

Deducción microscópica de la ecuación de Lindblad o ecuación GKLS

Luis Octavio Castaños Cervantes

Granada 2022

1. El sistema completo

Consideramos un sistema abierto S acoplado a un reservorio B .

Sean

- ▶ H_S el hamiltoniano del sistema de interés S
- ▶ H_B el hamiltoniano del reservorio B
- ▶ V el hamiltoniano de interacción entre S y B

y

- ▶ $\rho_{SB}(t)$ el operador de densidad del sistema completo $S + B$
- ▶ $\rho_S(t) = \text{Tr}_B [\rho_{SB}(t)]$ el operador de densidad de S
- ▶ $\rho_B(t) = \text{Tr}_S [\rho_{SB}(t)]$ el operador de densidad de B

Meta: obtener una ecuación de evolución para $\rho_S(t)$.

2. Supuestos

- ▶ H_S y H_B son independientes del tiempo y hermitianos.
- ▶ El hamiltoniano de interacción es de la forma

$$V = \sum_{\alpha} A_{\alpha} B_{\alpha}$$

- ▶ A_{α} y B_{α} son operadores hermitianos independientes del tiempo de S y B , respectivamente, y

$$\langle B_{\alpha} \rangle(0) = 0$$

- ▶ El hamiltoniano del sistema completo $S + B$ es

$$H = H_S + H_B + V$$

3. El esquema de interacción (IP)

Pasamos al IP definido por la transformación unitaria

$$U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_B)t}$$

Para todo operador lineal $C(t)$ en el esquema de Schrödinger, el operador correspondiente en el IP es

$$C_I(t) = U_0^\dagger(t)C(t)U_0(t) .$$

Entonces,

$$(A_\alpha)_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_S t} A_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t}$$

$$(B_\alpha)_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_B t} B_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t}$$

$$(\rho_S)_I(t) = \text{Tr}_B \left[(\rho_{SB})_I(t) \right]$$

4. La ecuación de von Neumann en el IP

La ecuación es

$$\frac{d}{dt}(\rho_{SB})_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[V_I(t), (\rho_{SB})_I(t) \right] \quad (1)$$

Si la integramos de 0 a t , entonces

$$(\rho_{SB})_I(t) = \rho_{SB}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left[V_I(t'), (\rho_{SB})_I(t') \right] \quad (2)$$

Substituyendo (2) en el lado derecho de (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_{SB})_I(t) &= -\frac{i}{\hbar} \left[V_I(t), \rho_{SB}(0) \right] \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt' \left[V_I(t), \left[V_I(t'), (\rho_{SB})_I(t') \right] \right] \end{aligned} \quad (3)$$

5. La ecuación para $\rho_S(t)$

Trazamos (3) sobre los grados de libertad de B

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) &= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B \left[V_I(t), \rho_{SB}(0) \right] \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt' \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t'), (\rho_{SB})_I(t') \right] \right] \end{aligned} \quad (4)$$

6. Aproximación I: Acoplamiento débil o de Born

$S + B$ está en un estado separable de la forma

$$\rho_{SB}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_B(0).$$

Nota: aquí despreciamos el efecto de S sobre el estado del reservorio.

Además, suponemos que $\rho_B(0)$ es un estado estacionario:

$$\left[\rho_B(0), H_B \right] = 0 .$$

7. La ecuación de Born

Aplicando la aproximación de Born en la ecuación (4) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) &= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B \left[V_I(t), \rho_{SB}(0) \right] \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt' \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t'), (\rho_{SB})_I(t') \right] \right] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t'), (\rho_S)_I(t') \otimes \rho_B(0) \right] \right]\end{aligned}\tag{5}$$

8. Las funciones de autocorrelación del reservorio

Definimos

$$c_{\alpha\alpha'}(t_1, t_2) = \text{Tr}_B \left[\rho_B(0) (B_\alpha)_I(t_1) (B_{\alpha'})_I(t_2) \right]$$

