Autovalores y autovectores
Diagonalización y formas canónicas

Autovalores y autovectores.Propiedades

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f \in End(V)$. Fijada una base de V, existirá una matriz cuadrada A, tal que

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

La **diagonalización** consiste en encontrar una base de V en la que la matriz del endomorfismo f tenga forma diagonal.
Nos vamos a centrar en este tema en la diagonalización por semejanza, es decir, buscamos que la nueva matriz del endomorfismo sea diagonal y semejante a la actual.

Matrices semejantes

Definición [Matrices semejantes]
$A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Decimos que A es semejante a B si existe una matriz cuadrada P invertible tal que $A = P^{-1}BP$.

Propiedades

1. Si A es semejante a B, entonces $|A| = |B|$.
2. Si A es semejante a B, A^k es semejante a B^k.
3. Si A es semejante a B y p(t) es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces p(A) es semejante a p(B).
4. Si A es semejante a B y A es regular, entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

Autovalores y autovectores

Definición [Autovalor y autovector]

- Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **autovalor** o **valor propio** de f si
$$\exists\ \vec{x} \in V,\ \vec{x} \neq \vec{0}\ /\ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$
Al vector $\vec{x}$ se le llama **autovector** o **vector propio** asociado al autovalor λ.

  Obsérvese que los autovectores son vectores cuyos transformados tienen su misma dirección.

- Dada una matriz cuadrada A, llamamos **autovalores** y **autovectores** de A, a los **autovalores** y **autovectores** del endomorfismo f de matriz asociada A, es decir
$\lambda \in \mathbb{K}$ es un **autovalor** de A si
$$\exists\ X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq \Theta\ /\ AX = \lambda X$$
X es el autovector asociado al autovalor λ.

Definición [Espectro]

- Se llama **espectro** de f, y se designa $\sigma(f)$, al conjunto de todos los autovalores del endomorfismo f
$$\sigma(f)\ \equiv\ \{\lambda \in \mathbb{K}\ /\lambda \textbf{ es autovalor de } f\ \}$$

- Se llama **espectro** de A, y se designa $\sigma(A)$, al conjunto de todos los autovalores de la matriz A
$$\sigma(A)\ \equiv\ \{\lambda \in \mathbb{K}\ /\lambda \textbf{ es autovalor de } A\}$$

Definición [Subespacio propio]

El conjunto de todos los autovectores asociados a un autovalor λ junto con el vector $\vec{0}$ es un subespacio vectorial que se suele denotar A_λ ó $V(\lambda)$ y se denomina subespacio propio asociado al autovalor λ
$$A_\lambda = V(\lambda) = \{\vec{x}\ /\ A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \cup \{\vec{0}\}$$

Propiedades de los autovalores.

1.- Dos autovalores distintos no tiene autovectores comunes.

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \in \sigma(A),\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \Rightarrow\ A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$$

Es equivalente a decir: "Un autovector $\vec{x}$ está asociado a un único autovalor".
El recíproco, en general, no es cierto.

2.- A y A^t tienen los mismos autovalores.

3.- Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es un autovalor de kA.

4.- Si λ es un autovalor de A, $\lambda - k$ es un autovalor de $A - kI$.

5.- Si λ es un autovalor de A, y A es regular $(\mid A \mid \neq 0)$, $\dfrac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

6.- Autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

7.- Si λ es autovalor de A $\Rightarrow$ λ^k es autovalor de A^k.

<u>Polinomio característico</u>

Dado $f \in End(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V, sea $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* o *valor propio* de A si

$$\exists\ X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq \Theta \ / \ AX = \lambda X \ \Leftrightarrow \quad AX - \lambda X = \Theta \Rightarrow (A - \lambda I)X = \Theta$$

Esta última relación representa un sistema homogéneo. Para que este sistema homogéneo admita solución distinta de la trivial, debe ocurrir que el determinante de la matriz del sistema sea cero, es decir

$$\mid A - \lambda I \mid = 0$$

Por tanto, para obtener los autovalores de A, bastará resolver la ecuación $\mid A - \lambda I \mid = 0$, llamada *ecuación característica* de A.

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando se obtiene el polinomio en λ

$$P(\lambda) \ = \ a_0\lambda^n \ + \ a_1\lambda^{n-1} \ + \ \cdots \ + \ a_{n-1}\lambda \ + \ a_n$$

llamado **polinomio característico** de A.

Los autovalores de A son, pues, los ceros de su polinomio característico.

