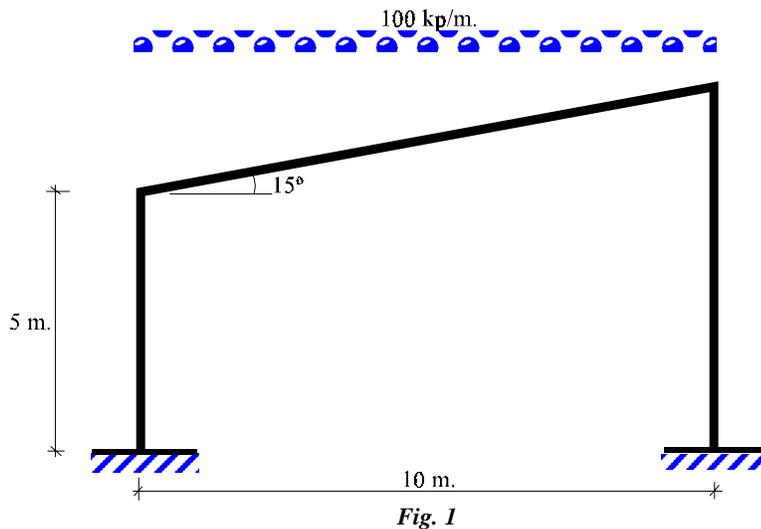


### EJEMPLO DE CÁLCULO POR EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

Con el fin de resumir en un ejemplo el proceso a seguir vamos a resolver el pórtico de la figura.

Las acciones que tiene que soportar se deben evaluar según la normativa de “acciones en la edificación” y resolver cada hipótesis de carga; sobrecargas de uso, peso propio, viento, nieve, sismo, otras..., por separado. Para después combinarlas aplicando los respectivos coeficientes de mayoración según también la normativa al caso.

Evaluaremos tan solo una hipótesis de carga, suponiendo para tal caso una carga uniforme de 100 kp/m. en proyección horizontal en cubierta.



*Punto 1. Analizar bien la estructura. Predimensionar. Fijar modo físico de trabajo (articulado, empotrado, torsión, plana o espacial, etc.).*

Analizaremos la estructura en el plano, con barras extensibles, suponiendo los nudos libres rígidos (giros de extremos de barra solidarios) y los apoyos en el terreno perfectamente empotrados (desplazamientos y giros impedidos).

Las barras serán de acero A-42.b, de Módulo de Elasticidad;  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$  de las siguientes características mecánicas.

Momentos de Inercia;  $I_a = I_b = I_c = 2000 \text{ cm}^4$ .

Secciones;  $A_a = A_b = A_c = 20 \text{ cm}^2$ .

Punto 2.- Ordenar nudos y barras, fijar coordenadas locales y globales.

