# Matrices y Determinantes.

## Matrices. Generalidades

**Definición [Matriz]**
Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Matriz de orden m $\times$ n** sobre $E$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in E, \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n.$

- $a_{ij}$: elementos de la matriz.
- La matriz está compuesta por $m$ filas (de $n$ elementos) y $n$ columnas (de $m$ elementos), siendo $a_{ij}$ el elemento de la fila $i$ y la columna $j$ de la matriz.
- La matriz cuyos elementos son $a_{ij}$ se denota por $((a_{ij}))$, o simplemente por $A$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E}) = \{$matrices de orden $m \times n$ sobre $E\}$
- Matriz cuadrada: Tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).
- $\mathcal{M}_n(\mathrm{E}) = \{$matrices cuadradas de orden $n$ sobre $E\}$.
- **Matriz fila**: Solamente tiene una fila ($m = 1$)
- **Matriz columna**: Sólo tiene una columna ($n = 1$).

**Definición [Igualdad de matrices]**

Dos matrices $A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ son iguales si tienen los mismos elementos.

$$((a_{ij})) \ = \ ((b_{ij})) \ \Leftrightarrow \ a_{ij} \ = \ b_{ij} \quad \forall i,\ \forall j.$$

**Definición [Diagonales]**

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ y $k = min\{m, n\}$.

- Diagonal principal de la matriz $A$=$\{a_{ii}\ /\ i = 1, 2, \ldots, k\}$
- Diagonal no principal de la matriz $A$= $\{a_{ij}\ /\ i + j \ = \ n + 1\}$.

**Definición**

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$.

- $A$ es **triangular superior** si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.
- $A$ es **triangular inferior** si los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos.
- $A$ es **diagonal** si es triangular superior e inferior.

**Definición [Matriz nula]**

A la matriz $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$ cuyos elementos son nulos se le denomina **matriz nula de orden m $\times$ n**.

**Definición [Matriz identidad]**

A la matriz diagonal $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathrm{E})$ cuyos elementos de la diagonal principal son unos se le denomina **matriz identidad de orden n**.

# Operaciones con matrices

**Suma de matrices**: $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$

$$A + B = ((a_{ij} + b_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Propiedades

1. Conmutativa: $A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C,\ \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. Existe elemento neutro $\Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\Theta + A = A + \Theta = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \exists -A = ((-a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = \Theta$.

Por tener estas propiedades ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,+) tiene estructura de grupo conmutativo.

**Producto de una matriz por un escalar**: $\lambda \in \mathbb{K},\ A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\lambda A = ((\lambda a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Propiedades

1. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A),\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $1 \cdot A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Producto de matrices:** $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{jk})) \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$

$$A.B = ((\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk})) \in \mathcal{M}_{m\times l}(\mathbb{K}).$$

Propiedades

Respetando los órdenes de las matrices para que se puedan multiplicar, se verifican las siguientes propiedades:

1. $A.B \neq B.A$, en general.
2. $A.B = \Theta \not\Rightarrow A = \Theta$ o $B = \Theta$. Y por tanto: $A.B = A.C \not\Rightarrow B = C$.
3. $A.(B+C) = A.B + A.C$; $\quad (A+B).C = A.C + B.C$
4. $(A.B).C = A.(B.C)$
5. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A.I_n = I_m.A = A$

**Teorema**

El producto de matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales son, respectivamente, matrices triangulares inferiores, superiores y diagonales.

## Matriz traspuesta:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{E})$. **Matriz traspuesta de A:** $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathrm{E})$ cuyas filas son las columnas de $A$ y cuyas columnas son las filas de $A$.

Propiedades

1. $(A^t)^t = A, \ \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t, \ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t, \ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t, \ A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.

**Definición [Matriz simétrica]**

Una matriz $A$ cuadrada es **simétrica** si $A^t = A$, y es **antisimétrica** si $A^t = -A$.

## Submatrices y bloques:

### Definición

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama **submatriz** de $A$ de orden $p \times q$, a la matriz que resulta de eliminar $m - p$ filas y $n - q$ columnas de $A$.
Si los índices de filas y columnas que determinan la submatriz son consecutivos, entonces la submatriz se denomina **bloque** o **caja**.

