Matrices y Determinantes.

Matrices. Generalidades

Definición [Matriz]
Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, $m, n \in \mathbb{N}$.

Matriz de orden m $\times$ n sobre E:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in E,\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$

- a_{ij}: elementos de la matriz.
- La matriz está compuesta por m filas (de n elementos) y n columnas (de m elementos), siendo a_{ij} el elemento de la fila i y la columna j de la matriz.
- La matriz cuyos elementos son a_{ij} se denota por $((a_{ij}))$, o simplemente por A.
- $\mathcal{M}_{m\times n}$(E) = {matrices de orden $m \times n$ sobre E}
- Matriz cuadrada: Tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).
- $\mathcal{M}_n$(E) = {matrices cuadradas de orden n sobre E}.
- **Matriz fila**: Solamente tiene una fila ($m = 1$)
- **Matriz columna**: Sólo tiene una columna ($n = 1$).

Definición [Igualdad de matrices]

Dos matrices $A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ son iguales si tienen los mismos elementos.

$$((a_{ij})) \ = \ ((b_{ij})) \ \Leftrightarrow \ a_{ij} \ = \ b_{ij} \quad \forall i,\ \forall j.$$

Definición [Diagonales]

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ y $k = min\{m, n\}$.

- Diagonal principal de la matriz A=$\{a_{ii}\ /\ i = 1, 2, \ldots, k\}$
- Diagonal no principal de la matriz A= $\{a_{ij}\ /\ i + j \ = \ n + 1\}$.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$.

- A es **triangular superior** si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.
- A es **triangular inferior** si los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos.
- A es **diagonal** si es triangular superior e inferior.

Definición [Matriz nula]

A la matriz $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ cuyos elementos son nulos se le denomina **matriz nula de orden m × n**.

Definición [Matriz identidad]

A la matriz diagonal $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathrm{E})$ cuyos elementos de la diagonal principal son unos se le denomina **matriz identidad de orden n**.

$\boxed{\textbf{Operaciones con matrices}}$

Suma de matrices: $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$

$$A + B = ((a_{ij} + b_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Propiedades

1. Conmutativa: $A + B = B + A, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C, \ \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. Existe elemento neutro $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\Theta + A = A + \Theta = A, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \ \exists -A = ((-a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = \Theta$.

Por tener estas propiedades ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,+) tiene estructura de grupo conmutativo.

Producto de una matriz por un escalar: $\lambda \in \mathbb{K}, \ A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\lambda A = ((\lambda a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Propiedades

1. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A), \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $1 \cdot A = A, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Producto de matrices: $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{jk})) \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$

$$A.B = ((\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk})) \in \mathcal{M}_{m\times l}(\mathbb{K}).$$

Propiedades

Respetando los órdenes de las matrices para que se puedan multiplicar, se verifican las siguientes propiedades:

1. $A.B \neq B.A$, en general.
2. $A.B = \Theta \not\Rightarrow A = \Theta$ o $B = \Theta$. Y por tanto: $A.B = A.C \not\Rightarrow B = C$.
3. $A.(B+C) = A.B + A.C$; $\qquad (A+B).C = A.C + B.C$
4. $(A.B).C = A.(B.C)$
5. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A.I_n = I_m.A = A$

Teorema

El producto de matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales son, respectivamente, matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales.

Matriz traspuesta:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$. **Matriz traspuesta de A:** $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathrm{E})$ cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A.

Propiedades

1. $(A^t)^t = A, \ \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t, \ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t, \ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t, \ A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.

Definición [Matriz simétrica]

Una matriz A cuadrada es **simétrica** si $A^t = A$, y es **antisimétrica** si $A^t = -A$.

Submatrices y bloques:

Definición

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama **submatriz** de A de orden $p \times q$, a la matriz que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-q$ columnas de A.
Si los índices de filas y columnas que determinan la submatriz son consecutivos, entonces la submatriz se denomina **bloque** o **caja**.

