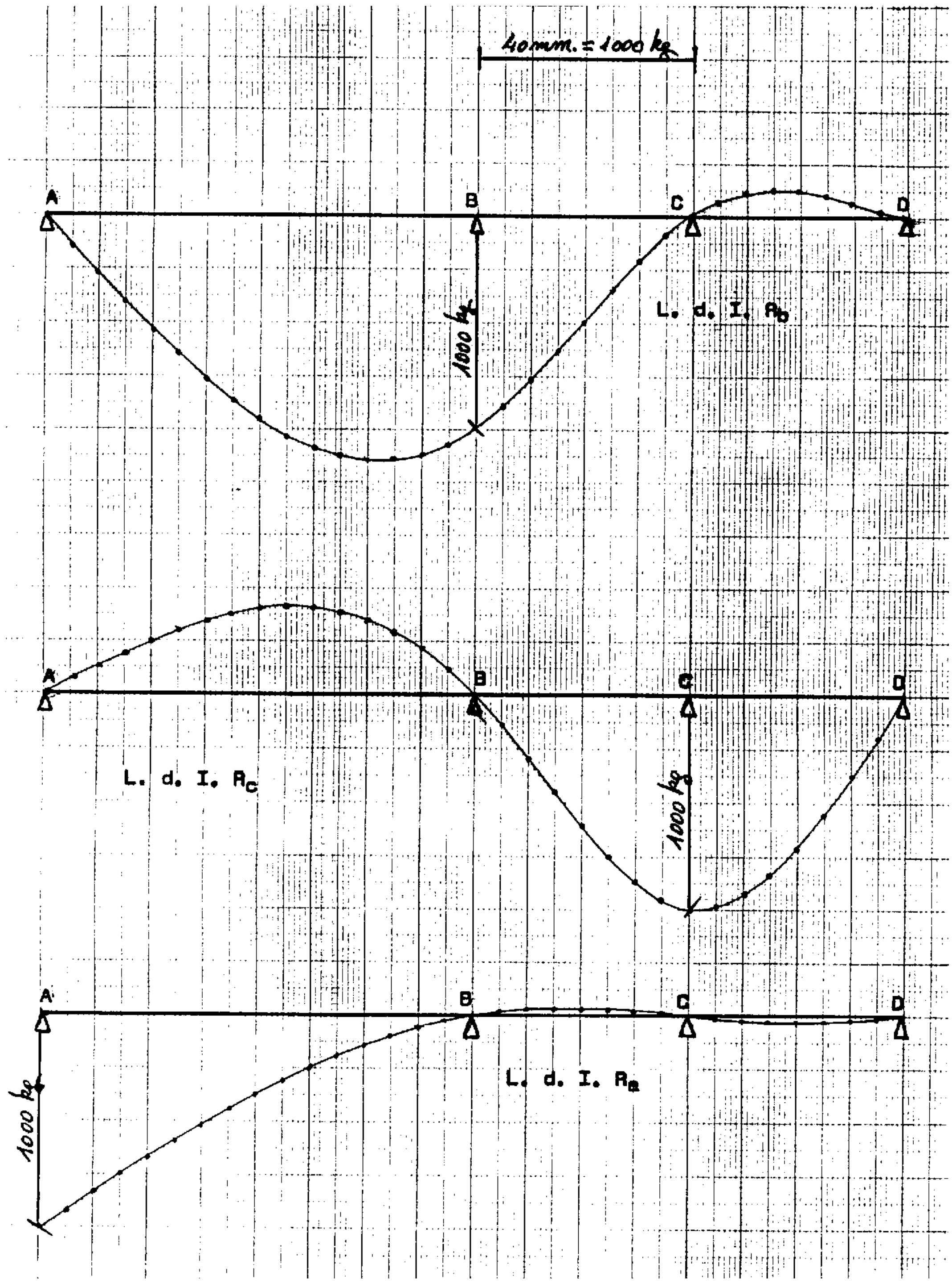
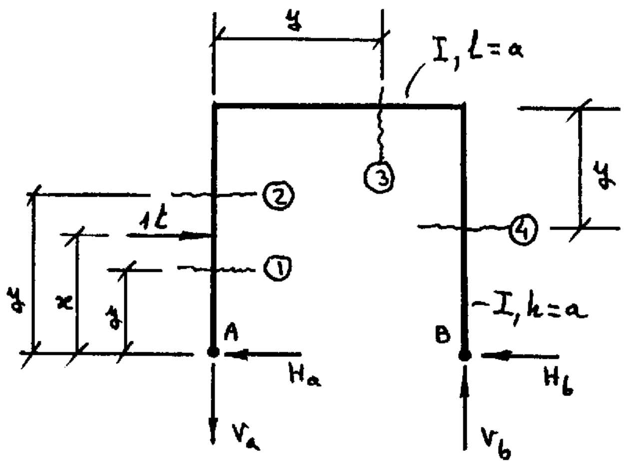

40mm. = 1000 kg
A
B
C
D
1000 kg
L. d. I. R_b
A
B
C
D
L. d. I. R_c
1000 kg
A
B
C
D
1000 kg
L. d. I. R_a

Calcular la línea de influencia de la reacción horizontal, Ha, en el pórtico de la figura; todos los momentos de inercia y longitudes de las barras son iguales.



Solución:

Se va a hacer recorrer la carga móvil por pilares y dintel sucesivamente. En la figura superior se supone, a efectos de integración y cálculo por Castigliano, "x" fijo e "y" (de las distintas secciones) variable; primeramente se hace a la carga recorrer los pilares:

$$\Sigma\ Ma = 0 \quad ; \quad 1 \cdot x - Vb \cdot a = 0 \quad ; \quad \uparrow Vb = \frac{x}{a} = V_a \downarrow$$

$$Ha + Hb = 1$$

$$M1 = Ha \cdot y \qquad \frac{\partial M1}{\partial Ha} = y$$

$$M2 = Ha \cdot y - (y - x) \qquad \frac{\partial M2}{\partial Ha} = y$$

$$M3 = Ha \cdot a - Va \cdot y - (a - x) \qquad \frac{\partial M3}{\partial Ha} = a$$

$$M4 = -Hb\ (a - y) = (Ha - 1)\ (a - y)$$

$$\frac{\partial M4}{\partial Ha} = a - y$$

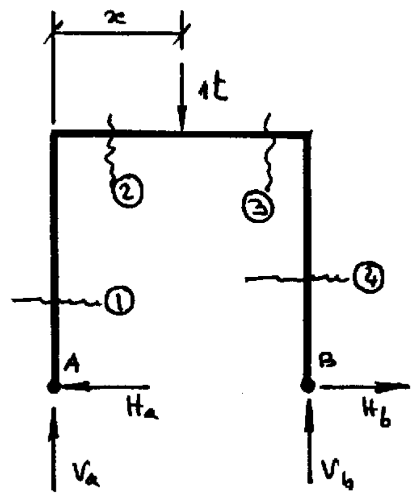
$$\frac{\partial U}{\partial Ha} = 0 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^x Ha\cdot y^2\cdot dy + \int_x^a (Ha\cdot y^2 - y^2 + yx)dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^a (Ha\cdot a^2 - xy - a^2 + ax)dy + \int_0^a (Ha - 1)\ (a - y)^2 dy\right]$$

$$Ha = 1 + \frac{x^3}{10a^3} - \frac{3x}{5a} \quad ; \quad \text{haciendo} \quad \frac{x}{a} = \epsilon \quad \text{queda}$$

$$Ha = 1 + 0'1\epsilon^3 - 0'6\epsilon$$

En la figura aquí a la derecha se hace recorrer a la carga móvil el dintel y se vuelve a suponer "x" fijo y las secciones, para aplicar Castigliano, a distancias "y" variables:



$$Va = \frac{a - x}{a} \quad ; \quad Vb = \frac{x}{a}$$

$$Ha = Hb$$

$M1 = Ha\cdot y$	$M2 = Va\cdot y + Ha\cdot a$	$M3 = Va\cdot y + Ha\cdot a - (y - x)$
$\dfrac{\partial M1}{\partial Ha} = y$	$\dfrac{\partial M2}{\partial Ha} = a$	$\dfrac{\partial M3}{\partial Ha} = a$

$$M4 = Hb\ (a - y) = Ha\ (a - y)$$

$$\frac{\partial M4}{\partial Ha} = a - y$$

$$\frac{\partial U}{\partial Ha} = 0 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a Ha\cdot y^2\cdot dy + \int_0^x \left((a - x)y + Ha\cdot a^2\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int_x^a \left((a - x)y + Ha\cdot a^2 - (y - x)a\right)dy + \int_0^a Ha\cdot(a - y)^2 dy\right]$$

$$Ha = \frac{3x^2}{10a^2} - \frac{3x}{10a}$$; haciendo, como anteriormente:

$$\frac{x}{a} = \epsilon \implies Ha = 0'3\cdot(\epsilon^2 - \epsilon) = 0'3\cdot\epsilon\cdot(\epsilon - 1)$$

