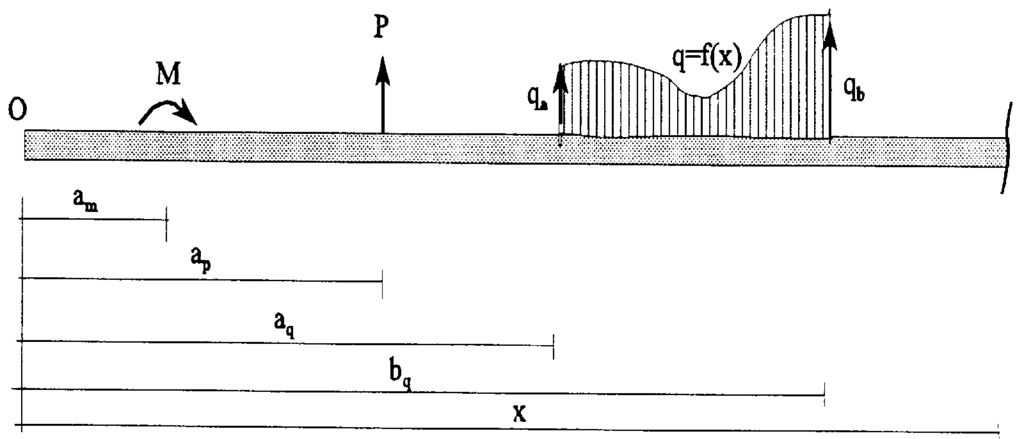
Ecuación Diferencial de la Elástica:

$$-M_x = EI_x \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ecuación Universal de la Elástica:



Para el ángulo:

$$E\theta_x = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a_m)}{1!} + \sum P \frac{(x-a_p)^2}{2!} + \sum q_a \frac{(x-a_q)^3}{3!} - \sum q_b \frac{(x-b_q)^3}{3!} + \sum q_a' \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_b' \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \ldots - \ldots + \textit{ derivadas parciales.}$$

Para la flecha:

$$EIf_x = EIf_0 + EI\theta_0 \frac{X}{1!} + \sum M \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-a_p)^3}{3!} + \sum q_a \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_b \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \sum q_a' \frac{(x-a_q)^5}{5!} - \sum q_b \frac{(x-b_q)^5}{5!} + \ldots - \ldots - \textit{ derivadas parciales.}$$

Teorema de Castigliano.

> La derivada parcial de la energía de deformación, expresada en función de las fuerzas externas estáticamente independientes, respecto a una de estas fuerzas es igual al desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de la fuerza.

La expresión general de la energía de deformación es:

$$U = \int_L \frac{N^2}{2EA} ds + \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} ds + \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} ds + \int_L \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} ds + \int_L \chi_z \frac{T_z^2}{2GA} ds + \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} ds$$

En una estructura sometida a flexión esta expresión se reduce a:

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx \qquad M = f(x)$$

por lo que tendremos:

$$\delta_X = \frac{dU}{dX} = \int \frac{M \frac{dM}{dx}}{EI} dx$$

δ_X = efecto en donde actúa X
- una flecha si la causa es una fuerza.
- un ángulo si la causa es un momento.

X = causa (fuerza o momento...).

Nota: Si queremos conocer la flecha o el ángulo en una sección donde no actúa ni existe ninguna fuerza o momento, tendremos que suponer que lo hace una carga o momento unidad diferencial.

El método de Castigliano es ideal cuando hay una sola ligadura.

Método de la Viga Conjugada.