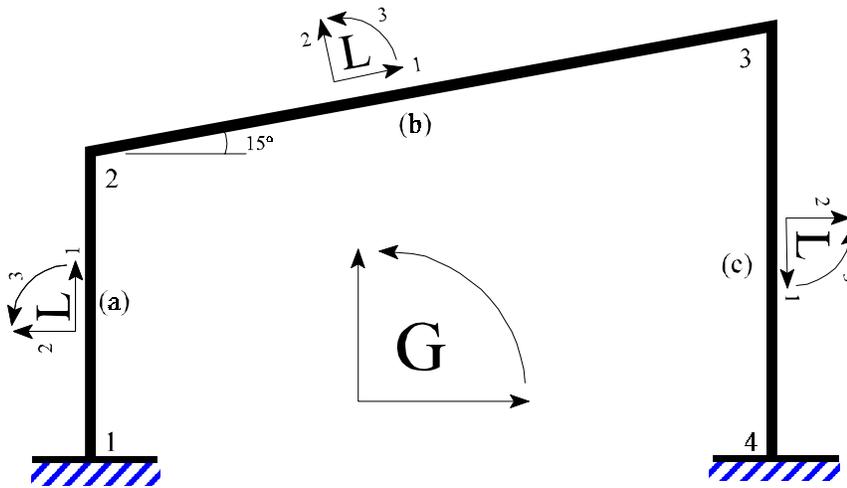


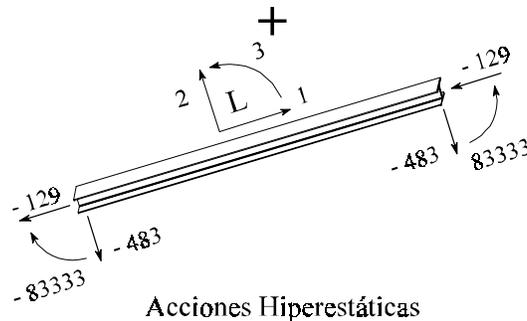
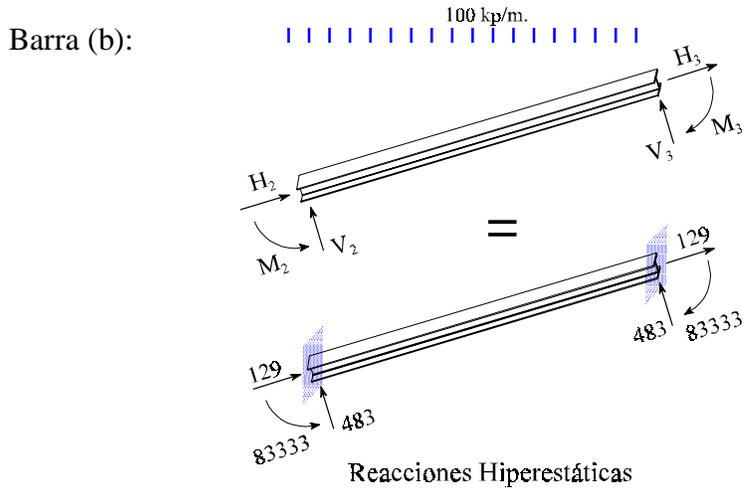
Fig. 2

Punto 3.- Calcular cargas y reacciones en nudos extremos de cada barra. Pasar cargas a nudos y anotar para su utilización posterior las reacciones hiperestáticas.

Vector de cargas.

$$P'_{\text{nudos}} = - P'_{\text{hiperestáticas}}$$

En este caso solo esta cargada la barra (b), calculando por las fórmulas clásicas de viga empotrada en ambos extremos las reacciones hiperestáticas.



Las matrices de acciones hiperestáticas (vectores de carga), en locales de la barra (b) serán:

$$P'_{2b} = \begin{vmatrix} -129 \\ -483 \\ -83333 \end{vmatrix} \quad P'_{3b} = \begin{vmatrix} -129 \\ -483 \\ 83333 \end{vmatrix}$$

*Punto 4.- Paso de locales a globales de los vectores de carga, previo cálculo de las matrices de transformación y su traspuesta de cada barra.*

Las matrices de transformación y traspuesta de cada barra serán, atendiendo al ángulo girado del sistema de referencia local respecto al global, en sentido contrario a las agujas del reloj, o, también, en el sentido de actuación del momento positivo de referencia, siendo:

$$\alpha_a = 90^\circ, \alpha_b = 15^\circ, \alpha_c = 270^\circ = -90^\circ.$$

$$L_b = \begin{vmatrix} 0,966 & -0,259 & 0 \\ 0,259 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_b^T = \begin{vmatrix} 0,966 & 0,259 & 0 \\ -0,259 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L_a = L_c^T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_a^T = L_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Paso de locales a globales de las acciones hiperestáticas.

$$P_{nudos} = L \cdot P'_{nudos}$$

$$P_{2b} = \begin{vmatrix} 0,966 & -0,259 & 0 \\ 0,259 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -129 \\ -483 \\ -83333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -500 \\ -83333 \end{vmatrix}$$

$$P_{3b} = \begin{vmatrix} 0,966 & -0,259 & 0 \\ 0,259 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -129 \\ -483 \\ 83333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -500 \\ 83333 \end{vmatrix}$$

Punto 5.- Paso de locales a globales de cada matriz de rigidez de las barras, previo calculo en locales de las mismas.

$$\mathbf{k}'_{\text{barras}}$$

$$\mathbf{k}_{\text{barras}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}'_{\text{barras}} \cdot \mathbf{L}^T$$

Barra	A	I	L	E	AE/L	12EI/L <sup>3</sup>	6EI/L <sup>2</sup>	4EI/L	2EI/L
a	20	2000	500	2100000	84000	403	100600	33600000	16800000
b	20	2000	1035	2100000	40589	45	23512	16227554	8113777
c	20	2000	768	2100000	54691	111	42730	21876447	10938224

Solo pasaremos a globales las necesarias.