Solo resta dibujar las curvas correspondientes, dando valores (ver pág.sig.); cuando la carga móvil recorre el pilar derecho, evidentemente:

$$\overrightarrow{Hb} = 1 + 0'1\cdot\epsilon^3 - 0'6\cdot\epsilon \quad ,$$

con lo que la correspondiente $\overrightarrow{Ha} = 1 - Hb = 0'1\cdot\epsilon^3 - 0'6\cdot\epsilon$,

pero tomando el origen en la parte inferior, en B; y se usará de esa propiedad para dibujarla, invirtiendo la de la izquierda, restada a la unidad.

Para resaltar las curvas de las L.d.I. las escalas verticales se han tomado distintas de la horizontal.

$\epsilon = \frac{x}{a}$	pil.izq.	dintel	pil.dcho.
0,0	1000	0	500
0,1	940	27	467
0,2	881	48	428
0,3	823	63	385
0,4	767	72	338
0,5	713	75	287
0,6	662	72	233
0,7	615	63	177
0,8	572	48	119
0,9	533	27	60
1,0	500	0	0

pilar izq.:

$\vec{H}a = 1 + 0{,}1\epsilon^3 - 0{,}6\epsilon$

dintel:

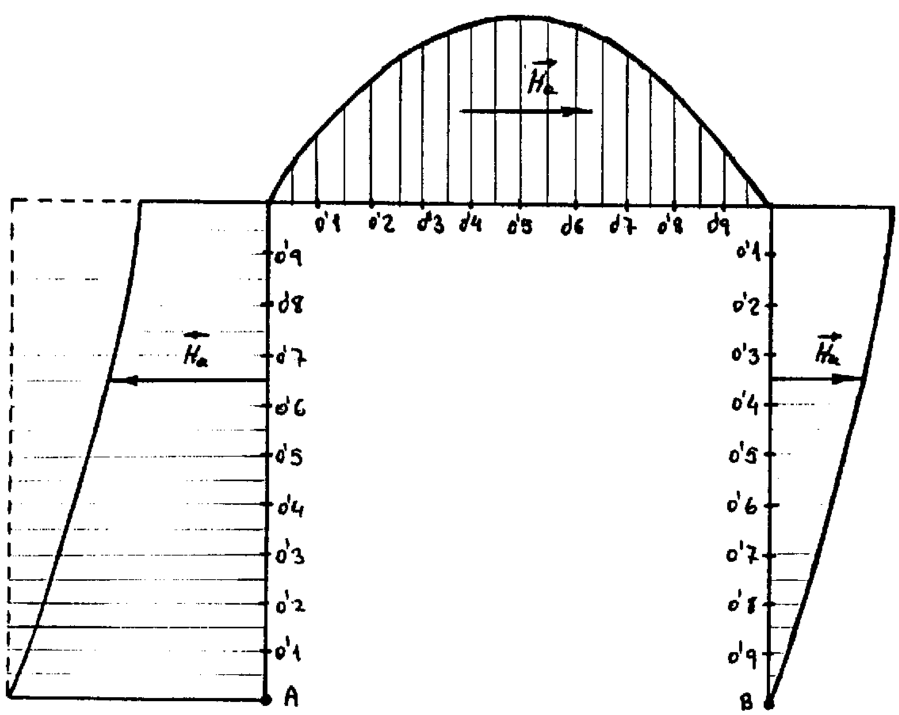
$\vec{H}a = 0{,}3\cdot\epsilon\cdot(\epsilon - 1)$

pilar dcho.:

$\vec{H}a = 0{,}1\epsilon^3 - 0{,}6\epsilon$,

que, referido al origen superior, queda:

$\vec{H}a = 0{,}1(1 - \epsilon)^3 - 0{,}6(1 - \epsilon) = 0{,}3\epsilon^2 + 0{,}3\epsilon - 0{,}1\epsilon^3 - 0{,}5$



Viga doblemente acartelada, L=5, carga uniformemente repartida. (Ver gráficos en página siguiente).

S_2 y S_3, calculados por triangulación, dan $\simeq$ 1.512,5 mm^2, que aproximamos a 1.500 mm^2 por corección de curvas:

$$S_2 = \left[\frac{5+7}{2}\,5 + \frac{7+11,5}{2}\,5 + \frac{11,5+17}{2}\,5 + \frac{17+32}{2}\,5 + \frac{32+8}{2}\,60 + \frac{8+3}{2}\,5 + \frac{3+1}{2}\,5 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,10\right] = 1.512,5 \text{ mm}^2.$$

Análogamente, $d_2 \simeq 39,94$ mm. y $d_3 = 60,06$ mm.:

$$S_2 d_2 = \left[\frac{1}{2}\,5,5\,\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\,7,5\,\frac{2}{3}\,5 + \frac{1}{2}\,7,5\,\frac{4}{3}\,5 + \frac{11,5}{2}\,5\,\frac{5}{3}\,5 + \frac{11,5}{2}\,5\,\frac{7}{3}\,5 + \ldots\right] =$$

$= 59.908$; $d_2 = 39,94$; escalas S_1 y S_2 $\Longrightarrow$ 100 x 40 mm^2 = 5 x 5 mm^2.

Pasando a escala real:

$S_2 = S_3 = 0,375L^2$; $d_2 = 2,0$ m; $d_3 = 3,0$ m.

$$\beta = \beta' = \frac{\cancel{S}_2 d_2}{\cancel{S}_3 d_3} = \frac{39,94}{60,06} = 0,665$$

$$k = k' = \frac{EIoL}{S_2 - \beta S_3} = \frac{EIoL}{0,375L^2(1-0,665)} = 7,96\,\frac{EIo}{L}$$

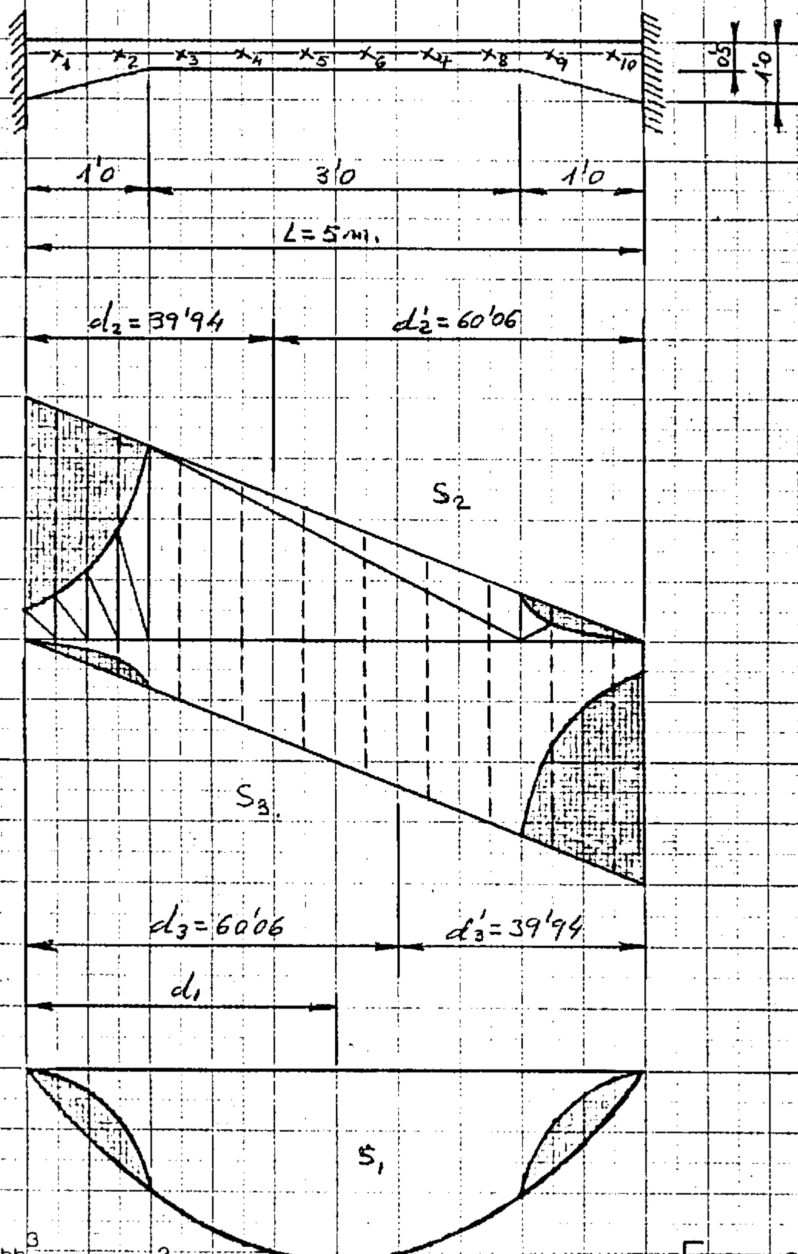
Para el cálculo de S, empleamos, por diferencias: sin corregir 2/3 lh = = 2/3 5x3,125 = 10,42 y valor de gráfico 2/3 100x31,25 = 2.083 m x mkg.