Propiedades:

- ▶ $c_{\alpha\alpha'}(t_1, t_2)^* = c_{\alpha'\alpha}(t_2, t_1)$
- ▶ Son homogéneas (porque $\rho_B(0)$ es un estado estacionario):

$$\begin{aligned} c_{\alpha\alpha'}(t_1, t_2) &= \text{Tr}_B \left[\rho_B(0) (B_\alpha)_I(t_1 - t_2) (B_{\alpha'})_I(0) \right] \\ &= c_{\alpha\alpha'}(t_1 - t_2, 0) \end{aligned}$$

Escribiremos

$$C_{\alpha\alpha'}(t) = c_{\alpha\alpha'}(t, 0)$$

Entonces se satisface

$$C_{\alpha\alpha'}(t)^* = C_{\alpha'\alpha}(-t)$$

9. Aproximación II: Markov

Suponemos que

- ▶ Las funciones de autocorrelación del reservorio decaen a cero en una escala de tiempo τ_B :

$$\left| C_{\alpha\alpha'}(\tau) \right| \simeq 0 \quad \text{si } \tau \geq \tau_B.$$

- ▶ La escala de tiempo τ_S en la que $(\rho_S)_I(t)$ varía apreciablemente satisface

$$\tau_B \ll \tau_S .$$

10. Efecto de la aproximación de Markov - parte 1 - Ecuación de Redfield

Empezando con la ecuación de Born

$$\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t'), (\rho_S)_I(t') \otimes \rho_B(0) \right] \right]$$

hacemos el cambio de variable $t' = t - \tau$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t - \tau), (\rho_S)_I(t - \tau) \otimes \rho_B(0) \right] \right]$$

aproximamos $(\rho_S)_I(t - \tau) \simeq (\rho_S)_I(t)$

$$\simeq -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t - \tau), (\rho_S)_I(t) \otimes \rho_B(0) \right] \right]$$

y se obtiene la **ecuación de Redfield**.

11. Efecto de la aproximación de Markov - parte 2 - Ecuación de Born-Markov

Extendemos el intervalo de integración $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) \\ \simeq & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau \text{Tr}_B \left[V_I(t), \left[V_I(t-\tau), (\rho_S)_I(t) \otimes \rho_B(0) \right] \right] \\ = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \int_0^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) \left\{ (A_\alpha)_I(t) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t) \right. \\ & \left. - (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t) (A_\alpha)_I(t) \right\} + h.c. \end{aligned}$$

- ▶ Las aproximaciones de Born-Markov no garantizan que la ecuación resultante defina el generador de un semigrupo dinámico.
- ▶ La evolución de S no se describe en intervalos de longitud $\sim \tau_B$.

12. Eigenoperadores de H_S - parte 1

Consideramos

- ▶ El espectro de H_S

$$\sigma(H_S) = \left\{ E_j : j \in I \right\}$$

- ▶ El conjunto de frecuencias de Bohr de H_S

$$\mathcal{F}_B = \left\{ \omega : \omega = \frac{E_j - E_k}{\hbar}, \quad j, k \in I \right\}$$

- ▶ El proyector ortogonal sobre el eigenspacio asociado al eigenvalor E_j

$$\Pi(E_j)$$

13. Eigenoperadores de H_S - parte 2

Definimos

$$A_\alpha(\omega) = \sum_{E_j - E_k = \hbar\omega} \Pi(E_k) A_\alpha \Pi(E_j)$$

Propiedades

- ▶ $A_\alpha(\omega)^\dagger = A_\alpha(-\omega)$
- ▶ $[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\hbar\omega A_\alpha(\omega)$
- ▶ $[A_\alpha(\omega)]_I(t) = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$
- ▶ $A_\alpha = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} A_\alpha(\omega)$
- ▶ $(A_\alpha)_I(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$