Una vez resuelta la ecuación característica y obtenidos, por tanto, los autovalores de A, para calcular los autovectores correspondientes al autovalor λ_i, habrá que resolver el sistema $(A \ - \ \lambda_i I)X \ = \ \Theta$.

Definición [Multiplicidad algebraica]

Si λ_0 es una raíz de multiplicidad α de la ecuación característica de A, se dirá que λ_0 es un autovalor de orden α de A. A α se le llama **multiplicidad algebraica** de λ y se suele notar $m_a(\lambda)$.

Se observa fácilmente que:

$$a_0 = (-1)^n \qquad a_1 = (-1)^{n-1}\text{traza}(A) \qquad a_n = |A|$$

donde traza(A) es la suma de los elementos de la diagonal prinicpal de A.

Teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los coeficientes de una ecuación y sus soluciones, se observa que si $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_n$ son las raíces del polinomio característico (no necesariamente autovalores de A, pues pudiera darse el caso de que $\lambda_i \notin \mathbb{K}$)

$$\lambda_1 \ + \ \lambda_2 \ + \ \cdots \ + \ \lambda_n = \text{traza}(A) \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

Nota.- De la igualdad $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n =\mid A \mid$, se deduce que si A es una matriz regular, no puede tener ningún autovalor nulo.

Proposición

Si B y A son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos autovalores.

Nota.- De la proposición anterior se deduce que el polinomio característico de la matriz de un endomorfismo no depende de la base que hayamos elegido.

Subespacios invariantes

Definición [Subespacio invariante de un endomorfismo]

Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V, y sea $U \subset V$ un subespacio. Se dice que U es invariante por f si $\forall\, \vec{u} \in U \;\Rightarrow\; f(\vec{u}) \in U$ o, lo que es lo mismo, $f(U) \subset U$.

Proposición

El subespacio propio asociado a un autovalor $\lambda\,(A_\lambda)$ de una matriz (o endomorfismo) es un subespacio vectorial invariante.

Definición [Multiplicidad geométrica]

Se llama **multiplicidad geométrica** de λ y se denota $m_g(\lambda)$, al número de autovectores linealmente independientes asociados asociados a λ es decir

$$m_g(\lambda) = \dim(A_\lambda)$$

Proposición

La dimensión del subespacio vectorial propio A_λ viene dado por

$$dim(A_\lambda) = dim(\mathcal{N}(A - \lambda I)) = dim(V) - rango(A - \lambda I)$$

Proposición

Si λ es un autovalor de A con multiplicidad algebraica r, entonces $1 \leq \dim(A_\lambda) \leq r$, es decir

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema [Teorema de Cayley-Hamilton]

Toda matriz cuadrada A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es raíz de su polinomio característico. Es decir, si $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ es el polinomio característico y Θ_n es la matriz nula de orden n , entonces

$$p(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = \Theta_n$$

Aplicación al cálculo de A^{-1}

Sea A una matriz invertible (es decir, $\mid A \mid \neq 0$)

Teniendo en cuenta que $a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = \Theta_n$, y por ser $a_n = \mid A \mid \neq 0$, se verifica que

$$A^{-1} = -\frac{a_0}{a_n}A^{n-1} - \frac{a_1}{a_n}A^{n-2} - \frac{a_2}{a_n}A^{n-3} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}I$$

Matrices diagonalizables

Definición [Matriz diagonalizable]
Sea A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diremos que A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si es semejante a una matriz diagonal, es decir

$$A \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow \exists Q \in \mathcal{M}_n, \ |Q| \neq 0 \ / \ A = Q^{-1}DQ$$

Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{B}$ base de V, $f \in \mathrm{End}(V)$ y sea $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$.

Si se puede encontrar una base $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ formada por autovectores, entonces se verifica que

$$\begin{array}{c} f(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1 = (\lambda_1, 0, 0, \cdots, 0) \\ f(\vec{x}_2) = \lambda_2 \vec{x}_2 = (0, \lambda_2, 0, \cdots, 0) \\ \vdots \\ f(\vec{x}_n) = \lambda_n \vec{x}_n = (0, 0, 0 \cdots, \lambda_n) \end{array}$$

y, por lo tanto, la matriz del endomorfismo en esta base será diagonal:

$$D \ = \ \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $D = P^{-1}AP$, con P la matriz del cambio de base, que resulta ser la matriz que tiene por columnas los autovectores de A colocados en el mismo orden en el que se colocan los autovalores de f en la diagonal.