área corregida, restar: $2\left[\frac{5x5}{2} + \frac{5+9}{2}\,5 + \frac{9x8}{2}\,5\right] = 180$; restamos 200 mm^2 - para compensar curvaturas, S_1 = 2.083 - 200 = 1.883 mm^2 <> 9,415 m x mkg

$$\mu = \mu' = p\,\frac{S_1(d_1-d_3)}{S_2(d_2-d_3)}\,L = p\,\frac{9,415\ (2,5-3,00)}{0,375L^2(2,00-3,00)}\,L = 2,51p \text{ mkg } (p \text{ en t/m}).$$

Todos los valores obtenidos coinciden sensiblemente con los gráficos de Fernández Casado.

Viga doblemente acartelada, L=5, carga uniformemente repartida



$I = \frac{bh^3}{12} <> h^3$ cálculo de S1) $\left[M_{ix} = \frac{px}{2}(l-x) \right]$

	h	I_x	$I_o/I_x = L$
0-11	1	1	0'125
1-10	0'875	0'670	0'187
2-9	0'625	0'244	0'512
3-8	0'500	0'125	1
4-7	0'500	0'125	1
5-6	0'500	0'125	1

	x	M_{ix}	$I_o/I = L$	$M_{ix} L$
1-10	0'25	0'594	0'187	0'111
2-9	0'75	1'594	0'512	0'816
3-8	1'25	2'344	—	2'344
4-7	1'75	2'844	—	2'844
5-6	2'25	3'094	—	3'094
P_m	2'50	3'125	—	3'125

Viga apoyada-empotrada, L = 5, simple cartele, carga unif. repartida. (Ver gráficos pag.89)

S_2 y S_3 calculados por triangulación (no son ahora iguales) dan:

$$S_2 = \frac{40+8}{2}\,80 + \frac{8+3}{2}\,5 + \frac{3+1}{2}\,5 + \frac{1}{2}\,10 = 1.962{,}5$$

$$S_3 = \frac{38x80}{2} + \frac{32+17{,}5}{2}\,5 + \frac{17{,}5 + 10{,}5}{2}\,5 + \frac{10{,}5+7}{2}\,5 + \frac{7+5}{2}\,5 = 1.547{,}5$$

Análogamente:

$$S_2d_2 = \frac{40x80}{2} \times \frac{80}{3} + \frac{8x80}{2}\,\frac{2}{3}\,80 + \frac{8x5}{2}\,(80 + \frac{5}{3}) + \frac{3x5}{2}\,(80 + \frac{10}{3}) + \frac{3x5}{2}\,(85 + \frac{5}{3}) +$$

$$+ \frac{5}{2}\,(85 + \frac{10}{3}) + \frac{10}{2}\,(90 + \frac{10}{3}) = 63.329{,}7 \qquad d_2 = 32{,}3$$

$$S_3d_3 = \frac{32x80}{2}\,\frac{2}{3}\,80 + \frac{32x5}{2}\,(80 + \frac{5}{3}) + \frac{17{,}5x5}{2}\,(80 + \frac{10}{3}) + \ldots\ldots + \frac{25}{2}\,(95 + \frac{10}{3}) =$$

$$= 89.197{,}9; \; d_3 = 57{,}6$$

Pasando a escala real:

$S_2 = 0{,}491L^2$; $S_3 = 0{,}387L^2$; $d_2 = 1{,}62$ m; $d_3 = 2{,}88$ m.

$$\beta = \frac{S_2d_2}{S_3d_3} = \frac{0{,}491x1{,}62}{0{,}387x2{,}88} = 0{,}714$$

$$\beta' = \frac{S_3d'_3}{S_2d'_2} = \frac{0{,}387x42{,}4}{0{,}491x67{,}7} = 0{,}494$$

$$k' = \frac{EIoL}{S_3 - \beta' S_2} = \frac{EIoL}{0{,}387L^2 - 0{,}494x0{,}491L^2} = 6{,}92\,\frac{EIo}{L}; \; k_v = k'(1-\beta\,\beta') =$$

$$= 4{,}48\,\frac{EIo}{L}$$

El gráfico de S_1, sin corregir y corregido, lo calculamos como en caso -- anterior.

$S_1 = \left[\frac{2}{3}\,\text{lh-corrección}\right] = 2.083 - 100 = 1.983 <> 9{,}915$ m x mkg; pero ahora d_1 no coincide en el centro y hemos de calcularlo:

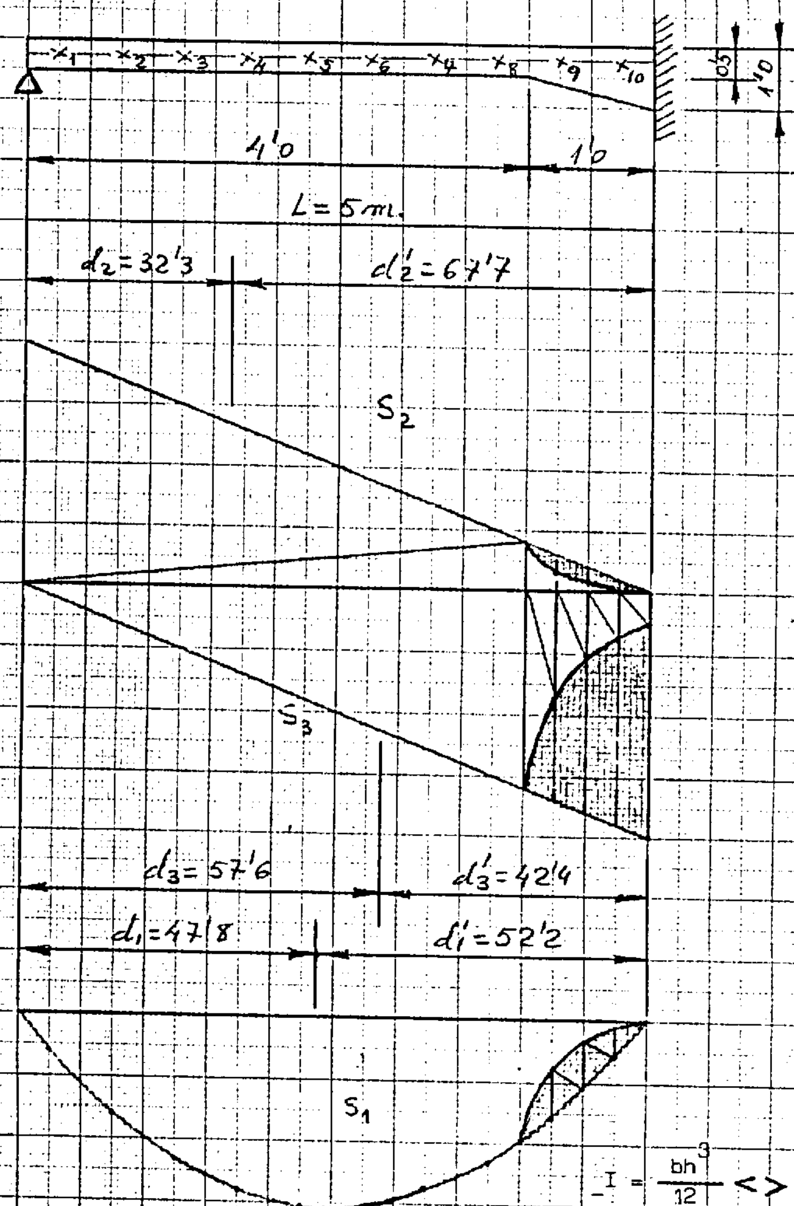
$$S_1d_1 = 2.083 \times 50 - \left[\frac{8x5}{2}\left(80 + \frac{10}{3}\right) + \frac{8x5}{2}\left(85 + \frac{5}{3}\right) + \frac{8x5}{2}\left(85 + \frac{10}{3}\right) + \frac{8x5}{2}\right.$$