14. Descomposición en eigenoperadores

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) \\ = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \int_0^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) \left\{ (A_\alpha)_I(t)(A_{\alpha'})_I(t-\tau)(\rho_S)_I(t) \right. \\ & \left. - (A_{\alpha'})_I(t-\tau)(\rho_S)_I(t)(A_\alpha)_I(t) \right\} + h.c. \\ = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega, \omega' \in \mathcal{F}_B} e^{-i(\omega+\omega')t} \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega') \left[A_\alpha(\omega) A_{\alpha'}(\omega') (\rho_S)_I(t) \right. \\ & \left. - A_{\alpha'}(\omega') (\rho_S)_I(t) A_\alpha(\omega) \right] + h.c. , \end{aligned}$$

donde definimos

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega') = \int_0^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) e^{i\omega'\tau}$$

15. Aproximación III: Secular o de la Onda Rotante

- ▶ La escala de tiempo típica de la evolución intrínseca del sistema abierto S es

$$\tau_{\text{RWA}} = \max \left\{ \frac{2\pi}{|\omega + \omega'|} : \omega, \omega' \in \mathcal{F}_B \text{ con } \omega' \neq -\omega \right\}$$

satisface

$$\tau_{\text{RWA}} \ll \tau_S$$

- ▶ Se desprecian términos con $\omega + \omega' \neq 0$.

16. Ecuación maestra en las aproximaciones de Born-Markov-onda rotante

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \Gamma_{\alpha\alpha'}(-\omega) \left[A_\alpha(\omega) A_{\alpha'}(-\omega) (\rho_S)_I(t) \right. \\ &\quad \left. - A_{\alpha'}(-\omega) (\rho_S)_I(t) A_\alpha(\omega) \right] + h.c. \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \left[A_\alpha(-\omega) A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) \right. \\ &\quad \left. - A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) A_\alpha(-\omega) \right] + h.c. \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \left[A_\alpha(\omega)^\dagger A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) \right. \\ &\quad \left. - A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) A_\alpha(\omega)^\dagger \right] + h.c.\end{aligned}$$

17. Regreso al esquema de Schrödinger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] \\ & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \left[A_\alpha(\omega)^\dagger A_{\alpha'}(\omega) \rho_S(t) \right. \\ & \left. - A_{\alpha'}(\omega) \rho_S(t) A_\alpha(\omega)^\dagger \right] + h.c. \end{aligned}$$

donde se utilizó que

$$\begin{aligned} A_\alpha(\omega) e^{i\omega t} &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} A_\alpha(\omega) e^{\frac{i}{\hbar} H_S t} \\ A_\alpha(\omega)^\dagger e^{-i\omega t} &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} A_\alpha(\omega)^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} H_S t} \end{aligned}$$

18. Descomposición de la T.F. de las funciones de autocorrelación

Recordamos que

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) = \int_0^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) e^{i\omega\tau}$$

Entonces

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)^* = \int_{-\infty}^0 d\tau C_{\alpha'\alpha}(\tau) e^{i\omega\tau}$$

Definimos

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) &= \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) + \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) e^{i\omega\tau} \\ S_{\alpha\alpha'}(\omega) &= \frac{1}{2i} [\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) - \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^*]\end{aligned}$$

19. Ecuación maestra en la 1ª forma estándar

Tenemos

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) + iS_{\alpha\alpha'}(\omega), \quad \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^* = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) - iS_{\alpha\alpha'}(\omega)$$

Substituyendo en la ecuación maestra de Born-Markov-rwa

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)\right] + \mathcal{D}[\rho_S(t)]$$

donde

- ▶ El hamiltoniano de corrimiento Lamb es

$$H_{LS} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} S_{\alpha\alpha'}(\omega) A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} A_{\alpha'}(\omega)$$

- ▶ El disipador es

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)}{\hbar^2} \left[A_{\alpha'}(\omega) \rho A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} - \frac{1}{2} \left\{ A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} A_{\alpha'}(\omega), \rho \right\} \right]$$

