudiaremos).*

Si $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ es un sistema de ecuaciones en diferencias, se tiene, razonando por inducción, que $\vec{u}_n = A^n\vec{u}_0$. Con esta expresión podemos hallar $\vec{u}_n$ para cualquier valor de n. Sin embargo, vamos a dar una expresión más simple para $\vec{u}_n$ que nos permitirá ahorrar tiempo de cálculo y también estudiar el comportamiento a largo plazo de la sucesión $\vec{u}_n$.

4.4.1 Potencias de una matriz.

Lema 4.1 *Sea A una matriz cuadrada de orden p y $J = P^{-1}AP$ su forma canónica de Jordan, entonces*

$$A^n = PJ^nP^{-1} \quad n = 1, 2, \cdots$$

de manera que si $J =$diag$(J_1, J_2, \cdots, J_r)$, entonces $J^n =$diag$(J_1^n, J_2^n, \cdots, J_r^n)$.

En particular, si A es diagonalizable, entonces

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ los autovalores de A.

Lema 4.2 *Si J_λ es un bloque de Jordan de orden r de una matriz A cuadrada de orden p, entonces*

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{r-1}\lambda^{n-r+1} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{r-2}\lambda^{n-r+2} \\ & & \lambda^n & \cdots & \binom{n}{r-3}\lambda^{n-r+3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\binom{n}{k} = 0$ *si* $n < k$

4.4.2 Sistemas de ecuaciones en diferencias

Teorema 4.4 *Sea A una matriz cuadrada de orden p y $u_0 \in \mathbb{K}^p$. Entonces la solución del sistema de ecuaciones en diferencias $u_n = Au_{n-1}$ con vector inicial u_0 es*

$$u_n = PJ^nP^{-1}u_0 \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $J = P^{-1}AP$ la forma canónica de Jordan de A.

Corolario 4.5 *Si en las condiciones del teorema, además A es diagonalizable, entonces*

$$\vec{u}_n = c_1\lambda_1^n\vec{x}_1 + c_2\lambda_2^n\vec{x}_2 + \cdots + c_p\lambda_p^n\vec{x}_p \qquad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los autovalores de A, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ autovectores linealmente independientes asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ respectivamente y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^t$ la solución del sistema $P\vec{c} = \vec{u}_0$.

Definición 4.12 *Sea (z_n) una sucesión de números construida de la siguiente manera: dados p valores iniciales $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathbb{R}$ definimos z_n para $n \geq p+1$ mediante*

$$z_n + a_1z_{n-1} + a_2z_{n-2} + \ldots + a_pz_{n-p} = 0 \qquad (\textit{siendo } a_p \neq 0)$$

Una relación de recurrencia de la forma dada se llama **ecuación en diferencias lineal homogénea de orden p**. Para hallar una expresión más sencilla de z_n transformamos esta ecuación en un sistema de ecuaciones en diferencias de la siguiente manera:

Sea $\vec{u}_p = (z_p, z_{p-1}, \ldots, z_1)^t \in \mathbb{R}^p$ y, en general, $\vec{u}_n = (z_n, z_{n-1} \ldots, z_{n-p+1})^t$ entonces se tiene

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-p+2} \\ z_{n-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_{n-p+1} \\ z_{n-p} \end{pmatrix} = A\vec{u}_{n-1}$$

esta relación es válida para $n = p+1, p+2, \cdots$

Proposición 4.5 *Los autovalores de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son las raíces del polinomio

$$q(\lambda) = \lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \cdots + a_p,$$

este polinomio recibe el nombre de **polinomio característico de la ecuación en diferencias**.