$$\left.\left(90 + \frac{5}{3}\right) + \frac{5x5}{2}\left(90 + \frac{10}{3}\right) + \frac{5x5}{2}\left(95 + \frac{5}{3}\right)\right] = 94.775;\ d_1 = 47,8;$$ son 2,39 m. a escala real.

$$\mu_v^1 = \frac{S_1d_1}{S_3d_3} = \frac{9,915 \times 2,39}{0,387L^2x2,88}\, L = 4,25\ p\ mkg\ (p\ en\ t/m).$$

También estos valores obtenidos coinciden sensiblemente con los gráficos de Fernández Casado.

Viga apoyada-empotrada, L=5, simple cartela, carga uniformemente repartida



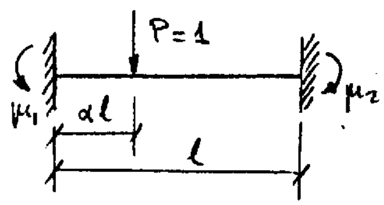
$I = \frac{bh^3}{12} <> h^3$

	h	I_x	$I_0/I_x = c$
0 - 8	0'500	0'125	1'000
8'5	0'500	0'125	1'000
9	0'625	0'244	0'512
9'5	0'750	0'422	0'296
10	0'875	0'670	0'187
11	1'000	1'000	0'125

Líneas de Influencia por Cross.

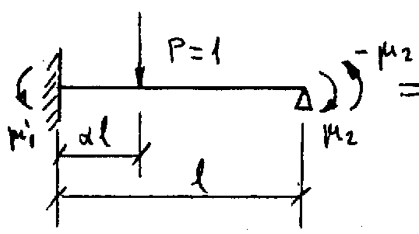
Como sabemos, en una viga AB basta conocer las L.d.I. de los momentos sobre los apoyos A y B para, mediante aquellas, deducir cualesquiera otra (esfuerzos cortantes, reacciones, etc.).

En consecuencia, bastará indicar cómo se obtienen las L. de I. de los momentos de los apoyos. Comenzaremos tabulando los momentos de empotramiento, μ_1 y μ_2, de una viga doblemente empotrada, y los μ'_1, de una apoyada-empotrada, con arreglo al siguiente cálculo :



$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{1.\alpha l(l-\alpha l)^2}{l^2} = \alpha(1-\alpha)^2 l = \mu_1$$

$$\mu_2 = \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{1.\alpha^2 l^2(l-\alpha l)}{l^2} = \alpha^2(1-\alpha)l = \mu_2$$



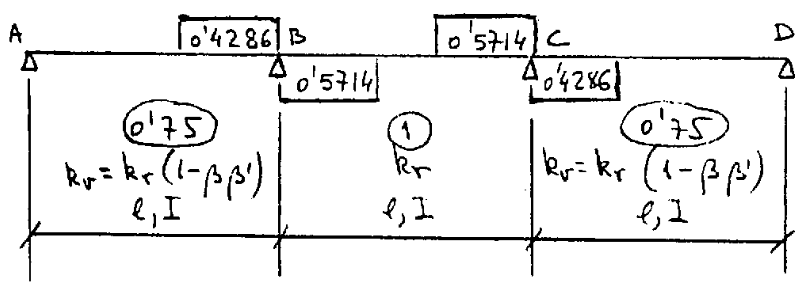
$$\Rightarrow \mu'_1 = \frac{Pab^2}{l^2} + \frac{Pa^2b}{2l^2} = \frac{2ab^2+a^2b}{2l^2} = \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)l}{2}$$

Con esas fórmulas, y dando valores a α, se forma el cuadro de la página siguiente.

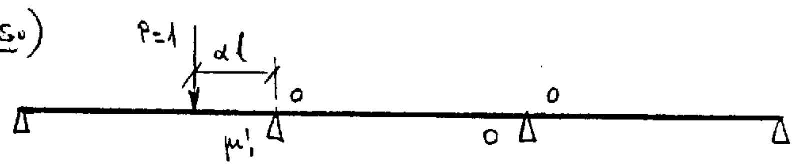
A continuación se toman las cantidades μ_1, μ_2 y μ'_1, como variables; situaremos sucesivamente la carga unidad sobre cada una de las vigas suceptibles de ser cargadas, y determinaremos cada vez (por el método de Cross) el valor de los momentos en apoyo en función de aquellos momentos. Para poder construir la L. de I. faltará únicamente dar valores a μ_1, μ_2 y μ'_1, según los valores del cuadro de la página siguiente.

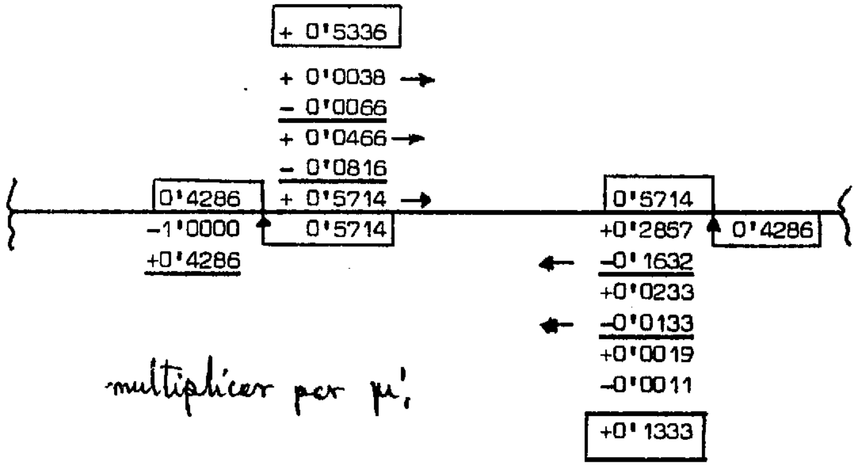
α	$\mu_1 = \alpha(1-\alpha)^2$	$\mu_2 = \alpha^2(1-\alpha)$	$\mu'_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}$
0'10	0'081	0'009	0'0855
0'15	0'108	0'019	0'1180
0'20	0'128	0'032	0'1440
0'25	0'141	0'047	0'1640
0'30	0'147	0'063	0'1785
0'35	0'148	0'080	0'1875
0'40	0'144	0'096	0'1920
0'45	0'136	0'111	0'1920
0'50	0'125	0'125	0'1875
0'55	0'111	0'136	0'1795
0'60	0'096	0'144	0'1680
0'65	0'080	0'148	0'1535
0'70	0'063	0'147	0'1365
0'75	0'047	0'141	0'1170
0'80	0'032	0'128	0'0960
0'85	0'019	0'108	0'0735
0'90	0'009	0'081	0'0495
0'95	0'002	0'045	0'0250

Vamos a poner un ejemplo sencillo para ver el proceso de cálculo, una viga continua sobre cuatro apoyos y tres vanos, de iguales longitudes e inercia cada vano; hacemos simplificación de apoyos extremos no empotrados.