20. Ecuación maestra en la 1ª forma estándar

La ecuación maestra de Born-Markov-RWA toma la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)\right] + \mathcal{D}[\rho_S(t)]$$

- ▶ El hamiltoniano de corrimiento Lamb es

$$H_{LS} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} S_{\alpha\alpha'}(\omega) A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} A_{\alpha'}(\omega)$$

- ▶ El disipador es

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)}{\hbar^2} \left[A_{\alpha'}(\omega) \rho A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} - \frac{1}{2} \left\{ A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} A_{\alpha'}(\omega), \rho \right\} \right]$$

- ▶ $H_{LS}^{\dagger} = H_{LS}$, $[H_S, H_{LS}] = 0$, $S_{\alpha\alpha'}(\omega)^* = S_{\alpha'\alpha}(\omega)$

21. Propiedades de los $\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)$

Recordamos que

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) &= \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) + \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C_{\alpha\alpha'}(\tau) e^{i\omega\tau}, \\ C_{\alpha\alpha'}(t)^* &= C_{\alpha'\alpha}(-t).\end{aligned}$$

Entonces

$$\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)^* = \gamma_{\alpha'\alpha}(\omega).$$

Luego, la matriz $\mathbb{G}(\omega)$ cuya componente (α, α') es

$$\mathbb{G}_{\alpha\alpha'}(\omega) = \gamma_{\alpha\alpha'}(\omega),$$

es hermitiana.

22. Operadores de Lindblad

La matriz $\mathbb{G}(\omega)$ es diagonalizable mediante una transformación unitaria $\mathbb{U}(\omega)$:

$$\gamma_j \delta_{ij} = \left[\mathbb{U}(\omega)^\dagger \mathbb{G}(\omega) \mathbb{U}(\omega) \right]_{ij} = \sum_{\alpha, \alpha'} u_{\alpha i}(\omega)^* \gamma_{\alpha \alpha'}(\omega) u_{\alpha' j}(\omega),$$

$$\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{I} \Leftrightarrow \sum_{\alpha} u_{\alpha i}(\omega)^* u_{\alpha j}(\omega) = \delta_{ij},$$

$$\mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} \Leftrightarrow \sum_{\alpha} u_{i\alpha}(\omega) u_{j\alpha}(\omega)^* = \delta_{ij},$$

Definimos los operadores de Lindblad

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_1(\omega) \\ \mathbb{A}_2(\omega) \\ \mathbb{A}_3(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbb{U}(\omega)^\dagger \begin{pmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ A_3(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{A}_j(\omega) = \sum_{\alpha} u_{\alpha j}(\omega)^* A_{\alpha}(\omega)$$

23. Reexpresión del disipador con operadores de Lindblad

En la 1ª forma estándar el disipador es

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{\gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)}{\hbar^2} \left[A_{\alpha'}(\omega) \rho A_{\alpha}(\omega)^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ A_{\alpha}(\omega)^\dagger A_{\alpha'}(\omega), \rho \right\} \right]$$

Substituyendo

$$A_{\alpha}(\omega) = \sum_i u_{\alpha i}(\omega) \mathbb{A}_i(\omega)$$

obtenemos

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_j \frac{\gamma_j(\omega)}{\hbar^2} \left[\mathbb{A}_j(\omega) \rho \mathbb{A}_j(\omega)^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{A}_j(\omega)^\dagger \mathbb{A}_j(\omega), \rho \right\} \right]$$

24. Ecuación maestra en la forma de Lindblad

La ecuación maestra de Born-Markov-RWA toma la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)\right] + \mathcal{D}[\rho_S(t)]$$

- ▶ El hamiltoniano de corrimiento Lamb es

$$H_{LS} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_{\alpha, \alpha'} S_{\alpha\alpha'}(\omega) A_{\alpha}(\omega)^{\dagger} A_{\alpha'}(\omega)$$

- ▶ El disipador es

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_B} \sum_j \frac{\gamma_j(\omega)}{\hbar^2} \left[\mathbb{A}_j(\omega) \rho \mathbb{A}_j(\omega)^{\dagger} - \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{A}_j(\omega)^{\dagger} \mathbb{A}_j(\omega), \rho \right\} \right]$$

- ▶ $H_{LS}^{\dagger} = H_{LS}$, $[H_S, H_{LS}] = 0$,
- ▶ $S_{\alpha\alpha'}(\omega)^* = S_{\alpha'\alpha}(\omega)$, $\gamma_j(\omega) \geq 0$.

