INGENIERÍA QUÍMICA
1er curso

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

PRÁCTICA 5

ESTUDIO DEL PÉNDULO DE TORSIÓN. MEDIDA DE MOMENTOS DE INERCIA.

Departamento de Física Aplicada
Escuela Politécnica Superior de la Rábida.

V. Péndulo de torsión y momentos de inercia

1. Objetivos

- Calibración de un péndulo de torsión.
- Determinación del momento de inercia de sólidos sencillos (varilla, disco y cilindro) por procedimientos dinámicos utilizando un péndulo de torsión dentro del límite de pequeñas oscilaciones.
- Verificación del teorema de Steiner.

2. Fundamento teórico

2.1 Concepto de momento de inercia

Sabemos que el movimiento más general que puede tener un sólido es una combinación de un movimiento de traslación más uno de rotación (alrededor de un eje). La ecuación fundamental que determina el movimiento de traslación es:

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a}_c \tag{1}$$

donde M es la masa del sólido y $\mathbf{a}_c$ es la aceleración del centro de masas. Si el sólido tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo (E), la ecuación fundamental que determina el movimiento de rotación es:

$$\mathbf{M}_E = I_E\,\alpha \tag{2}$$

donde $\mathbf{M}_E$ es el momento de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido y α es el vector aceleración angular de rotación. La constante de proporcionalidad (I_E) se denomina **momento de inercia** del sólido respecto al eje E. La definición de I_E para un sistema de partículas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ viene dada por:

$$I_E = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_E = \sum m_i r_i^2} \tag{3}$$

donde $r_1, \ldots, r_n$ son las distancias de $m_1, \ldots, m_n$ al eje E. La correspondiente definición de momento de inercia de un sólido respecto a une eje E es:

$$I_E = \int dm\, r^2 \tag{4}$$

donde r es la distancia de cada trozo (infinitesimal) de masa dm al eje E. Al igual que, de acuerdo con (1), la masa M condiciona el movimiento de traslación de un sólido, **el movimiento de rotación de un sólido respecto a un eje está condicionado, según (2), por su momento de inercia respecto a dicho eje**. Según la definición dada en (3), el momento de inercia de un sistema de partículas (o de un sólido) dado varía si varía el eje de rotación.

Sabemos que la masa es una propiedad aditiva: si un sistema está compuesto por varios subsistemas de masas $m_1, \ldots, m_n$, la masa total del sistema viene dada por $M = m_1 + \ldots + m_n$. De igual manera, el momento de inercia de un sólido (respecto a un eje E) compuesto por varios subsistemas es aditivo y por tanto viene dado por:

$$I_E = (I_E)_1 + \ldots + (I_E)_n \tag{5}$$

donde $(I_E)_i$ es el momento de inercia (respecto al mismo eje E) del subsistema i.

2.2 Péndulo de torsión

En esencia, un péndulo de torsión está formado por un alambre, anclado en uno de sus extremos, mientras que el otro extremo se encuentra fijo a un sólido. Si giramos el sólido un cierto ángulo aplicando un cierto momento $(M_E)_{\text{ext}}$ sobre su periferia, el péndulo de torsión (en equilibrio) responde elásticamente ejerciendo un momento recuperador igual y de sentido contrario. Dicho momento se denomina **momento de torsión**. El concepto de momento de torsión es el análogo al de fuerza elástica en un resorte. Si el ángulo girado no es demasiado grande, se verifica la ley de Hooke, que en este caso se expresa como:

$$(M_E)_{\text{tor}} = -K\Delta\phi \tag{6}$$

donde K es la **constante elástica del péndulo de torsión o constante de torsión** (observa que K es el parámetro análogo a la constante k de un resorte). Si deja de actuar el momento externo, el sólido girará alrededor de su posición de equilibrio bajo la acción del momento de torsión. Si las oscilaciones no son grandes (límite de pequeñas oscilaciones) y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación (2), es inmediato comprobar que el movimiento de rotación es un MAS. En efecto; para una posición angular ϕ el momento de torsión, según (6) es $-K\phi$. Usando (2) se tiene:

$$-K\phi = I_E\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{K}{I_E}\,\phi \tag{7}$$

Dado que la aceleración angular de rotación es proporcional (y de sentido contrario) a la coordenada angular ϕ, el movimiento es de tipo MAS. Según la expresión anterior, la frecuencia angular del MAS y el periodo vienen dados por:

$$\omega^2 = \frac{K}{I_E} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_E}{K}}} \tag{8}$$

donde I_E es el momento de inercia del sólido oscilante respecto al eje de giro y K la constante de torsión del péndulo de torsión. Si al sólido oscilante le añadimos otro cuerpo cuyo momento de inercia respecto al mismo eje sea I'_E, el periodo de las oscilaciones se modifica, siendo la expresión correspondiente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(I_E)_{\text{total}}}{K}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_E + I'_E}{K}}} \tag{9}$$