Teorema 4.6 *Si el polinomio característico de una ecuación en diferencias de orden p tiene p raíces distintas* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, *entonces la solución* (z_n) *de la ecuación homogénea se expresa como*

$$z_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_p\lambda_p^n \qquad n = 1, 2, \dots$$

donde las constantes $c_1, c_2, \dots, c_p$ *se determinan a partir de los p valores iniciales dados.*

4.5 Matrices Estocásticas: Cadenas de Markov.

Definición 4.13 *Diremos que una matriz real A cuadrada de orden p es* **estocástica, o de Markov**, *si sus elementos son no negativos y sus columnas suman 1 o, de otra forma,*

$$\begin{array}{ll} (1) & a_{ij} \geq 0 \text{ para todos } i,j = 1,2,\cdots,p \quad y \\ (2) & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para cada } j = 1,2,\cdots,p \end{array}$$

Las matrices estocásticas se encuadran dentro de un tipo más general de matrices, las llamadas no negativas, que son aquellas que verifican la condición (1). Las matrices no negativas participan de muchas de las propiedades de las matrices estocásticas.

Sin embargo, las matrices estocásticas, por su interpretación en términos de probabilidad, son de mayor utilidad. Suponiendo que un sistema consta de p estados posibles $E_1, E_2, \cdots, E_p$, el elemento genérico a_{ij} representa la probabilidad de pasar del estado E_j al estado E_i.

Definición 4.14 *Un sistema de ecuaciones en diferencias* $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ *en el que A es una matriz estocástica y* u_0 *es un vector de probabilidad, es decir un vector con coordenadas no negativas que suman 1 recibe el nombre de* **cadena de Markov finita**.

El vector $\vec{u}_n$ se llama vector de estados de la n-ésima etapa y representa la situación de los estados del sistema en dicha etapa.

En este apartado se estudiarán en primer lugar algunas propiedades de las matrices estocásticas para pasar a discutir posteriormente ciertos problemas que se plantean en las cadenas de Markov.

Proposición 4.6 *Una matriz A no negativa es estocástica si y sólo si* $e^tA = e^t$ *donde* $e = (1, 1, \cdots, 1)^t$. *En consecuencia,*

- *Si A y B son estocásticas, AB también lo es.*

- *Si A es estocástica, A^n también lo es.*
- *Si A es estocástica, entonces 1 es un autovalor de A.*

Teorema 4.7 *Si A es estocástica, entonces el radio espectral $\rho_A = 1$ o sea, todos sus autovalores λ verifican $|\lambda| \leq 1$.*

Definición 4.15 *Se denomina* **vector estacionario o de equilibrio de una matriz** *A, a todo vector de probabilidad $\vec{x}$ tal que $A\vec{x} = \vec{x}$.*

Teorema 4.8 *Toda cadena de Markov tiene un vector estacionario.*

Obsérvese que cualquier vector de equilibrio es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ y que si en algún momento se alcanza un vector de equilibrio, es decir $\vec{u}_n = x$, entonces ya no se abandona nunca ese vector, o sea $\vec{u}_m = x$ para $m \geq n$. Por tanto, los vectores de equilibrio tienen una cierta relación con la conducta límite de la sucesión $\vec{u}_n$.

Sin embargo no es cierto que siempre exista el $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\vec{u}_0$.

Ejemplos

- Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $\vec{u}_{2n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mientras que $\vec{u}_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y aún cuando exista el límite anterior puede depender del vector inicial $\vec{u}_0$.
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pero con $\vec{u}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\vec{u}'_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 4.9 *Si $\lambda = 1$ es el único autovalor de módulo 1, de la matriz A, entonces para cada vector de estados inicial $\vec{u}_0$, existe el $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\vec{u}_0$. En particular si $\vec{u}_0$ es un vector de probabilidad, el $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\vec{u}_0$ es un vector de equilibrio.*

Para algunas cadenas de Markov, el límite es independiente del vector inicial.