25. Sistemas con varias componentes

- ▶ **Ambientes independientes:**

- ▶ Cada subsistema actúa con un reservorio distinto.

- ▶ **El mismo ambiente:**

- ▶ Los subsistemas pueden interactuar a través del ambiente.
- ▶ Por ejemplo, si varios qubits interactúan con un mismo ambiente, entonces aparece la interacción dipolo-dipolo y los qubits pueden enredarse.

L. O. Castaños, *X state and quantum and classical correlations of two driven qubits with dissipation*, Physical Review A 85, 062103 (2012).

- ▶ Pueden aparecer múltiples canales de relajación y se pueden modificar las tasas de relajación.

L. O. Castaños, *Quantum Rabi model with dissipation and qubit driving*, Physical Review A 104, 033709 (2021).

26. Cómo calcular la ecuación maestra - Forma fácil

Aplicar la aproximación de las **tasas de variación independientes**:

- ▶ Se desprecia la interacción entre los subsistemas componentes del sistema abierto.
- ▶ Se tiene una ecuación maestra para cada subsistema.
- ▶ Se suman las *tasas de variación* de los subsistemas.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Un qubit con forzamiento y disipación
 - ▶ El modelo de Jaynes-Cummings con disipación
 - ▶ El modelo de Jaynes-Cummings con disipación y forzamiento
 - ▶ El modelo de Tavis-Cummings con disipación
- ▶ **Requisitos para aplicarla:**
 - ▶ La interacción entre subsistemas debe ser débil.
 - ▶ El estado base del sistema abierto debe ser (a buena aproximación) el producto tensorial de los estados base de los subsistemas.
 - ▶ Los subsistemas deben interactuar con ambientes independientes.

27. Ejemplo - Tasas de variación independientes

- ▶ Ecuación GKLS para un qubit con disipación:

$$\frac{d}{dt}\rho_q(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z, \rho_q(t)\right] + \mathcal{D}_q[\rho_q(t)]$$

- ▶ Ecuación GKLS para un oscilador armónico amortiguado:

$$\frac{d}{dt}\rho_r(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\hbar\omega_r a^\dagger a, \rho_r(t)\right] + \mathcal{D}_{oa}[\rho_r(t)]$$

- ▶ Ecuación GKLS para el sistema qubit-oscilador

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar\omega_r a^\dagger a, \rho(t)\right] + \mathcal{D}_r[\rho(t)] + \mathcal{D}_{oa}[\rho(t)]$$

28. Problemas - Tasas de variación independientes

- ▶ A temperatura cero puede ser que el sistema abierto no decaiga a su estado base.
- ▶ Las tasas de relajación pueden estar mal.
- ▶ Se pueden despreciar canales de relajación.

+ F. Beaudoin, J. M. Gambetta, and A. Blais, *Dissipation and ultrastrong coupling in circuit qed*, Phys. Rev. A 84, 043832 (2011).

+ L. O. Castanos-Cervantes, *Quantum rabi model with dissipation and qubit driving*, Phys. Rev. A 104, 033709 (2021).

Corrección:

- ▶ Usar todo el hamiltoniano (no despreciar las interacciones entre subsistemas) → usar los estados vestidos.
- ▶ *Cambia la física*

29. Ecuación maestra usando estados vestidos - DIFICULTADES

- ▶ El cálculo de eigenvalores y eigenvectores del hamiltoniano es complicado

P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, and E. Solano, *Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction*, Rev. Mod. Phys. 91, 025005 (2019).