2.3 Teorema de Steiner

Según hemos visto en la §2.1, el momento de inercia de un sólido depende del eje respecto al que se calcule. Sea I_C el momento de inercia de un sólido arbitrario respecto a un eje que pase por su centro de masas. Si queremos determinar el momento de inercia del mismo sólido respecto a otro eje E, en principio, tendríamos que calcular I_E a partir de la definición (4). El **teorema de Steiner** permite calcular de forma sencilla el valor de I_E en el caso en que los ejes sean paralelos (por eso, dicho resultado se conoce en ocasiones como *teorema de los ejes paralelos*). Si M es la masa del sólido y D es la distancia entre los ejes, el teorema de Steiner establece que:

$$\boxed{I_E = I_C + M\,D^2} \tag{10}$$

3. Material

- Soporte de trípode
- Varilla soporte
- Nueces dobles
- Soporte del péndulo
- Alambre de torsión
- Balanza de precisión
- Alambres de torsión
- Disco de torsión
- Varios cuerpos para cálculo de momento de inercia
- Juegos de pesas
- Cronométro
- Regla graduada

4. Procedimiento experimental

El péndulo de torsión que utilizamos en la práctica consiste en un disco homogéneo. El alambre que provoca la torsión está situado en su parte inferior. Tras aplicar un cierto momento, el disco de torsión puede girar alrededor de un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro de masas.

4.1 Determinación de la constante elástica K

1. Sobre el eje del disco de torsión colocamos la varilla. Dicha varilla es homogénea y de longitud $L = 60$ cm. **Asegúrate de que el eje de rotación del disco coincida con el eje perpendicular a la varilla y que pase por su centro de masas** (centro geométrico de la varilla).

2. Determina el valor M de la masa de la varilla usando la balanza.

$$M(g) = \tag{11}$$

3. Teniendo en cuenta los valores de L y M, se puede comprobar, a partir de la definición, que el valor del momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular y que pase por su centro de masas viene dado por:

$$(I_C)_{\text{varilla}} = \frac{1}{12} M L^2 \tag{12}$$

Usando esta expresión, determina $(I_C)_{\text{varilla}}$ en kg·cm^2 y en unidades del sistema internacional.

$$(I_C)_{\text{varilla}} = \tag{13}$$

4. Determina el periodo de las oscilaciones del sistema disco + varilla. Toma un total de 10 medidas. Considera ángulos de unos 20°–30° para la amplitud angular inicial y procura tomar (aproximadamente) el mismo valor en todas las medidas.

$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T_5(s)$	$T_6(s)$	$T_7(s)$	$T_8(s)$	$T_9(s)$	$T_{10}(s)$

5. Determina el valor medio del periodo de las oscilaciones así como el error correspondiente.

$$T(s) = \tag{14}$$

6. Teniendo en cuenta el valor experimental de $(I_C)_{\text{varilla}}$ y del periodo de las oscilaciones, utiliza la expresión (8) para determinar el valor experimental de la constante de torsión K (y su error) del disco de torsión. Expresa el resultado en N·cm y en unidades del sistema internacional. Este procedimiento de cálculo de K se denomina **calibración del péndulo**.

4.2 Determinación de K por procedimientos dinámicos

1. Determina la masa de las dos pesas m_1 y m_2 utilizando para ello la balanza de precisión.

$$m_1(g) = \qquad\qquad m_2(g) =$$

2. Coloca simétricamente las dos pesas a iguales distancias (r) del centro del eje de la varilla, comenzando por el valor $r = 4$cm. Para cada valor de r, el momento de inercia del sistema (varilla $+m_1 + m_2$) respecto al eje de giro viene dado (según la propiedad de aditividad del momento de inercia) por:

$$(I_C)_{\text{total}} = (I_C)_{\text{varilla}} + m_1 r^2 + m_2 r^2 = (I_C)_{\text{varilla}} + (m_1 + m_2) r^2 \tag{15}$$

3. Para dicha distancia, determina el valor del periodo de las oscilaciones, promediando sobre un total de 4 medidas para cada valor de r. Considera siempre, de forma aproximada, la misma amplitud angular inicial (de unos 20°–30°).

4. Repite la determinación del periodo de las oscilaciones para los valores de r indicados en la tabla

r (cm)	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T(s)$
4					
6					
8					
10					
12					
14					
16					
18					
20					

5. Representa gráficamente los valores de T^2 frente a los valores de r^2 y realiza un análisis completo por mínimos cuadrados.

6. Según la expresión teórica (9), y usando el valor de $(I_C)_{\text{total}}$ dado en (15), se tiene que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (I_C)_{\text{varilla}}}{K} + \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)}{K}\, r^2 \tag{16}$$

por lo que, según la expresión teórica, la dependencia de T^2 frente a r^2 debe ser de tipo lineal. Argumenta si es esto lo que observas en tu representaciñón gráfica.

7. Teniendo en cuenta el valor de la pendiente obtenida por mínimos cuadrados (así como los valores de m_1 y m_2), determina el valor experimental de la constante K (con su error correspondiente). Compara con el valor de K obtenido en la sección §4.1 y argumenta si son o no compatibles ambos valores.

8. A partir del valor de la ordenada en el origen obtenida por mínimos cuadrados y usando el valor de K obtenido en el punto anterior, determina el valor de $(I_C)_{\text{varilla}}$ (con su error correspondiente). Compara con el correspondiente valor obtenido en la sección §4.1 y argumenta si son o no compatibles ambos valores.