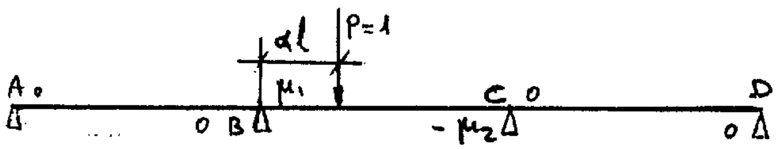


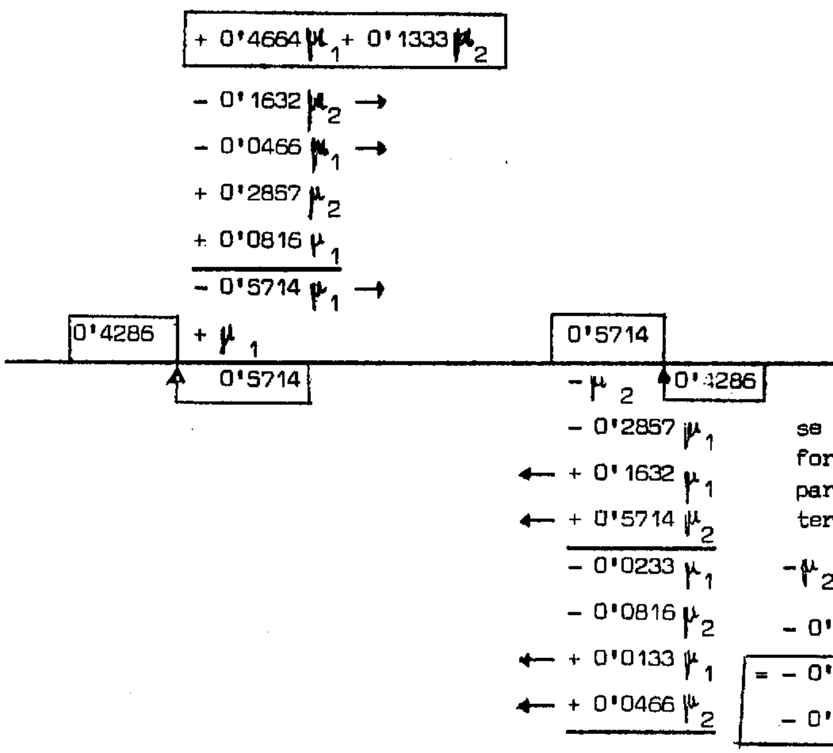
1-er caso)





2º)





se ve ley de formación, comparando con anterior :

$-\mu_2 + 0'5336\,\mu_2 - 0'1333\,\mu_1 =$

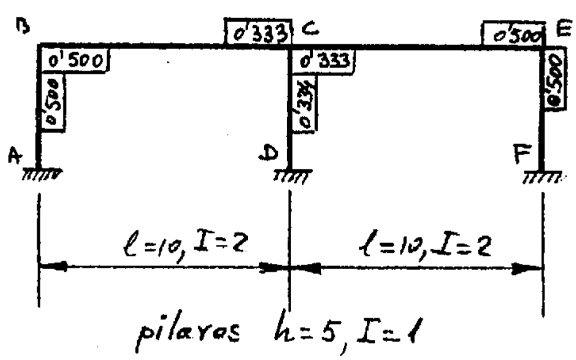
$\boxed{= -0'4664\,\mu_2 - 0'1333\,\mu_1}$

Con estos valores se forma ahora el cuadro siguiente, y con él la L. de I.; (ojo,en la rama CD $\alpha 1$ se toma a partir del empotramiento C). (1)

	rama AB		rama BC			rama CD	
α	μ'_1	M_B	μ_1	μ_2	M_B	μ'_1	M_B
0'05	– 0'0463	– 24'7	+ 0'045	– 0'002	– 21'3	+ 0'0463	+ 6'2
0'1	– 0'0855	– 45'6	+ 0'081	– 0'009	– 39'0	+ 0'0855	+ 11'4
0'2	– 0'1440	– 76'8	+ 0'128	– 0'032	– 64'0	+ 0'1440	+ 19'2
0'3	– 0'1785	– 95'2	+ 0'147	– 0'063	– 77'0	+ 0'1785	+ 23'8
0'4	– 0'1920	–102'5	+ 0'144	– 0'096	– 80'0	+ 0'1920	+ 25'6
0'5	– 0'1875	–100'1	+ 0'125	– 0'125	– 75'0	+ 0'1875	+ 25'0
0'6	– 0'1680	– 89'6	+ 0'096	– 0'144	– 64'0	+ 0'1680	+ 22'4
0'7	– 0'1365	– 72'8	+ 0'063	– 0'147	– 49'0	+ 0'1365	+ 18'2
0'8	– 0'0960	– 51'2	+ 0'032	– 0'128	– 32'0	+ 0'0960	+ 12'8
0'9	– 0'0495	– 26'4	+ 0'009	– 0'081	– 16'0	+ 0'0495	+ 6'6
0'95	– 0'0250	– 13'3	+ 0'002	– 0'045	– 6'9	+ 0'0250	+ 3'3

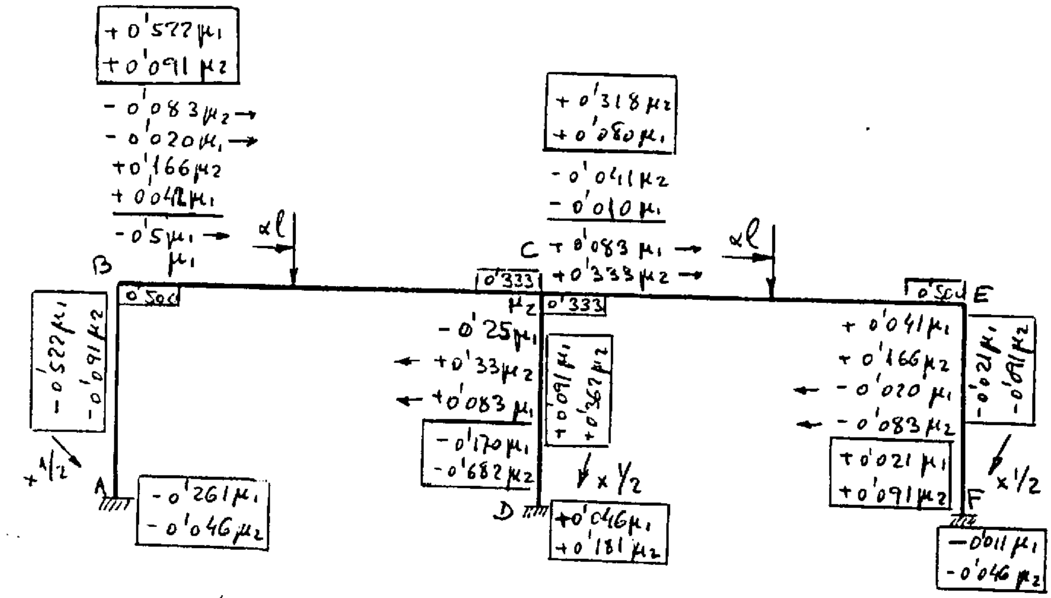
$M_B = + 0'5336 \; {}_1 \qquad M_B = -(0'4666 \; {}_1 + 0'1333 \; {}_2) \qquad M_B = 0'1333 \; {}_1$

El método es aplicable igualmente a pórticos y otro tipo de estructuras. – Sea como segundo ejemplo el pórtico adjunto. Supongamos primeramente la carga unidad sobre BC y a "$\alpha 1$" del extremo B; habrá 4 etapas, primera y segunda con momentos de empotramiento perfecto sobre B y C, y tercera y cuarta con corrimientos; ambas Cross se indican (resueltos) a continuación :

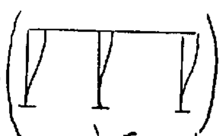


(1) Ver gráficos en páginas siguientes.