Barra a.	84000	0	0						
$\underline{\mathbf{k}}'_{11}{}^a$	0	403	100800						
	0	100800	33600000						
$\underline{\mathbf{k}}'_{12}{}^a$	-84000	0	0						
	0	-403	100800						
	0	-100800	16800000						
$\underline{\mathbf{k}}'_{21}{}^a$	-84000	0	0						
	0	-403	-100800						
	0	100800	16800000						
$\underline{\mathbf{k}}'_{22}{}^a$	84000	0	0						
	0	403	-100800	$\mathbf{k}_{22}{}^a =$	403	0	100800		
	0	-100800	33600000		0	84000	0		
					100800	0	33600000		
Barra b.	40569	0	0						
$\underline{\mathbf{k}}'_{22}{}^b$	0	45	23512						
	0	23512	16227554	$\mathbf{k}_{22}{}^b =$	37860	10139	-6090		
					10139	2764	22713		
					-6090	22713	16227554		
$\underline{\mathbf{k}}'_{23}{}^b$	-40569	0	0						
	0	-45	23512	$\mathbf{k}_{23}{}^b =$	-37860	-10139	-6090		
	0	-23512	8113777		-10139	-2764	22713		
					6090	-22713	8113777		
$\underline{\mathbf{k}}'_{32}{}^b$	-40569	0	0						
	0	-45	-23512	$\mathbf{k}_{32}{}^b =$	-37860	-10139	6090		
	0	23512	8113777		-10139	-2764	-22713		
					-6090	22713	8113777		
$\underline{\mathbf{k}}'_{33}{}^b$	40569	0	0						
	0	45	-23512	$\mathbf{k}_{33}{}^b =$	37860	10139	6090		
	0	-23512	16227554		10139	2764	-22713		
					6090	-22713	16227554		
Barra c.	54691	0	0						
$\underline{\mathbf{k}}'_{33}{}^c$	0	111	42730						
	0	42730	21876447	$\mathbf{k}_{33}{}^c =$	111	0	42730		
					0	54691	0		
					42730	0	21876447		
$\mathbf{k}'_{34}{}^c =$	-54691	0	0						
	0	-111	42730						
	0	-42730	10938224						
$\mathbf{k}'_{43}{}^c =$	-54691	0	0						
	0	-111	-42730						
	0	42730	10938224						
$\mathbf{k}'_{44}{}^c =$	54691	0	0						
	0	111	-42730						
	0	-42730	21876447						

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Punto 6.- Ecuación matricial global.

Es interesante escribir primero la ecuación y calcular los términos posteriormente, cuando se hallan tenido en cuenta las condiciones de contorno, punto 7.

$R_1$		$K_{11}^a$	$K_{12}^a$	0	0	$\delta_1$	$u_1 = 0$
$P_2$		$K_{21}^a$	$K_{22}^a + K_{22}^b$	$K_{23}^b$	0	$\delta_2$	$v_1 = 0$
$P_3$	=	0	$K_{32}^b$	$K_{33}^b + K_{33}^c$	$K_{34}^c$	$\delta_3$	$\theta_1 = 0$
$R_4$		0	0	$K_{43}^c$	$K_{44}^c$	$\delta_4$	$u_4 = 0$
							$v_4 = 0$
							$\theta_4 = 0$

Punto 7.- Separar acciones con restricciones (filas y columnas).

Como se puede observar en la ecuación general escrita en el punto 6, se han sombreado las filas y columnas que se ven afectadas por las restricciones que imponen los empotramientos en la base, anulándose por tanto, permitiendonos escribir la ecuación general, tan solo, con las ecuaciones implicadas en los movimientos de los nudos libres.

$$\begin{vmatrix} P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{22}^a + K_{22}^b & K_{23}^b \\ K_{32}^b & K_{33}^b + K_{33}^c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix}$$

La ecuación general resumida será:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -500 \\ -83333 \\ 0 \\ -500 \\ 83333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38263 & 10139 & 94710 & -37860 & -10139 & -6090 \\ 10139 & 86764 & 22713 & -10139 & -2764 & 22713 \\ 94710 & 22713 & 49827554 & 6090 & -22713 & 8115777 \\ -37860 & -10139 & 6090 & 37971 & 10139 & 48820 \\ -10139 & -2764 & -22713 & 10139 & 57455 & -22713 \\ -6090 & 22713 & 8115777 & 48820 & -22713 & 38104001 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{vmatrix}$$

Punto 8.- Resolución del sistema, calculando los movimientos incógnita en globales.

Multiplicando ambos terminos por la inversa de la matriz rigidez, se deducen los movimientos:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{vmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,341349 \\ -0,006295 \\ -0,002753 \\ 0,338333 \\ -0,008616 \\ 0,002393 \end{vmatrix}$$

Pasamos los movimientos a locales.

$$\delta' = L^T \cdot \delta$$

Nudos Barra a.