Definición 4.16 *Se dice que la cadena de Markov de matriz A es regular si existe un $m \in \mathbb{N}$ para el que $a_{ij}^{(m)} > 0$ para todos $i, j = 1, 2, \cdots, p$; donde $A^m = (a_{ij}^{(m)})$.*

Teorema 4.10 *Si A es la matriz de una cadena de Markov regular entonces*

- *Existe un único vector estocástico estacionario $\vec{x}$*
- *Para cualquier vector estocástico $\vec{u}_0$ la sucesión $A^n\vec{u}_0$ tiende a $\vec{x}$.*
- *$\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \bar{A}$, donde $\bar{A}$ tiene todas las columnas iguales a $\vec{x}$, (el límite anterior es en el sentido de elemento a elemento de la matriz).*

Otra condición alternativa a la del teorema anterior viene dada por:

Teorema 4.11 *Si $\lambda = 1$ es el único autovalor de módulo 1 y además es simple, el $\lim\limits_{n\to\infty} A^n u_0$ existe y es independiente de u_0.*

(*)Sistemas de ecuaciones diferenciales. Exponencial de una matriz

En la primera parte del tema estudiamos los sistemas de ecuaciones en diferencias, en dichos sistemas la evolución se produce de forma discreta. Si consideramos dicha evolución, pero de forma continua, tendremos los sistemas de ecuaciones diferenciales. Nos vamos a limitar a estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos de coeficientes constantes, los definimos a continuación.

Definición 4.17 *Sean $u_1(t), u_2(t), u_3(t), \cdots, u_n(t)$ un conjunto de funciones de la variable independiente t, llamamos* **sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo con coeficientes constantes** *a un conjunto de expresiones del tipo:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{u}_1(t) & = & a_{11}u_1(t) & +a_{12}u_2(t) & +\cdots & +a_{1n}u_n(t) \\ \dot{u}_2(t) & = & a_{21}u_1(t) & +a_{22}u_2(t) & +\cdots & +a_{2n}u_n(t) \\ \dot{u}_3(t) & = & a_{31}u_1(t) & +a_{32}u_2(t) & +\cdots & +a_{3n}u_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot{u}_n(t) & = & a_{n1}u_1(t) & +a_{n2}u_2(t) & +\cdots & +a_{nn}u_n(t) \end{array} \tag{4.1}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R},\ \forall i, j = 1, \cdots, n$

El sistema [4.1] lo podemos expresar matricialmente $\dot{u}(t) = Au(t)$, siendo A una matriz cuadrada de orden n y real, $u(t)$ el vector $(u_1(t), u_2(t), \cdots u_n(t))^t$ y $\dot{u}(t)$ el vector $(\dot{u_1}(t), \dot{u_2}(t), \cdots \dot{u_n}(t))^t$.

Teorema 4.12 *La solución del sistema [4.1] con valores iniciales dados por el vector $u_0 = (u_{10}, u_{20}, \cdots, u_{n0})^t$ es $u(t) = e^{At}u_0$*

4.5.1 Exponencial de una matriz

La solución del sistema [4.1] viene dada por la exponencial de una matriz. Vamos a calcular dicha exponencial.

Si tenemos en cuenta el desarrollo en serie de potencias de e^x y sustituimos x por At nos quedará:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Si diagonalizamos la matriz A y sustituimos A por PDP^{-1} la expresión anterior se transforma en:

$$e^{At} = P(I + Dt + \frac{(Dt)^2}{2!} + \frac{(Dt)^3}{3!} + \cdots)P^{-1}$$

que es la matriz resultante de la exponencial.

Teorema 4.13 *Si la matriz A, del sistema [4.1], es diagonalizable la solución del sistema [4.1] con valores iniciales $u_0 = (u_{10}, u_{20}, \cdot u_{n0})^t$ es:*

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + C_2e^{\lambda_2 t}v_2 + C_3e^{\lambda_3 t}v_3 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}v_n$$

Los coeficientes $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ los obtenemos a partir de los valores iniciales, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\}$ son los autovalores de la matriz A y $\{v_1, v_2 \cdots v_n\}$ son sus respectivos autovectores.

(*)Estabilidad.