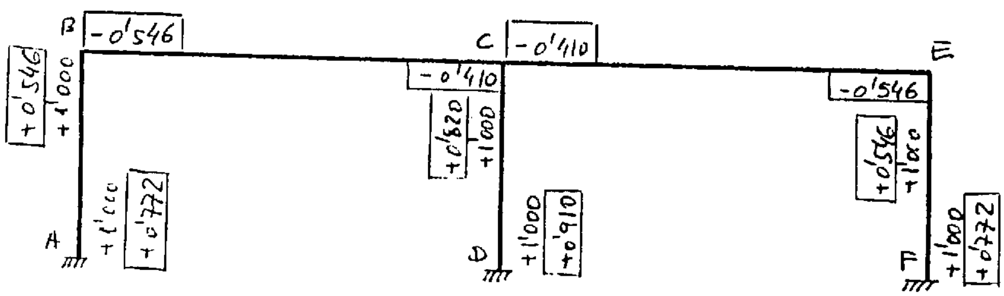
1) Nudos fijos



$$\frac{6EI\Delta}{h^2} = 1$$



2) Corrimiento de los nudos x β



Estableciendo las ecuaciones de corte :

$$T = \frac{0'772 + 0'545 + 0'820 + 0'910 + 0'546 + 0'772}{5}\beta = 0'872\,\beta =$$

$$= +\,0'136\,\mu_1 - 0'055\mu_2 \quad ; \qquad \boxed{\beta = 0'156\,\mu_1 - 0'063\mu_2}$$

sustituyendo : $M_{BC} = +\,0'522\,\mu_1 + 0'091\mu_2 - 0'546\,(0'156\,\mu_1 - 0'063\,\mu_2) =$

$$= \boxed{0'437\,\mu_1 + 0'125\mu_2}$$

$$M_{CB} = \boxed{-0'234\,\mu_1 - 0'656\,\mu_2}$$

$$M_{CD} = \boxed{+\,218\,\mu_1 + 0'311\mu_2}$$

Cuando la carga desliza sobre CE vale el mismo cross, y se puede escribir por simetría de la figura :

$$\beta = +\,0'063\,\mu_1 - 0'156\mu_2 \Longrightarrow M_{BC} = \boxed{-\,0'125\,\mu_1 + 0'064\,\mu_2}$$

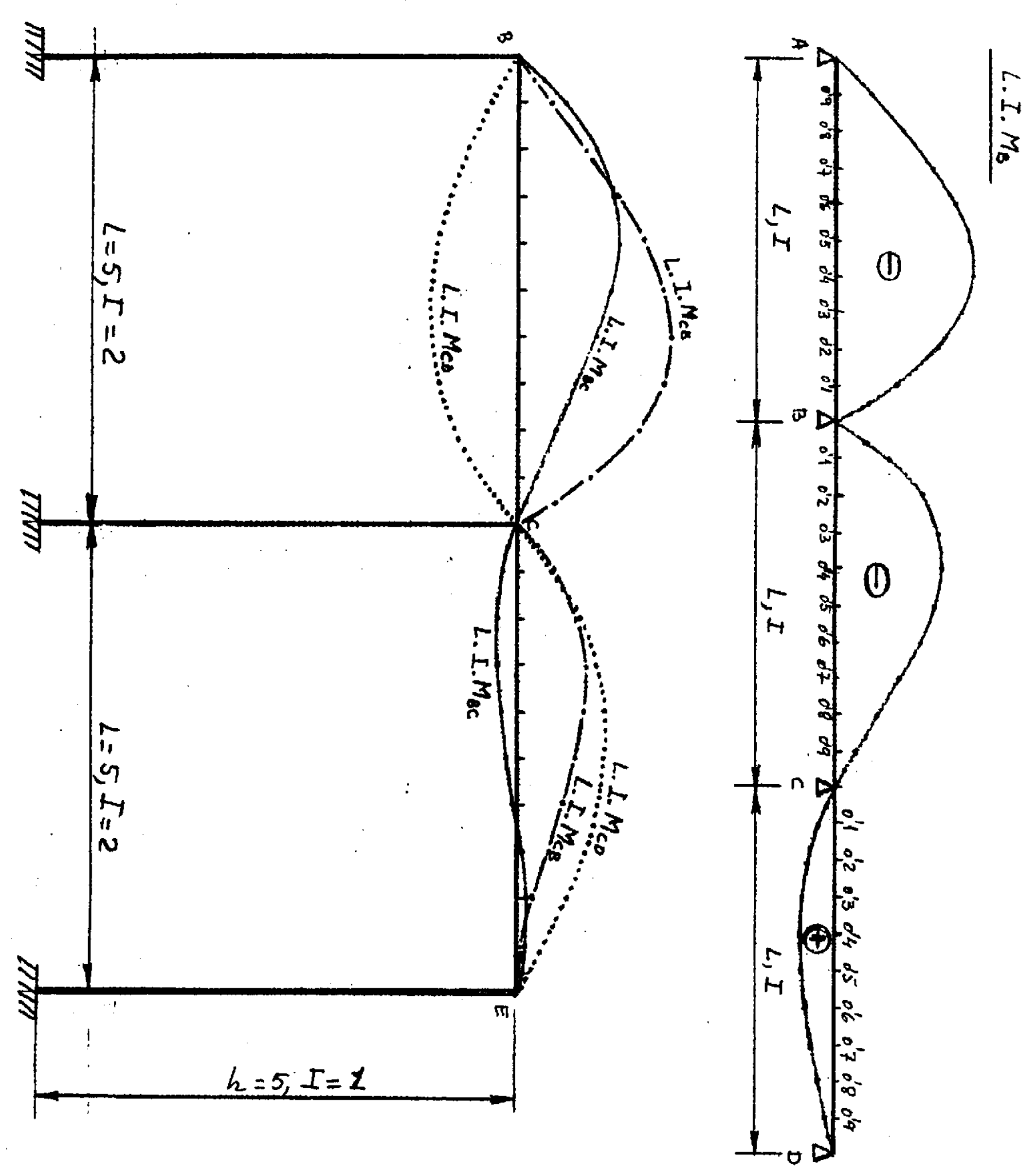
$$M_{CB} = \boxed{-\,0'344\,\mu_1 - 0'016\mu_2}$$

$$M_{CD} = \boxed{-\,0'311\mu_1 - 0'218\mu_2}$$

Con estos valores se confecciona el cuadro de la siguiente página, y las - L. de I. corrrspondientes.

α	μ_1	μ_2	momento M_{BC}		momento M_{CB}		momento M_{CD}	
0'05	0'045	0'002	− 20'0	+ 5'5	− 11'8	− 15'5	+ 10'4	− 14'4
0'10	0'081	0'009	− 36'5	+ 9'5	− 24'9	− 28'0	+ 20'5	− 27'2
0'20	0'128	0'032	− 60'0	+14'0	− 50'9	− 44'5	+ 37'8	− 46'8
0'30	0'147	0'063	− 72'1	+14'3	− 75'7	− 51'6	+ 51'6	− 59'5
0'40	0'144	0'096	− 74'9	+11'9	− 96'6	− 51'0	+ 61'2	− 65'7
0'50	0'125	0'125	− 70'2	+ 7'6	−111'2	− 45'0	+ 66'1	− 66'1
0'60	0'096	0'144	− 60'0	+ 2'8	−116'9	− 35'3	+ 65'7	− 61'2
0'70	0'063	0'147	− 45'9	− 1'5	−111'2	− 24'0	+ 59'5	− 51'6
0'80	0'032	0'128	− 29'9	− 4'2	− 91'4	− 13'0	+ 46'8	− 37'8
0'90	0'009	0'081	− 14'1	− 4'1	− 55'2	− 4'4	+ 27'2	− 20'5
0'95	0'002	0'045	− 6'5	− 2'6	− 30'0	− 1'4	+ 14'4	− 10'4
			rama BC $-(0'437\,\mu_1 + 0'125\,\mu_2)$	rama CE $-(-0'125\,\mu_1 + 0'064\,\mu_2)$	rama BC $-0'234\,\mu_1 - 0'656\,\mu_2$	rama CE $-0'344\,\mu_1 - 0'016\,\mu_2$	rama BC $+0'218\,\mu_1 + 0'311\,\mu_2$	rama CE $-0'311\,\mu_1 - 0'218\,\mu_2$

Líneas de influencia vigas contínuas y pórticos [redacted]



(Belda Villena, Res. de Mat. y Cál. de Estruc.,pág.353)
Un arco parabólico de hormigón, luz l = 20 m. y flecha f = 10 m. está sometido a la carga P = 10 t. a una distancia del arranque izquierdo a = 5 m.; la sección del clave es wc = 40x60 cm².; se cumple ds/I = dx/Io; calcular las reacciones debidas a P.

