

## BOLETÍN 1. CAMPOS VECTORIALES

1. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones escalares de dos variables:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(c)  $f(x, y) = A \operatorname{sen} k_x x \cos k_y y$

Solución: (a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ; (b)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ ; (c)  $\frac{\partial f}{\partial x} = Ak_x \cos k_x x \cos k_y y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -Ak_y \operatorname{sen} k_x x \operatorname{sen} k_y y$ .

2. Determina las derivadas parciales de las siguientes funciones escalares de tres variables:

(a)  $f(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$

(b)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(c)  $f(x, y, z) = A \operatorname{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$

Solución: (a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = ik_x f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = ik_y f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = ik_z f$ ; (b)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ ; (c)  $\frac{\partial f}{\partial x} = Ak_x \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = Ak_y \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = Ak_z \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ .

3. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones vectoriales:

(a)  $\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{x} \mathbf{i} + \frac{1}{y} \mathbf{j}$

(b)  $\mathbf{A}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + (x^2 + y^2) \mathbf{j}$

(c)  $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 + z^2) \mathbf{i} + (x^2 + y^2) \mathbf{j} + (y^2 + z^2) \mathbf{k}$

Solución: (a)  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \mathbf{i}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \mathbf{j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = 0$ ; (b)  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = 2x \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = 2y \mathbf{j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = 0$ ; (c)  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = 2x \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = 2y \mathbf{j} + 2y \mathbf{k}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = 2z \mathbf{i} + 2z \mathbf{k}$ .

4. Calcula el gradiente de las siguientes funciones escalares:

(a)  $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(b)  $\phi(x, y, z) = A \operatorname{sen}(x + y - z)$

(c)  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(d)  $\phi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$

Solución: (a)  $\nabla \phi = (-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2})$ ; (b)  $\nabla \phi = (A \cos(x + y - z), A \cos(x + y - z), -A \cos(x + y - z))$ ; (c)  $\nabla \phi = (2x, 2y, 2z)$ ; (d)  $\nabla \phi = (ik_x \phi, ik_y \phi, ik_z \phi)$ .

5. Calcula la diferencial de las funciones escalares del problema anterior.

Solución: (a)  $d\phi = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} dx - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} dy - z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} dz$ ; (b)  $d\phi = A \cos(x + y - z) dx + A \cos(x + y - z) dy - A \cos(x + y - z) dz$ ; (c)  $d\phi = 2x dx + 2y dy + 2z dz$ ; (d)  $d\phi = i\phi(k_x dx + k_y dy + k_z dz)$ .

6. Determina la divergencia de las siguientes funciones vectoriales:

(a)  $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 + y^2) \mathbf{i} + (z^2 + y^2) \mathbf{j} + (x^2 + z^2) \mathbf{k}$

(b)  $\mathbf{A}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xz) \mathbf{i} + \operatorname{sen}(xy) \mathbf{j} + \operatorname{sen}(yz) \mathbf{k}$

(c)  $\mathbf{A}(x, y, z) = e^{ik_x x} \mathbf{i} + e^{ik_y y} \mathbf{j} + e^{ik_z z} \mathbf{k}$

Solución: (a)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x + 2y + 2z$ ; (b)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = z \cos(xz) + x \cos(xy) + y \cos(yz)$ ; (c)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = ik_x e^{ik_x x} + ik_y e^{ik_y y} + ik_z e^{ik_z z}$ .

7. Calcula el rotacional de las funciones vectoriales del problema anterior.

Solución: (a)  $\nabla \wedge \mathbf{A} = -2z \mathbf{i} - 2x \mathbf{j} - 2y \mathbf{k}$ ; (b)  $\nabla \wedge \mathbf{A} = z \cos(yz) \mathbf{i} + x \cos(xz) \mathbf{j} + y \cos(xy) \mathbf{k}$ ; (c)  $\nabla \wedge \mathbf{A} = 0$ .

8. Calcula el laplaciano de las funciones escalares del problema 4.

Solución: (a)  $\nabla^2 \phi = 0$ ; (b)  $\nabla^2 \phi = -3A \operatorname{sen}(x + y - z)$ ; (c)  $\nabla^2 \phi = 6$ ; (d)  $\nabla^2 \phi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \phi$ .