Supongamos que un cierto sistema real evoluciona según un sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ a partir de un vector inicial $\vec{u}_0$. Puede ocurrir que no podamos conocer $\vec{u}_0$ exactamente, sino sólo una aproximación $\vec{v}_0$ obtenida experimentalmente. El problema de la estabilidad de un sistema de ecuaciones en diferencias consiste en determinar si los valores obtenidos $\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1}$ a partir de $\vec{v}_0$ se parecen o no a los valores reales $\vec{u}_n$.

Definición 4.18 *Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)^t \in \mathbb{K}^p$. Definimos su norma–2, o norma euclídea, como*

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^*\vec{x}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_p|^2}$$

La norma euclídea en $\mathbb{K}^p$ es una generalización de la distancia al origen en $\mathbb{R}^3$.

Definimos su norma–infinito como

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_p|\}$$

Es claro que $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{p}\|\vec{x}\|_\infty$.

Definición 4.19 *Sea $(\vec{x}_n)_n$ una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^p$. Diremos que $\vec{y} \in \mathbb{K}^p$ es el límite de $(\vec{x}_n)_n$ cuando n tiende a infinito si se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{y} - \vec{x}_n\| = 0$$

para alguna (no importa cuál, teniendo en cuenta la desigualdad anterior) de las normas definidas, y, en ese caso, escribiremos $\vec{y} = \lim_n \vec{x}_n$.

Obsérvese que $\vec{y}$ es el límite de $\vec{x}_n$ si y sólo si cada coordenada del vector $\vec{y}$ es el límite de la correspondiente coordenada de $\vec{x}_n$.

Definición 4.20 *Diremos que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ obtenida a partir de un vector inicial $\vec{u}_0$ es:*

- **Asintóticamente estable**, *si dado cualquier estado inicial $\vec{v}_0$, la solución $\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1}$ obtenida a partir de él verifica*
$$\lim_{n\to\infty} (\vec{v}_n - \vec{u}_n) = 0 \equiv \lim_{n\to\infty} \|\vec{u}_n - \vec{v}_n\| = 0.$$
- **Estable**, *si la solución $\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1}$ obtenida a partir de cualquier otro estado inicial $\vec{v}_0$, cumple que la distancia entre $\vec{u}_n$ y $\vec{v}_n$ está acotada por una constante α que depende sólo de $\vec{v}_0$:*
$$\|\vec{u}_n - \vec{v}_n\| \leq \alpha \quad \forall\ n$$
- **Inestable**, *si no se verifican (1) ni (2) o, equivalentemente, si existe un vector v_0 tal que si $\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1}$ es la solución correspondiente, entonces la sucesión $(\|\vec{u}_n - \vec{v}_n\|)_n$ no está acotada.*

Proposición 4.7 *La estabilidad de la solución correspondiente a $\vec{u}_0$ es equivalente a la estabilidad de la solución cero, es decir $\vec{u}_n = 0$ que corresponde a tomar $\vec{u}_0 = 0$.*

En otras palabras, la estabilidad de un sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ sólo depende de la matriz A y no del vector inicial $\vec{u}_0$, de manera que diremos que el sistema es

- *Asintóticamente estable si $\|A^n\vec{u}_0\| \to 0$, para cada $\vec{u}_0$.*
- *Estable si $(\|A^n\vec{u}_0\|)_n$ está acotada para cada u_0.*

- *Inestable si existe algún* $\vec{u}_0$ *tal que* $(\|A^n\vec{u}_0\|)_n$ *no está acotada.*

Naturalmente, todo sistema asintóticamente estable es estable pero no recíprocamente.

Teorema 4.14 *Sea* A *una matriz cuadrada de orden* p. *El sistema* $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ *es:*

Asintóticamente estable si y sólo si $|\lambda| < 1$ *para todo autovalor* λ *de* A, *o sea si y sólo si el radio espectral* $\rho_A < 1$.