### Descomposición en bloques

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, consideremos una sucesión creciente de índices de filas

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m$$

y una sucesión creciente de índices de columnas

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n$$

Sea $A_{ij}$ el bloque de $A$ que definen las filas comprendidas entre las $m_{i-1} + 1$ y la $m_i$ (ambas inclusive) y las columnas comprendidas entre las $n_{j-1} + 1$ y la $n_j$ (ambas inclusive). Se dice que $A$ se descompone en bloques cuando se la expresa en función de los $p \cdot q$ bloques $A_{ij}$. Estos forman $p$ filas y $q$ columnas y quedan situados como si se tratara de los elementos de una matriz.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{array}\right)$$

### Multiplicación por bloques

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ y sea $C = A.B$. Si $A$ se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_\alpha = m$ y de columnas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y $B$ se descompone en los bloques determinados por los índices de filas $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\gamma = p$ y de columnas $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_\beta = n$, entonces si $C = [C_{ij}]$

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^{\gamma} A_{ih} B_{hj}$$

# Matriz inversa

**Definición** [**Matriz inversa**]
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es invertible si

$$\exists\ B \ \in \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A.B \ = \ B.A \ = \ I_n. \ \ (B = A^{-1})$$

$A^{-1}$ se denomina **matriz inversa de A.**

La inversa de una matriz invertible es única.

**Propiedades**

1. Si $A$ es invertible, $A^{-1}$ también y $(A^{-1})^{-1} \ = \ A$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, $A.B$ también y $(A.B)^{-1} \ = \ B^{-1}.A^{-1}$
3. Si $A$ es invertible, entonces $A^t$ también y $(A^t)^{-1} \ = \ (A^{-1})^t$.

**Teorema**
Las matrices diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores son invertibles si y sólo si los elementos de la diagonal son distintos de cero. Además las inversas de estas matrices siguen siendo diagonales, triangulares superiores o triangulares inferiores.

# Transformaciones elementales.

**<u>Definición</u>** [ **Transformaciones elementales**]
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denominan transformaciones elementales por filas (análogamente por columnas) a las transformaciones efectuadas sobre los elementos de la matriz siguientes

- $F_{ij}$ (*o* $C_{ij}$) Intercambiar la fila i por la j (análog. columnas).
- $F_i(\alpha)$ (*o* $C_i(\alpha)$) *con* $\alpha \neq 0$. Multiplicar la fila i por $\alpha \in\mathbb{K}$ (análog. columnas).
- $F_{ij}(\alpha)$ (*o* $C_{ij}(\alpha)$). Sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\alpha \in\mathbb{K}$ (análog. columnas).

**<u>Definición</u>** [ **Matrices elementales**]
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos matriz asociada a una transformación elemental por filas (por columnas), que la denotaremos igual que la transformación elemental, como la matriz cuadrada de orden m (de orden n si se trata por columnas) que resulta de someter a la matriz identidad de orden m (de orden n para columnas) a dicha transformación elemental por filas (por columnas).

**<u>Teorema</u>**
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $F \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por filas. Sea $A'$ la matriz que resulta de someter a la matriz $A$ a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $F.A = A'$.
Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz asociada a una transformación elemental por columnas. Sea $B'$ la matriz que resulta de someter a la matriz $B$ a dicha transformación elemental. Entonces se tiene que $B.C = B'$.

**<u>Teorema</u>**
Las matrices asociadas a transformaciones elementales son invertibles. Además:

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad F_i^{-1}(\alpha) = F_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad F_{ij}^{-1}(\alpha) = F_{ij}(-\alpha)$$

$$C_{ij}^{-1} = C_{ij}, \quad C_i^{-1}(\alpha) = C_i(1/\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0, \quad C_{ij}^{-1}(\alpha) = C_{ij}(-\alpha)$$

**Método de Gauss–Jordan para el cálculo de la matriz inversa**

1. Ampliamos la matriz $A$ con la matriz identidad: $[A|I_n]$.

2. Triangularizamos la matriz $A$ superiormente; es decir, utilizando transformaciones elementales, conseguimos hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal. Además si $A$ es invertible los elementos de la diagonal serán todos distintos de cero y por tanto podemos hacer unos todos los elementos de la diagonal. Se obtendrá $[L|B]$

3. Utilizando el mismo método pero desde abajo hacia arriba, podemos hacer cero los elementos que están por encima de la diagonal, obteniéndose $[I_n|A^{-1}]$.

# Determinantes: definición y propiedades

## Permutaciones (recordatorio)

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para permutar estos elementos, es decir para situarlos en distinto orden, bastará recurrir a un aplicación biyectiva $\sigma : N \longrightarrow N$, que representaremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_n = \{$Permutaciones de $n$ elementos$\}$.
Se llaman *trasposiciones* a aquellas permutaciones en las que, salvo dos elementos de $N$, que vamos a llamar $i$ y $j$, todos los demás permanecen fijos (es decir, coinciden con su imagen); los elementos que varían se transforman uno en el otro (es decir $i$ en $j$ y $j$ en $i$).
Se llama *índice* de una permutación y se denota por $i(\sigma)$, al número de trasposiciones que presenta dicha permutación.