4.3 Verificación del teorema de Steiner

1. Retira las dos pesas y trabaja en esta sección únicamente con la varilla insertada en el soporte del disco de torsión.

2. Dispón la varilla de forma que pueda girar alrededor de un eje de rotación E perpendicular a la varilla, siendo D la distancia del eje de rotación E al centro de la varilla.

3. Según el teorema de Steiner, el momento de inercia de la varilla respecto a dicho eje debe verificar:

$$(I_E)_{\text{varilla}} = (I_C)_{\text{varilla}} + M\, D^2 \tag{17}$$

donde $(I_C)_{\text{varilla}}$ es el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pase por su centro de masas y M es la masa de la varilla.

4. Determina, para los valores de D indicados en la tabla, el periodo de las oscilaciones. Para cada valor de D calcula el periodo promediando sobre 4 medidas.

D (cm)	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T(s)$
0					
4					
8					
12					
16					
20					

5. Representa gráficamente los valores de T^2 frente a los valores de D^2 y realiza un análisis completo por mínimos cuadrados.

6. Según la expresión teórica (9), y usando el valor de $(I_E)_{\text{varilla}}$ dado en (17), se tiene que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (I_C)_{\text{varilla}}}{K} + \frac{4\pi^2 M}{K} D^2 \tag{18}$$

por lo que, si es cierto el teorema de Steiner, la dependencia de T^2 frente a D^2 debe ser de tipo lineal. Comenta si es esto lo que observas en tu representación gráfica.

7. Teniendo en cuenta el valor de la pendiente obtenida por mínimos cuadrados (así como el valor de M), determina el valor experimental de la constante K (con su error correspondiente). Compara con los valores de K obtenidos en apartados anteriores y comprueba si obtienes valores compatibles.

8. A partir del valor de la ordenada en el origen obtenida por mínimos cuadrados y usando el valor de K obtenido en el punto anterior, determina el valor de $(I_C)_{\text{varilla}}$ (con su error correspondiente). Compara con los valores de $(I_C)_{\text{varilla}}$ obtenidos en apartados anteriores y comprueba si obtienes valores compatibles.

4.4 Determinación del momento de inercia de otros sólidos

En la sección §4.1 procedimos a la calibración del péndulo de torsión, esto es, obtuvimos el valor de la constante elástica de torsión K (en los apartados posteriores también obtuvimos el valor de K por otros procedimientos, pero el empleado en §4.1 debe resultar el más fiable y, por tanto, el más exacto). Una vez calibrado el péndulo de torsión, se puede proceder a la determinación del momento de inercia de otro sólido.

A. Disco homogéneo

1. Coloca el disco homogéneo en el eje del disco de torsión.

2. Determina el periodo de las oscilaciones del conjunto (disco + disco de torsión) siguiendo las mismas recomendaciones anteriores ($20° - 30°$ de amplitud inicial), promediando sobre un total de 4 medidas:

$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T(s)$

3. Según la expresión (8) $\omega^2 = K/(I_C)_{\text{disco}}$ de donde:

$$(I_C)_{\text{disco}} = \frac{K}{4\pi^2} T^2 \tag{19}$$

por lo que podemos obtener el valor del momento de inercia del sólido problema (el disco) a partir de K y de la medida de T. Observa que para determinar el error habrá que aplicar la fórmula de propagación de errores.

4. A partir de la definición de momento de inercia (4) se puede comprobar que para un disco homogéneo de radio R y masa M, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al disco y que pase por su centro de masas viene dado por:

$$(I_C)_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{20}$$

Determina experimentalmente los valores de M y R del disco, calcula el valor de $(I_C)_{\text{disco}}$ a partir de la anterior expresión y compara con el valor obtenido con anterioridad. Comprueba si los valores son compatibles.

B. Cilindro homogéneo

1. Coloca el cilindro homogéneo en el eje del disco de torsión.
2. Determina el periodo de las oscilaciones del conjunto (cilindro + disco de torsión) siguiendo las mismas recomendaciones anteriores ($20° - 30°$ de amplitud inicial), promediando sobre un total de 4 medidas:

$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T(s)$

3. Según la expresión (8) $\omega^2 = K/(I_C)_{\text{disco}}$ de donde:

$$(I_C)_{\text{cilindro}} = \frac{K}{4\pi^2}T^2 \tag{21}$$

por lo que podemos obtener el valor del momento de inercia del sólido problema (el cilindro) a partir de K y de la medida de T. Observa que para determinar el error habrá que aplicar la fórmula de propagación de errores.

4. A partir de la definición de momento de inercia (4) se puede comprobar que para un disco homogéneo de radio R y masa M, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al disco y que pase por su centro de masas que:

$$(I_C)_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{22}$$

(observa que el resultado es independiente de la altura del cilindro). Determina experimentalmente los valores de M y R del cilindro, calcula el valor de $(I_C)_{\text{cilindro}}$ a partir de la anterior expresión y compara con el valor obtenido con anterioridad. Comprueba si los valores son compatibles.