- ▶ Conveniente usar expresiones aproximadas para eigenvalores y eigenvectores

A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, *Ultrastrong coupling between light and matter*, Nat. Rev. Phys. 1, 19 (2019).

- ▶ Es difícil aplicar la aproximación de onda rotante

S. Agarwal, S. M. H. Rafsanjani, and J. H. Eberly, *Dissipation of the rabi model beyond the jaynes-cummings approximation*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 46, 224017 (2013).

- ▶ Muchas veces la aproximación de onda rotante (RWA) no es válida

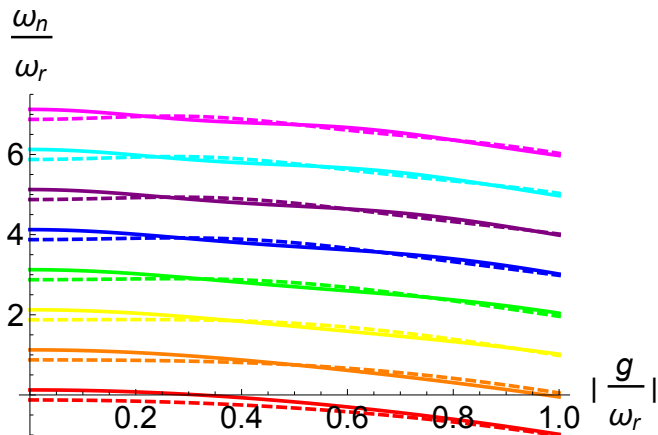
M. Scala, B. Militello, A. Messina, S. Maniscalco, J. Piilo, and K.-A. Suominen, *Cavity losses for the dissipative jaynes-cummings hamiltonian beyond rotating wave approximation*, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 14527 (2007).

- ▶ A veces es conveniente usar una cuasi-RWA

L. O. Castanos, *Master equation for the quantum Rabi model in the adiabatic regime*, Physical Review A

30. Modelo de Rabi - Régimen adiabático - Espectro

$$\frac{\omega_q}{\omega_r} = 0.25$$



31. Ecuación GKLS para el oscilador armónico

► **Ecuación GKLS:**

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hbar\omega_r a^\dagger a, \rho(t) \right] + \mathcal{D}[\rho(t)]$$

El disipador está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho) = & \gamma_0(N+1) \left[a\rho a^\dagger - \frac{1}{2} \{ a^\dagger a, \rho \} \right] \\ & + \gamma_0 N \left[a^\dagger \rho a - \frac{1}{2} \{ a a^\dagger, \rho \} \right] \end{aligned}$$

y

$$N = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_r} - 1}$$

32. Representación P de Glauber-Sudarshan

- ▶ *Función de cuasiprobabilidad* utilizada para la descripción de mezclas de estados coherentes.
- ▶ $P(\alpha)$ (α un número complejo) satisface

$$\rho = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha)$$

- ▶ $P(\alpha)$ es una función que juega un papel análogo a una *función de densidad de probabilidad clásica*:
 - ▶ $P(\alpha)$ está normalizada:

$$\int d^2\alpha P(\alpha) = 1$$

- ▶ Momentos de operadores en orden normal

$$\langle (a^\dagger)^p a^q \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) (\alpha^*)^p \alpha^q$$

- ▶ $P(\alpha)$ puede tomar valores negativos, en cuyo caso **el estado es no clásico**.

33. Ecuación de Lindblad como ecuación de Fokker-Planck

Usando la representación P

$$\rho(t) = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha, t)$$

la ecuación de Lindblad toma la forma de una **ecuación de Fokker-Plank**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t) = & \gamma_0 N \frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \alpha} P(\alpha, t) \\ & + \left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha P(\alpha, t) + \left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* P(\alpha, t) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

34. Evolución del estado de gato