Descomposición en bloques

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, consideremos una sucesión creciente de índices de filas

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m$$

y una sucesión creciente de índices de columnas

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n$$

Sea A_{ij} el bloque de A que definen las filas comprendidas entre las $m_{i-1}+1$ y la m_i (ambas inclusive) y las columnas comprendidas entre las $n_{j-1}+1$ y la n_j (ambas inclusive). Se dice que A se descompone en bloques cuando se la expresa en función de los $p \cdot q$ bloques A_{ij}. Estos forman p filas y q columnas y quedan situados como si se tratara de los elementos de una matriz.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{array}\right)$$

Multiplicación por bloques

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ y sea $C = A.B$. Si A se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_\alpha = m$ y de columnas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y B se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y de columnas $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_\beta = n$, entonces si $C = [C_{ij}]$

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^{\gamma} A_{ih} B_{hj}$$

Matriz inversa

Definición [**Matriz inversa**]
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es invertible si

$$\exists\ B\ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad A.B\ =\ B.A\ =\ I_n.\ \ (B = A^{-1})$$

A^{-1} se denomina **matriz inversa de A.**

La inversa de una matriz invertible es única.

Propiedades

1. Si A es invertible, A^{-1} también y $(A^{-1})^{-1}\ =\ A$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, $A.B$ también y $(A.B)^{-1}\ =\ B^{-1}.A^{-1}$
3. Si A es invertible, entonces A^t también y $(A^t)^{-1}\ =\ (A^{-1})^t$.

Teorema
Las matrices diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores son invertibles si y sólo si los elementos de la diagonal son distintos de cero. Además las inversas de estas matrices siguen siendo diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores.

Transformaciones elementales.

Definición [**Transformaciones elementales**]
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denominan transformaciones elementales por filas (análogamente por columnas) a las transformaciones efectuadas sobre los elementos de la matriz siguientes

- F_{ij} *(o* C_{ij}) Intercambiar la fila i por la j (análog. columnas).
- $F_i(\alpha)$ *(o* $C_i(\alpha)$) *con* $\alpha \neq 0$. Multiplicar la fila i por $\alpha \in \mathbb{K}$ (análog. columnas).
- $F_{ij}(\alpha)$ *(o* $C_{ij}(\alpha)$). Sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\alpha \in \mathbb{K}$ (análog. columnas).

Definición [**Matrices elementales**]
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos matriz asociada a una transformación elemental por filas (por columnas), que la denotaremos igual que la transformación elemental, como la matriz cuadrada de orden m (de orden n si se trata por columnas) que resulta de someter a la matriz identidad de orden m (de orden n para columnas) a dicha transformación elemental por filas (por columnas).

Teorema
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $F \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por filas. Sea A' la matriz que resulta de someter a la matriz A a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $F.A = A'$.
Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por columnas. Sea B' la matriz que resulta de someter a la matriz B a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $B.C = B'$.

Teorema
Las matrices asociadas a transformaciones elementales son invertibles. Además:

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad F_i^{-1}(\alpha) = F_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad F_{ij}^{-1}(\alpha) = F_{ij}(-\alpha)$$

$$C_{ij}^{-1} = C_{ij}, \quad C_i^{-1}(\alpha) = C_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad C_{ij}^{-1}(\alpha) = C_{ij}(-\alpha)$$

Método de Gauss–Jordan para el cálculo de la matriz inversa

1. Ampliamos la matriz A con la matriz identidad: $[A|I_n]$.
2. Triangularizamos la matriz A superiormente; es decir, utilizando transformaciones elementales, conseguimos hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal. Además si A es invertible los elementos de la diagonal serán todos distintos de cero y por tanto podemos hacer unos todos los elementos de la diagonal. Se obtendrá $[L|B]$
3. Utilizando el mismo método pero desde abajo hacia arriba, podemos hacer cero los elementos que están por encima de la diagonal, obteniéndose $[I_n|A^{-1}]$.

Determinantes: definición y propiedades

Permutaciones (recordatorio)

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para permutar estos elementos, es decir para situarlos en distinto orden, bastará recurrir a un aplicación biyectiva $\sigma : N \longrightarrow N$, que representaremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_n = \{\text{Permutaciones de } n \text{ elementos}\}$.
Se llaman *trasposiciones* a aquellas permutaciones en las que, salvo dos elementos de N, que vamos a llamar i y j, todos los demás permanecen fijos (es decir, coinciden con su imagen); los elementos que varían se transforman uno en el otro (es decir i en j y j en i).
Se llama *índice* de una permutación y se denota por $i(\sigma)$, al número de trasposiciones que presenta dicha permutación.