## Definición de determinante

$$A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ \Rightarrow \ |A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

donde el sumatorio se extiende a las $n!$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

## Menor complementario y adjunto

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se denomina **menor complementario** del elemento $a_{pq}$ y se denota $M_{pq}$, al determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila $p$ y la columna $q$ de $A$.
Se llama **adjunto** del elemento $a_{pq}$ al número, que representaremos por $A_{pq}$, definido por $A_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$

**<u>Teorema</u>[Desarrollo de $|A|$ por una fila o columna]**

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el $|A|$ se puede calcular desarrollándolo con respecto a cualquier fila o a cualquier columna,mediante

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

**<u>Propiedades de los determinantes.</u>**

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

1. $|A| = |A^t|$.
2. Si todos los elementos de una fila (columna) de $A$ son nulos, entonces $|A| = 0$.
3. Si se permutan entre sí dos líneas (filas o columnas) de un determinante, éste cambia de signo.
4. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales vale 0.
5. Si se multiplican todos los elementos de una fila (columna) de $A$ por un número $\lambda$, el determinante de la matriz $B$ resultante, queda $|B| = \lambda|A|$.
6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales vale 0.
7. Si cada elemento de una fila (columna), por ejemplo $p$, de la matriz $A$ es de la forma $a_{pq} = a'_{pq} + a''_{pq}$, entonces $|A| = |B| + |C|$, donde
$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, & \text{si} \quad i \neq p, \quad b_{pj} = a'_{pj} \\ c_{ij} = a_{ij}, & \text{si} \quad i \neq p, \quad c_{pj} = a''_{pj} \end{cases}$$
8. Al sumar a una línea una combinación lineal de las restantes líneas paralelas el determinante de $A$ no varía.

   Esta propiedad se utiliza a menudo en la práctica para calcular el determinante de una matriz de una forma más simple. Se toma un elemento de una línea distinto de cero como pivote y con él, utilizando la anterior propiedad, se hacen ceros el resto de elementos de dicha línea, con lo cual el determinante de orden $n$ se reduce al cálculo de un determinante de orden $n-1$.
9. Si una línea de la matriz $A$ es combinación lineal de otras líneas paralelas a ella, el $|A| = 0$.

   (En consecuencia si $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ las líneas de $A$ son linealmente independientes)
10. El producto de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) es nulo.

**Teorema**
Si $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

**Corolario**

$$\text{Si } A \text{ es no singular, } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

**Cálculo de la inversa mediante determinantes**

**Definición**
Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, a la matriz cuadrada de orden $n$, $adj(A) = ((A_{ij}))$ se le llama adjunta de la matriz $A$.

**Teorema**
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $A$ es invertible si y sólo si , $|A| \neq 0$. En dicho caso es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adj(A^t) = \frac{1}{|A|}.(adj(A))^t$$

# Menores de una matriz

**Definición**
Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se llama **menor de orden p** de la matriz $A$ al determinante de la matriz cuadrada obtenida por la intersección de p filas y p columnas de $A$.

**Definición**
Se llama **orlar** un menor de orden p a obtener un menor de orden $p+1$ añadiéndole una fila y una columna al menor original.

- Si en una matriz $A$, una fila $p$ (columna) es combinación lineal de otras $h$ filas (columnas), todos los menores de orden $h+1$ que pueden formarse con la fila $p$ y las $h$ filas (columnas) consideradas son nulos, en virtud de la propiedad 9 de los determinantes.
- Si un menor de orden $h$ de una matriz $A$ es distinto de cero, y todos los menores de orden $h+1$, que pueden formarse orlando éste con la fila $p$ de la matriz y cada una de las columnas que no figuran en el menor son nulos, entonces la fila $p$ es combinación lineal de las filas de la matriz que figuran en el menor.

## Rango de una matriz:

**Definición**
Se llama **rango por menores de** $A$, y lo denotamos por $r(A)$, al mayor orden de sus menores no nulos. Es decir, $r(A) = h$ si $A$ tiene algún menor no nulo de orden $h$ y todos los menores de orden $h+1$ de $A$ son nulos.

Si $r(A) = h$, un menor de orden $h$ de $A$ se denomina menor principal.

**Proposición**
Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$, $r(A) = n \iff |A| \neq 0$

- Si $r(A) = h$ y $M$ es un menor principal de $A$, entonces cualquier fila (columna) de $A$ será combinación lineal de las filas (columnas ) de $A$ que figuran en el menor.
- El rango de una matriz no varía si se añade o se suprime una fila (columna) combinación lineal de las demás.

## Cálculo del rango:

**Método de los orlados**:

1. Se suprimen todas las líneas de la matriz $A$ que sean combinación lineal de otras.
2. Se busca en la matriz un menor de orden uno no nulo.
3. Orlamos dicho menor con una fila determinada y con el resto de las columnas de la matriz $A$.
   (a) Si todos los orlados son nulos, se suprime dicha fila y se repite la operación con otra fila determinada.
   (b) Si algún orlado es no nulo se vuelve a repetir el proceso con dicho menor desde el punto (3).
4. Una vez agotadas todas las filas, el orden del último menor no nulo es el rango de la matriz $A$.