¿ Es siempre posible encontrar dicha base?

En general, la respuesta es **NO**.

Teorema
La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es:

(a) que el polinomio característico se pueda factorizar en $\mathbb{K}$

(b) que la multiplicidad de cada autovalor λ sea igual a la dimensión del subespacio propio asociado A_λ, es decir, que las multiplicidades algebraica y geométrica coincidan

$$m_a(\lambda) \ = \ m_g(\lambda), \ \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Forma canónica de Jordan

No siempre es posible que una matriz cuadrada A sea semejante a una matriz diagonal.

Ejemplo.- La siguiente matriz cuadrada de orden n (conocida con el nombre de bloque de Jordan), no es diagonalizable:

$$J_\lambda^{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Teorema [de Jordan]
Sea A una matriz cuadrada. Entonces existen r autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ (que pueden ser iguales) y r números naturales $m_1, m_2, \ldots, m_r$ tales que A es semejante a la matriz diagonal por bloques:

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1}^{(m_1)} & & & \\ & J_{\lambda_2}^{(m_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_r}^{(m_r)} \end{bmatrix}$$

Esta matriz recibe el nombre de **forma canónica de Jordan** de la matriz A. En ella un mismo autovalor λ aparece en tantos bloques como indica $m_g(\lambda)$ y el número de veces que aparece en la diagonal de J es $m_a(\lambda)$.

Si P es la matriz que reduce A a su forma de Jordan, entonces sus m_1 primeras columnas satisfacen:

$$\begin{array}{ll} A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1, & \Rightarrow \ \vec{x}_1 \text{ es un autovector correspondiente a } \lambda_1 \\ A\vec{x}_i = \lambda_1 \vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}, & i = 2, \cdots, m_1 \end{array}$$

Los vectores $\vec{x}_i$ ($i = 2, \ldots, m_1$) se llaman autovectores generalizados de A, y la sucesión $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{m_1}$ se dice que es una cadena de Jordan correspondiente a λ_1. Naturalmente, cada bloque tiene su cadena correspondiente.

Método de Caros para el cálculo de J

1. Se calculan los autovalores de A $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ con sus multiplicidades correspondientes $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k$

2. Para cada autovalor λ de multiplicidad m se calculan los rangos de las matrices $(A-\lambda I)^p$ (a lo sumo habría que calcular la potencia $(A-\lambda I)^m$)

$$\begin{array}{llll}
rg(A-\lambda I) = r_1 \to q_1 = n - r_1 & & \text{si } q_1 < m, & \text{seguimos} \\
rg(A-\lambda I)^2 = r_2 \to q_2 = r_1 - r_2 & & \text{si } q_1 + q_2 < m, & \text{seguimos} \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
rg(A-\lambda I)^p = r_p \to q_p = r_{p-1} - r_p & & \text{si } q_1 + q_2 + \cdots + q_p = m, & \boxed{\text{FIN}}
\end{array}$$

$$\boxed{q_1 + q_2 + \cdots + q_p = \text{multiplicidad de } \lambda}$$

3. Al valor propio λ le corresponden:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{q_1 - q_2} & \text{bloques de Jordan de orden} & \boxed{1} \\
\boxed{q_2 - q_3} & \text{bloques de Jordan de orden} & \boxed{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\boxed{q_{p-1} - q_p} & \text{bloques de Jordan de orden} & \boxed{p-1} \\
\boxed{q_p} & \text{bloques de Jordan de orden} & \boxed{p}
\end{array}$$

Cálculo de P

Una vez calculada la matriz J por el método de Caros, procedemos a calcular la matriz P . Para ello, llamemos $\mathcal{N}_{k,\lambda} = Ker(A - \lambda I)^k$. Tomemos un vector

$$\vec{v}_i \in N_{i,\lambda} \setminus N_{i-1,\lambda}$$

Dado $\vec{v}_i$, calculamos:

$$\begin{array}{lcl} \vec{v}_{i-1} & = & (A - \lambda I)\vec{v}_i \\ \vec{v}_{i-2} & = & (A - \lambda I)\vec{v}_{i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v}_2 & = & (A - \lambda I)\vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 & = & (A - \lambda I)\vec{v}_2 \end{array}$$

y el vector $\vec{v}_1$ resulta ser un <u>*autovector*</u> de A (o una combinación lineal de ellos) y los vectores $\{\vec{v}_j,\ j = 2, \cdots, i\}$ son sus autovectores *generalizados*.