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nudos Barra b.

$$\begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,328112 \\ -0,094491 \\ -0,002753 \end{Bmatrix}$$

Nudos Barra c.

$$\begin{Bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,008616 \\ 0,338333 \\ 0,002393 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,006295 \\ -0,341349 \\ -0,002753 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,324598 \\ -0,095951 \\ 0,002393 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_4 \\ v'_4 \\ \theta'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Punto 9.- Cálculo de esfuerzos en cada barra en locales y comprobación de la solución estudiada.*

$$P' = K' \cdot \delta' + P'_{\text{hiperestáticas}}$$

Barra a.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 84000 & 0 & 0 \\ 0 & 403 & 100800 \\ 0 & 100800 & 33600000 \\ -84000 & 0 & 0 \\ 0 & -403 & 100800 \\ 0 & 100800 & 16800000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0,006295 \\ -0,341349 \\ -0,002753 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 529 \\ -140 \\ -11848 \\ -529 \\ 140 \\ -58104 \end{Bmatrix}$$

Barra b.

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40569 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 23512 \\ 0 & 23512 & 16227554 \\ -40569 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & -23512 \\ 0 & 23512 & 8113777 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,328112 \\ -0,094491 \\ -0,002753 \\ 0,324598 \\ -0,095951 \\ 0,002393 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 129 \\ 483 \\ 83333 \\ 129 \\ 483 \\ -83333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 272 \\ 475 \\ 58104 \\ -14 \\ 491 \\ -68807 \end{Bmatrix}$$

Barra c.

$$\begin{Bmatrix} N_3 \\ V_3 \\ M_3 \\ N_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 54691 & 0 & 0 \\ 0 & 111 & 42730 \\ 0 & 42730 & 21876447 \\ -54691 & 0 & 0 \\ 0 & -111 & -42730 \\ 0 & 42730 & 10938224 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,008616 \\ 0,338333 \\ 0,332393 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 471 \\ 140 \\ 68807 \\ 471 \\ -140 \\ 40632 \end{Bmatrix}$$

*Punto 10.- Cálculo de reacciones, bien a través de los esfuerzos calculados en barras o bien en la forma.*

$$F_R = K_{RL} \cdot \delta_L$$

Se deducen fácilmente de los valores ya calculados para los extremos 1 y 4 de las barras (a) y (c), lógicamente.

Para completar el ejemplo dibujamos las gráficas de esfuerzos tal como suele representarse en la actualidad.

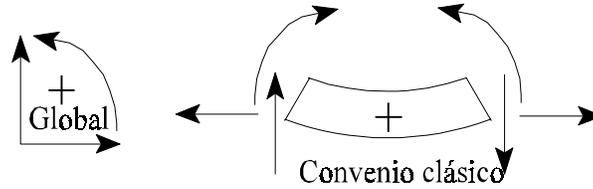


Fig. 6

A efectos de representación.

- Los momentos cambian de signo a la izquierda de la barra. Recordando que para conocer su valor en cada sección tendremos que sumarle la gráfica de momentos isostáticos, pues solo se han deducido los valores extremos.
- Los cortantes cambian de signo a la derecha.
- Los axiles (compresión con signo negativo) cambian de signo a la izquierda.

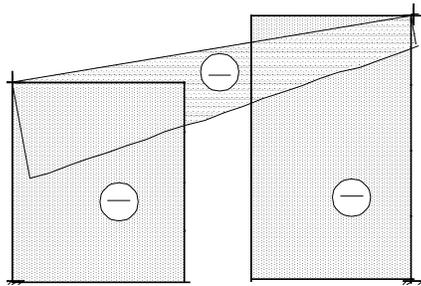


Fig. 8

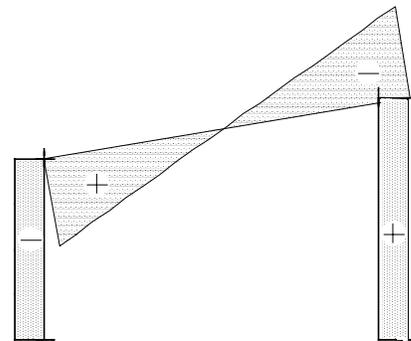


Fig. 7

Gráfico de Axiles

Gráfico de Cortantes

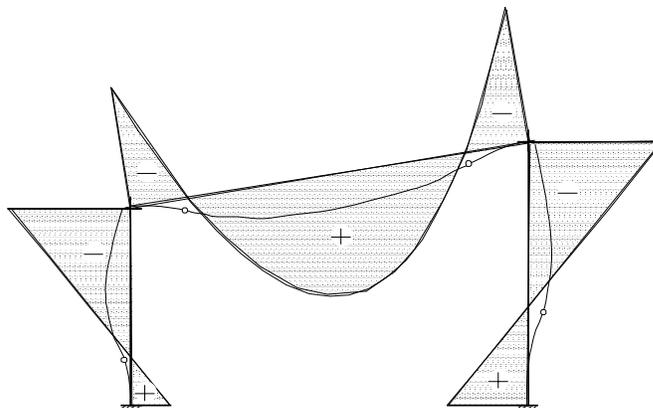


Fig. 9

Gráfico de Momentos Flectores y Deformada