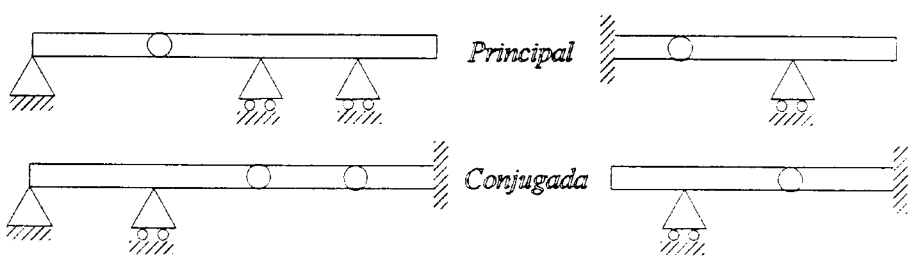
Se denomina *viga conjugada* de la viga considerada, a la misma viga sometida a un diagrama ficticio de cargas distribuidas igual al diagrama de momentos flectores, de tal forma que cuando el momento flector sea positivo la carga ficticia de la viga conjugada esté dirigida hacia abajo, y cuando el momento flector sea negativo la carga ficticia esté dirigida hacia arriba.

Existe una correspondencia entre las deformaciones de la viga principal y las solicitaciones de la viga conjugada, así:

$$\theta_x = \frac{T_x^c}{EI_z} \qquad \delta_x = \frac{M_x^c}{EI_z}$$

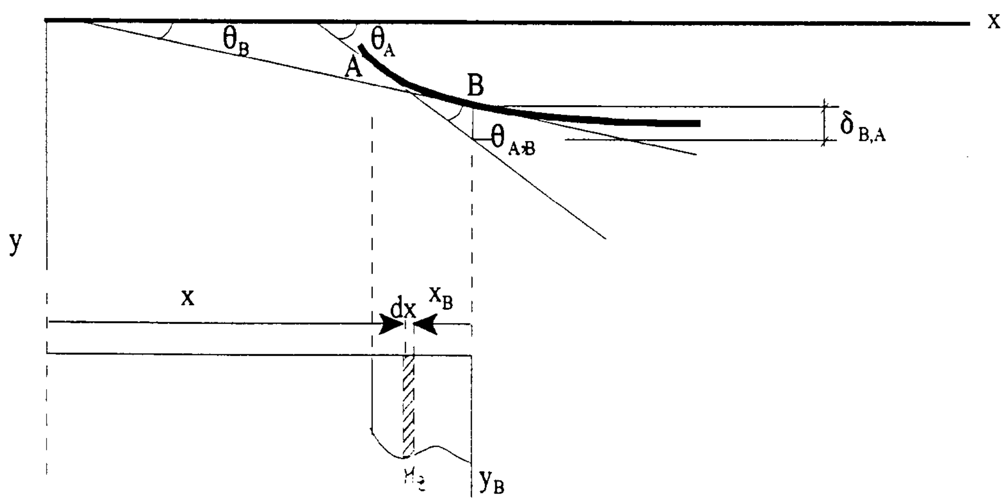
Ángulo.- El ángulo girado θ_x por una sección cualquiera , x, de la viga principal es igual a la fuerza cortante T_x^c de la viga conjugada en la misma sección, dividida por la rigidez Ei_z de la viga principal.
$\theta_x > 0$, ángulo girado en sentido de las agujas del reloj (dextrórsum).

Flecha.- La flecha δ_x en una sección cualquiera , x, de la viga principal es igual al momento flector M_x^c de la viga conjugada en la misma sección, dividida por la rigidez Ei_z de la viga principal.
$\delta_x > 0$, flecha dirigida hacia abajo.



Correspondencias
entre los enlaces y las condiciones en los extremos de las vigas principal y conjugada

Ecuaciones de Möhr:



$$\theta_{A\text{-}B} = \theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M_z}{E \cdot I_z} dx = \frac{S^{M_{A,B}}}{EI_z} \qquad \delta_{BA} = \int_A^B \frac{M_z \cdot x_B}{E \cdot I_z} dx = \frac{Q_B^{M_{A,B}}}{EI_z}$$

Para el ángulo:

El ángulo $\theta_{A,B}$ que forman entre sí las tangentes en dos puntos A y B de la elástica es igual al área del diagrama de momentos flectores comprendido entre A y B, dividido por la rígidez (siempre que esta sea constante).

Para la ordenada:

La ordenada $\delta_{B,A}$ del punto B respecto a la tangente en A es igual al momento estático respecto a y_B del diagrama de momentos flectores comprendido entre A y B, dividido por la rígidez (siempre que esta sea constante).