Definición de determinante

$$A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ \Rightarrow \ |A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

donde el sumatorio se extiende a las $n!$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

Menor complementario y adjunto

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se denomina **menor complementario** del elemento a_{pq} y se denota M_{pq}, al determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila p y la columna q de A.
Se llama **adjunto** del elemento a_{pq} al número, que representaremos por A_{pq}, definido por $A_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$

Teorema[Desarrollo de $|A|$ por una fila o columna]

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el $|A|$ se puede calcular desarrollándolo con respecto a cualquier fila o a cualquier columna,mediante

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

Propiedades de los determinantes.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

1. $|A| = |A^t|$.
2. Si todos los elementos de una fila (columna) de A son nulos, entonces $|A| = 0$.
3. Si se permutan entre sí dos líneas (filas o columnas) de un determinante, éste cambia de signo.
4. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales vale 0.
5. Si se multiplican todos los elementos de una fila (columna) de A por un número λ, el determinante de la matriz B resultante, queda $|B| = \lambda|A|$.
6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales vale 0.
7. Si cada elemento de una fila (columna), por ejemplo p, de la matriz A es de la forma $a_{pq} = a'_{pq} + a''_{pq}$, entonces $|A| = |B| + |C|$, donde

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, & \text{si} \quad i \neq p, \quad b_{pj} = a'_{pj} \\ c_{ij} = a_{ij}, & \text{si} \quad i \neq p, \quad c_{pj} = a''_{pj} \end{cases}$$

8. Al sumar a una línea una combinación lineal de las restantes líneas paralelas el determinante de A no varía.

   Esta propiedad se utiliza a menudo en la práctica para calcular el determinante de una matriz de una forma más simple. Se toma un elemento de una línea distinto de cero como pivote y con él, utilizando la anterior propiedad, se hacen ceros el resto de elementos de dicha línea, con lo cual el determinante de orden n se reduce al cálculo de un determinante de orden $n-1$.

9. Si una línea de la matriz A es combinación lineal de otras líneas paralelas a ella, el $|A| = 0$.

   (En consecuencia si $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ las líneas de A son linealmente independientes)

10. El producto de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) es nulo.

Teorema
Si $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Corolario

Si A es no singular, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

Cálculo de la inversa mediante determinantes

Definición
Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, a la matriz cuadrada de orden n, $adj(A) = ((A_{ij}))$ se le llama adjunta de la matriz A.

Teorema
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces A es invertible si y sólo si , $|A| \neq 0$. En dicho caso es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adj(A^t) = \frac{1}{|A|}.(adj(A))^t$$

Menores de una matriz

Definición
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama **menor de orden p** de la matriz A al determinante de la matriz cuadrada obtenida por la intersección de p filas y p columnas de A.

Definición
Se llama **orlar** un menor de orden p a obtener un menor de orden $p+1$ añadiéndole una fila y una columna al menor original.

- Si en una matriz A, una fila p (columna) es combinación lineal de otras h filas (columnas), todos los menores de orden $h+1$ que pueden formarse con la fila p y las h filas (columnas) consideradas son nulos, en virtud de la propiedad 9 de los determinantes.
- Si un menor de orden h de una matriz A es distinto de cero, y todos los menores de orden $h+1$, que pueden formarse orlando éste con la fila p de la matriz y cada una de las columnas que no figuran en el menor son nulos, entonces la fila p es combinación lineal de las filas de la matriz que figuran en el menor.

Rango de una matriz:

Definición
Se llama **rango por menores de** A, y lo denotamos por $r(A)$, al mayor orden de sus menores no nulos. Es decir, $r(A) = h$ si A tiene algún menor no nulo de orden h y todos los menores de orden $h+1$ de A son nulos.

Si $r(A) = h$, un menor de orden h de A se denomina menor principal.

Proposición
Si A es una matriz cuadrada de orden n, $r(A) = n \iff |A| \neq 0$

- Si $r(A) = h$ y M es un menor principal de A, entonces cualquier fila (columna) de A será combinación lineal de las filas (columnas) de A que figuran en el menor.
- El rango de una matriz no varía si se añade o se suprime una fila (columna) combinación lineal de las demás.

Cálculo del rango:

Método de los orlados:

1. Se suprimen todas las líneas de la matriz A que sean combinación lineal de otras.
2. Se busca en la matriz un menor de orden uno no nulo.
3. Orlamos dicho menor con una fila determinada y con el resto de las columnas de la matriz A.
   (a) Si todos los orlados son nulos, se suprime dicha fila y se repite la operación con otra fila determinada.
   (b) Si algún orlado es no nulo se vuelve a repetir el proceso con dicho menor desde el punto (3).
4. Una vez agotadas todas las filas, el orden del último menor no nulo es el rango de la matriz A.