Calcular, así mismo,: 2º) efecto de un incremento de temperatura t = 30º (α = 0,000012); 3º) efecto de una carga uniformemente repartida en toda la luz, q1 = 3 t/m; 4º) idem de una carga sobre la mitad del arco, q2 = 0,5 t/m; 5º) calcular la compresión y momento flector en cada caso y en una sección tal que x = 5 m.. E = 2x10⁵ kg/cm².

<u>Solución:</u>

Se tomarán en cada caso las fórmulas de los apuntes editados.

1º) carga concentrada P = 10 t ; $\xi = a/l = 5/20 = 0,25$;

fórmula (19):

$$\overrightarrow{H} = \frac{15Pl}{4f}\xi^2(1-\xi)^2 = \frac{15\times10\times20}{4\times10}\,0'25^2\,(1-0'25)^2 =$$

$$= 2.636'7 \text{ kg} = \overleftarrow{H'}$$

fórmula (20):

$$V\uparrow = P\,(1+2\xi)\,(1-\xi)^3 = 10\,(1+0'50)\,(0'75)^2 = 8.437'5 \text{ kg}$$

$$V'\uparrow = 10.000 - V = 1.562'5 \text{ kg}$$

$$\overset{\frown}{\mu} = \frac{Pl}{2}\,\xi\,(1-\xi)^2\,(2-5\xi) = \frac{10\times20}{2}\,0'25\times0'75^2\times0'75 =$$

$$= \overset{\frown}{10.546'88} \text{ mkg}$$

$$\overset{\curvearrowright}{\mu'} = \overset{\curvearrowleft}{\mu} + \overleftarrow{P\cdot(l - a)} - \overset{\curvearrowright}{V\cdot l} = 10.546'88 + 10.000 \times 15 - 8.437'5 \times 20 =$$

$$= - \overset{\curvearrowleft}{8.203'12} \text{ mkg}$$

2°) incremento de temperatura, fórmula (33):

$$\delta = l\cdot\alpha\cdot\Delta t = 20 \times 0'000012 \times 30 = 7'2 \times 10^{-3}\ \text{m.} = 0'72\ \text{cm.}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{45\cdot E\cdot Io\cdot\delta}{4\cdot f^2\cdot l} = \frac{45 \times 2 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2 \times 720.000\ \text{cm}^4 \times 0'72\ \text{cm}}{4 \times 1000^2\ \text{cm}^2 \times 2000\ \text{cm}} =$$

$$= 583'2\ \text{kg}$$

$$\overset{\curvearrowright}{\mu} = \frac{15\cdot E\cdot Io\cdot\delta}{2\cdot f\cdot l} = \frac{15 \times 2 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2 \times 720.000\ \text{cm}^4 \times 0'72\ \text{cm}}{2 \times 1000\ \text{cm} \times 2000\ \text{cm}} =$$

$$= 388.800\ \text{cmkg} = \overset{\curvearrowleft}{\mu'}$$

3°) carga uniformemente repartida en toda la luz, fórmulas (23), (24) y (25), con $\xi = 1$

$$\overrightarrow{H} = \frac{q1\cdot l^2}{8\cdot f} = \frac{3\ \text{t/m} \times 20^2\ \text{m}^2}{8 \times 10\ \text{m}} = 15.000\ \text{kg} = \overleftarrow{H'}$$

$$V\uparrow = \frac{q1\cdot l}{2} = 30.000\ \text{kg} = V'\uparrow \qquad ; \qquad \mu = \mu' = 0$$

4°) carga uniformemente repartida en la mitad de la luz, las mismas fórmulas anteriores, con $\xi = 0'5$

$$\overrightarrow{H} = \frac{q2\cdot l^2}{16\cdot f} = \frac{0'5 \times 20^2}{16 \times 10} = 1.250\ \text{kg} = \overleftarrow{H'}$$

$$V\uparrow = \frac{13}{32}\,q2\cdot l = \frac{13x0'5x20}{32} = 4.062'5 \text{ kg}$$

$$V'\uparrow = 0'5x10 - 4'0625 = 937'5 \text{ kg}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mu} = \frac{q2\cdot l^2}{64} = \frac{0'5x20^2}{64} = 312.500 \text{ cmkg}$$

$$\overset{\curvearrowright}{\mu'} = \mu + q2\cdot\frac{l}{2}\left[1 - \frac{1}{4}\right] - V\cdot l = -\overset{\frown}{312.500} \text{ cmkg}$$

5°) cálculo de compresión y momento flector:

$$y = \frac{4\cdot f}{l^2}\,(xl - x^2) = \frac{4x10}{20^2}\,(5x20 - 5^2) = 7'5 \text{ m.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cdot f}{l^2}\,(l - 2x) = \frac{40}{400}\,(20 - 10) = 1,$$ que corresponde

a 45°, $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{dy}{ds}$

en el primer caso, para P = 10 t:

$$\overleftarrow{N} = H\cdot\cos\alpha + (V - P)\cdot\operatorname{sen}\alpha = (2.636'7 + 8.437'5 - 10.000)\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 759'6 \quad \textbf{(compresión)}$$

$$M = \overset{\curvearrowleft}{\mu} + \overset{\curvearrowleft}{H\cdot y} - \overset{\curvearrowright}{V\cdot x} = 10.546'88 + 2.636'7x7'5 - 8.437'5x5 =$$

$$= -11.865'37 \text{ mkg} \quad \textbf{(izquierda)}$$

para el incremento de temperatura:

$$N = 583'2 \times (\sqrt{2}/2) = 412'4 \text{ kg}$$

$$M = \overset{\curvearrowright}{\mu} - \overleftarrow{H \cdot y} = 388.800 - 583'2 \times 750 = - \overleftarrow{48.600} \text{ cmkg (izquierda)}$$

en la carga uniformemente repartida:

$$N = (15.000 + 30.000 - 3.000 \times 5) \cdot (\sqrt{2}/2) = 21.213'2 \text{ kg (compres.)}$$

$$M = \overleftarrow{15.000}\, y - \overrightarrow{30.000}\, x + \overleftarrow{3.000 \frac{5^2}{2}} = 0$$

finalmente, para la carga uniforme hasta la mitad del arco:

$$N = (1.250 + 4.062'5 - 500 \times 5) \cdot (\sqrt{2}/2) = 1.988'7 \text{ kg} \quad \text{(compresión)}$$

$$M = \overleftarrow{312.500} + \overleftarrow{1.250} \times 750 - \overrightarrow{4.062'5} \times 500 + \overleftarrow{5.000 \frac{5 \times 500}{2}} =$$

$$= - \overrightarrow{156.250} \text{ cmkg (izquierda)}$$

(Prob. Elast. y Resis. de Materiales, Castrillo Cabello, Gijón)
La ecuación analítica de la directriz de un arco triarticulado, con apoyos al mismo nivel, y la articulación intermedia en clave, está dada por: $y = \sqrt{10.x - x^2}$.

Si el arco está sometido a una carga uniformemente distribuida de q = 500 kg/m, determinar: 1º) Leyes de momentos flectores, esfuerzos normales y cortantes en todo el arco, así como reacciones en los apoyos. 2º) Tensiones normales máximas que se producen en el arco, sabiendo que la sección recta es un cuadrado de lado 10 cm. 3º) ¿Cuál debería ser la ecuación de la directriz para que el momento flector sea nulo en todo el arco, manteniéndose el valor de f, altura en clave.