Esta operación se repite para cada bloque de Jordan, obteniendo así m autovectores (propios o generalizados) asociados al autovalor λ .

Repitiendo el proceso para cada λ llegamos a obtener n autovectores independientes, es decir, una base respecto de la cual, la matriz del endomorfismo es su Forma canónica de Jordan, o lo que es lo mismo, hemos encontrado la matriz P.

Ecuaciones en Diferencias

En esta sección estudiamos el comportamiento de los sistemas de ecuaciones en diferencias dados por una ecuación recurrente de la forma

$$\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$$

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden p y sea $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \ldots$ una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^p$ definidos de manera recurrente por

$$\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

a partir de un vector inicial $\vec{u}_0 \in \mathbb{K}^p$. Una relación de recurrencia de esta forma se llama **sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo** (que son los únicos que estudiaremos).

Si $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ es un sistema de ecuaciones en diferencias, se tiene, razonando por inducción, que $\vec{u}_n = A^n\vec{u}_0$. Con esta expresión podemos hallar $\vec{u}_n$ para cualquier valor de n. Sin embargo, vamos a dar una expresión más simple para $\vec{u}_n$ que nos permitirá ahorrar tiempo de cálculo y también estudiar el comportamiento a largo plazo de la sucesión $\vec{u}_n$.

Potencias de una matriz

Lema

Sea A una matriz cuadrada de orden p y $J = P^{-1}AP$ su forma canónica de Jordan, entonces

$$A^n = PJ^nP^{-1} \quad n = 1, 2, \cdots$$

de manera que si $J = \text{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_r)$, entonces $J^n = \text{diag}(J_1^n, J_2^n, \cdots, J_r^n)$.

En particular, si A es diagonalizable, entonces

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}; \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ los autovalores de A.

Lema

Si J_λ es un bloque de Jordan de orden r, entonces

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{r-1}\lambda^{n-r+1} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{r-2}\lambda^{n-r+2} \\ & & \lambda^n & \cdots & \binom{n}{r-3}\lambda^{n-r+3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}; \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Teorema
Sea $A \in \mathcal{M}_p$ cuadrada de orden p y $\vec{u}_0 \in \mathbb{K}^p$. Entonces la solución del sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1}$ con vector inicial $\vec{u}_0$ es

$$\vec{u}_n = PJ^nP^{-1}\vec{u}_0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $J = P^{-1}AP$ la forma canónica de Jordan de A.

Corolario
Si en las condiciones del teorema, además A es diagonalizable, entonces

$$\vec{u}_n = c_1\lambda_1^n\vec{x}_1 + c_2\lambda_2^n\vec{x}_2 + \cdots + c_p\lambda_p^n\vec{x}_p, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los autovalores de A, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ autovectores linealmente independientes asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ respectivamente y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^t$ la solución del sistema $Pc = \vec{u}_0$.

Ecuaciones lineales de orden p

Definición
Sea (z_n) una sucesión de números construida de la siguiente manera: dados p valores iniciales $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathbb{K}$ definimos z_n para $n \geq p+1$ mediante

$$z_n + a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \ldots + a_p z_{n-p} = 0 \qquad (\text{siendo } a_p \neq 0)$$

Una relación de recurrencia de la forma dada se llama **ecuación en diferencias lineal homogénea de orden p**. Esta expresión se puede convertir en un sistema de ecuaciones en diferencias de la siguiente manera:

Sea $\vec{u}_p = (z_p, z_{p-1}, \ldots, z_1)^t \in \mathbb{R}^p$ y, en general, $\vec{u}_n = (z_n, z_{n-1} \ldots, z_{n-p+1})^t$ entonces se tiene

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-p+2} \\ z_{n-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_{n-p+1} \\ z_{n-p} \end{pmatrix} = A\vec{u}_{n-1}$$

esta relación es válida para $n = p+1, p+2, \cdots$

Proposición

Los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son las raíces del polinomio

$$q(\lambda) = \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \cdots + a_p,$$

este polinomio recibe el nombre de **polinomio característico de la ecuación en diferencias**.

Teorema

Si el polinomio característico de una ecuación en diferencias de orden p tiene p raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, entonces la solución (z_n) de la ecuación homogénea se expresa como

$$z_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \cdots + c_p \lambda_p^n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

donde las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$ se determinan a partir de los p valores iniciales dados.