Estable, pero no asintóticamente estable, si y sólo si $\rho_A = 1$ *y además para aquellos autovalores tales que* $|\lambda| = 1$ *se verifica* $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Inestable si y sólo si $|\lambda| > 1$ *para algún autovalor de* A , *o bien existe un autovalor* λ *tal que* $|\lambda| = 1$ *y* $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$.

Corolario 4.15 *La estabilidad de un sistema* $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ *es la misma que la del sistema correspondiente a la matriz* A^t.

Antes de finalizar hacemos referencia a la estabilidad de la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales. La estabilidad de de la solución viene determinada por las exponenciales $e^{\lambda_i t}$ puesto que la solución es una combinación lineal de tales exponenciales. Por ello diremos que la solución es **asintóticamente estable** si la exponencial tiende a cero, diremos que es **estable** si dichas exponenciales están acotadas y diremos que la solución es **inestable** si la exponencial no está acotada.

Ejercicios

4.1 Calcular los autovalores y subespacios invariantes asociados a las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2 Diagonalizar las siguientes matrices, calculando la matriz de paso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -5 \\ -5 & 2 & -4 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3 Determinar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}$ de manera que admita por autovectores a los vectores (1,0,1), (-1,1,0) y (0,1,-1).

4.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$.

Sabiendo que admite como autovectores $(1, 1, 0),\ (-1, 0, 2),\ (0, 1, -1)$, hallar los autovalores y los elementos de la matriz.

4.5 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Expresar A^{-1} en función de I_3 y de A.

4.6 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores de a para los que A es diagonalizable.

b) Para dichos valores de a, calcular los autovalores y los autovectores de A^{-1}.

c) Para dichos valores de a, calcular A^n.

4.7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcular A de forma que $(2, 0, -1)$ sea un autovector cuyo autovalor correspondiente es $\lambda = -1$.

b) Hallar los demás autovalores y autovectores.

4.8 Estudiar para qué valores de los parámetros a y b, la matriz

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Calculando:

a) Forma canónica de Jordan y matriz de paso para los valores $a = -1$ y $b = 1$.

b) Forma canónica de Jordan y matriz de paso para $a = 1$ y $b = 10$. Calcular en este caso A^{129}.

4.9 a) Determinar una matriz A cuadrada de orden tres, sabiendo que tiene por autovalores $\lambda = -1$ (doble) y $\lambda = 0$ y siendo los autovectores para $\lambda = -1$ el $(1, -2, 1)$ y su vector asociado es (0,1,0) y el autovector asociado a $\lambda = 0$ es (1,-2,0).

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener la forma canónica de Jordan y su matriz de paso.

4.10 Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & c & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, tiene un autovector de la forma $(d, 0, -1)$ con $d > 0$, y el autovalor correspondiente a $(d, 0, -1)$ es doble, calcular a, b y c.

4.11 La distribución de la población de tres grupos de animales, en el año n viene dada por el vector $\vec{v}_n = (x_n, y_n, z_n)$ siendo

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_{n+1} & = & & 7y_n \quad +4z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{9}x_n & \\ z_{n+1} & = & & \frac{1}{2}y_n \end{array} \right.$$

Si la población inicial es de 3000 animales, 1000 de cada grupo, calcular la población que habrá de cada grupo al cabo del tiempo.

4.12 Describir razonadamente las dinámicas fundamentales del movimiento de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcrrr} x_{n+1} & = & 5/2x_n & +3y_n & \\ y_{n+1} & = & -3/2x_n & -2y_n & \\ z_{n+1} & = & -6x_n & -6y_n & -1/2z_n \end{array} \right.$$

donde (x_n, y_n, z_n) representa las coordenadas de la posición del móvil en la n-ésima transición.

4.13 Resolver la ecuación en diferencias de Fibonacci: $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ para los valores iniciales $z_1 = 1, z_2 = 1$.

4.14 Resolver la ecuación en diferencias $z_n - 3z_{n-2} + 2z_{n-3} = 0$ dados $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 1$.

4.15 Usando una ecuación en diferencias adecuada, calcular el valor de los siguientes determinantes tridiagonales de orden n:

a) $\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{3} & 0 & & \cdots & 0 \\ \sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \cdots & & 0 & \sqrt{3} & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b & a & b \\ 0 & \cdots & & 0 & b & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & & \cdots & 0 \\ \frac{4}{3} & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 4 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{4}{3} & 4 & 3 \\ 0 & \cdots & & 0 & \frac{4}{3} & 4 \end{vmatrix}$

4.16 Dado el sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la expresión general de $\vec{u}_n$.

b) Calcular $\vec{u}_{10}$, dado el vector inicial $\vec{u}_0 = (0, 2, 0, 2)$.

c) Estudiar la estabilidad del sistema según los valores de a.

4.17 Los hábitos de trabajo de un estudiante son como sigue. Si estudia una noche, está seguro en un 70 % de que no estudiará la noche siguiente. Por otra parte, la probabilidad de que no estudie dos noches seguidas es de 0.6. A la larga, ¿con qué frecuencia estudia?

4.18 Supongamos que hay tres centros principales de camiones en Barcelona, Alicante y La Coruña. Cada mes, la mitad de los que están en Barcelona y en Alicante van a La Coruña, la otra mitad permanece donde está, y los camiones de La Coruña se dividen igualmente entre Barcelona y Alicante. Construir la matriz de transición y encontrar el estado estacionario.

4.19 Encontrar la matriz de transición para un curso de matemáticas que se imparte en dos clases, si cada semana dejan el curso $\frac{1}{4}$ de los que están en la clase A y un $\frac{1}{3}$ de los que están en la clase B, y además $\frac{1}{6}$ de cada clase se pasa a la otra.

4.20 Juan puede estar triste o contento. Si en un determinado día está contento, también lo está al día siguiente, cuatro de cada cinco ocasiones que ocurre. Si un día está triste, también lo está al día siguiente en una de cada tres ocasiones. A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que esté contento en un determinado día?

4.21 Supongamos que hay una epidemia en la que cada mes se enferma la mitad de los que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos. Encontrar el estado estacionario de la enfermedad.

4.22 En la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Huelva, un estudiante tiene que pasar tres cursos antes de obtener el título. Cada año realiza un examen para pasar de curso y si lo suspende, debe repetir. Las probabilidades de aprobar cada examen son: 0.8 el primero, 0.7 el segundo y 0.5 el tercero. Estudiando la cadena de Markov asociada, deducir la probabilidad de que acabe en menos de 5 años.

4.23 Un país está dividido en tres regiones demográficas. Se ha determinado que cada año el 5 % de los residentes en la región 1 se cambie a la región 2 y otro 5 % a la región 3. De los residentes en la región

2, el 15 % se cambia a la región 1 y el 10 % a la región 3. Y, de los residentes en la región 3, el 10 % se cambia a la región 1 y el 5 % a la región 2. ¿Qué porcentaje de la población residirá en cada una de las tres regiones después de un largo período de tiempo?

4.24 Los hijos de los miembros del partido socialista votan a dicho partido con probabilidad 0,5, al conservador con probabilidad 0,4 y al liberal con probabilidad 0,1.
Las probabilidades para los hijos de los miembros del partido conservador son 0,7 para los conservadores, 0,2 para los socialistas y 0,1 para los liberales.
Por último, para los hijos de los miembros del partido liberal las probabilidades son 0,2 para conservadores, 0,4 para socialistas y 0,4 para liberales.
Dadas estas estadísticas,¿cuál es la probabilidad de que el nieto de un miembro del partido liberal vote al partido socialista?
¿Cuál es el modelo de votación a largo plazo?

4.25 Resolver el sistema $\dot{u}(t) = Au(t)$, con $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y valor inicial dado por $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$