Solución:

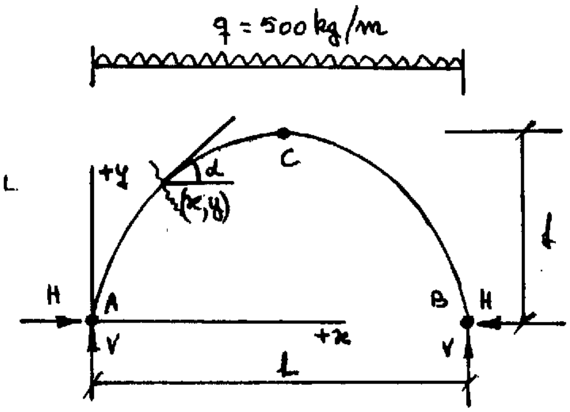
$y = \quad 10.x - x^2$

para $y = 0 \implies x = 0$

$x = 10 = L$

para $x = 5, \quad y = 5 = f$

$$V = V' = \frac{q \cdot L}{2} = 2.500 \text{ kg}$$



$$\Sigma\, Mc = 0 \;;\quad \frac{q \cdot x^2}{2} + Hy - Vx = 0 \;;\quad \frac{500 x 25}{2} + H \cdot 5 - 2500 x 5 = 0$$

$$H = 1.250 \text{ kg}$$

$$Mx = -\frac{q \cdot x^2}{2} - Hy + Vx = -250 \cdot x^2 - 1250 \cdot y + 2500 \cdot x =$$

$$= 250x \cdot (10 - x) - 1250 \cdot y = Mx \qquad (\alpha)$$

$$y = \sqrt{10 \cdot x - x^2} \;;\quad y' = tg\alpha = \frac{d}{dx}\,(10x - x^2)^{1/2} = \frac{5 - x}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{y}{5} \quad ; \quad sen\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{x - 5}{5}$$

$$Nx = H \cdot \cos\alpha + (V - qx) \cdot sen\alpha = \frac{1250 \cdot y}{5} + \frac{(2500 - 500 \cdot x)(x - 5)}{5} =$$

$$250 \cdot y - 100 \cdot (5 - x)^2 = Nx \qquad (\beta)$$

$$Tx = (V - qx) \cdot \cos\alpha - H \cdot sen\alpha =$$

$$= (2500 - 500x)\frac{y}{5} - \frac{1250\ (x - 5)}{5} = (500 - 100x)y - 250(x - 5) =$$

$$= (5 - x)(100y + 250) = Tx$$

Para calcular los máximos de Mx y Nx se derivan las expresiones (α) y (β):

$$Mx = 250x \cdot (10 - x) - 1250 \cdot y$$

$$M'x = 2500 - 500 \cdot x - 1250 \frac{5 - x}{y} = 0 \qquad ;$$

$$5 - x = \frac{2'5\ (5 - x)}{y} = 0 \quad ; \quad \text{para } x = 5, \quad Mx = 0 \,, \qquad \text{mínimo} \;;$$

otra solución para $y = 2'5$; $\qquad 10 \cdot x - x^2 = 6'25$

dos soluciones: $x = 4'33$ y $x = 0'67$ (puntos simétricos)

que dan el valor de: $\qquad Mx = - 1.562'5$ mkg

$$Nx = 250 \cdot y - 100\ (5 - x)^2$$

$$N'x = 250 \frac{5 - x}{y} - 100 \cdot 2 \cdot (5 - x) \ (-1) = 0$$

primera solución para $x = 5$, pero aquí Mx es nulo;

segunda solución para $\frac{250}{y} + 200 = 0$;

que da $y = - 1'25$, solución imposible;

entonces Nx para $x = 0'67$
$y = 2'50$ $\quad N_{x = 0'67} = - 1.250$ kg

sección: $s = a^2 = 100 \ cm^2$;

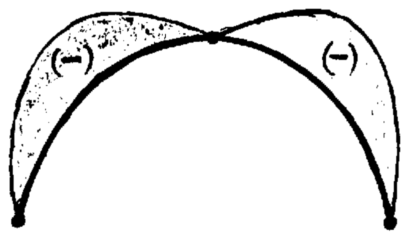
momento resistente: $W = \frac{b \cdot h^2}{6} = a^3/6 = 1000/6$ cm

$$\sigma máx = \frac{156.250}{100/6} + \frac{1.250}{100} = 950 \ kg/cm^2$$

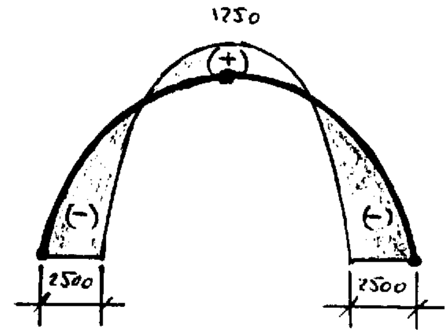
Para calcular la directriz de momento flector constante nulo se iguala a cero la ecuación (ß):

$$Mx = 250 \cdot x \ (10 - x) - 1250 \cdot y = 0 \qquad y = 0'2 \cdot x \ (10 - x)$$

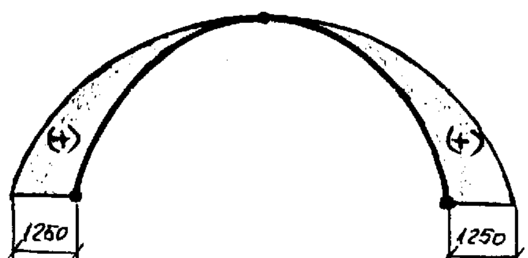
Finalmente, de las ecuaciones antes deducidas, se dibujan en la página siguiente los diagramas de flectores, esfuerzos normales y cortantes:



flectores

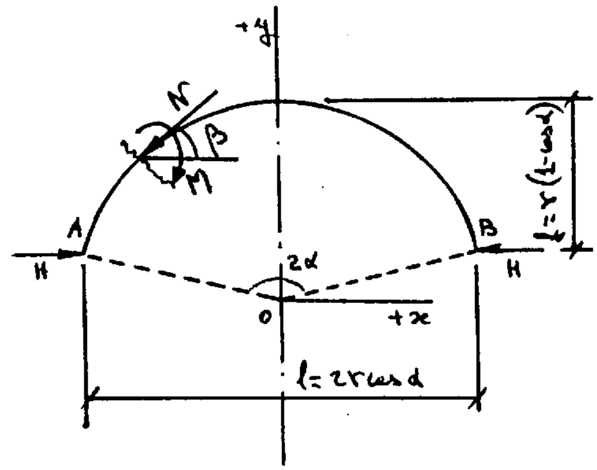


normales



cortantes

(Timoshenko y Young, pág. 346, nº 1).
El arco simétrico biarticulado de la figura tiene directriz circular de radio r u subtiene un ángulo central 2α; el área transversal, A, y el momento de inercia, $I = k^2 \cdot A$ son constantes a lo largo de toda su longitud. Calcular el incremento de luz debido a un empuje horizontal H.



$x^2 + y^2 = r^2$

$dy/dx = -x/y = tg\beta$

Solución:

Si se desprecian los efectos de la cortadura, T, los valores de M y N, flector y compresión respectivamente, en una sección cualesquiera valen:

$$M = H\,(y - r\cdot\cos\alpha) \qquad ; \qquad N = H\cdot\cos\beta$$

$$\delta = \int_s \frac{M\cdot y\cdot ds}{E\ I} + \int_s \frac{N\cdot dx}{E\ A}$$, en donde "y" vale $(y - r\cdot\cos\alpha)$;

se calculan las dos integrales por separado;

$$\int_s H(y - r\cdot\cos\alpha)^2\cdot ds = \int_s H(y^2 + r^2\cdot\cos^2\alpha - 2ry\cdot\cos\alpha)\sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= 2\cdot H\int_0^{r\,sen\,\alpha} (\ y^2 + r^2\cdot\cos^2\alpha - 2ry\cdot\cos\alpha\ )\ \frac{r}{y}\ dx =$$

$$= 2H\left[r\int_0^{r\,sen\,\alpha}\sqrt{r^2 - x^2}\ dx + r^3\cdot\cos^2\alpha\int_0^{r\,sen\,\alpha}\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 2r^2\cos\alpha\int_0^{r\,sen\,\alpha} dx\right] =$$

$$= 2\cdot H\cdot r \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2\cdot \mathrm{arcsen}\,\frac{x}{r}\right)\right]_0^{r\,\mathrm{sen}\,\alpha} +$$

$$+\ 2\cdot H\cdot r^3\cdot \cos^2\alpha\left(\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{r}\right)_0^{r\,\mathrm{sen}\,\alpha} - 4\cdot H\cdot r^2\cdot\cos\alpha\cdot r\cdot\mathrm{sen}\,\alpha =$$

$$= 2\cdot H\cdot r\cdot\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{3\cdot\mathrm{sen}2\alpha}{4} + \alpha\cdot\cos^2\alpha\right] = 2\cdot H\cdot r^3\cdot F(\alpha)$$

$$\int_S \frac{M\cdot y\cdot ds}{E\ I} = \frac{2\cdot H\cdot r^3}{E\ I}\,F(\alpha)$$

$$\int_S \frac{N\cdot dx}{E\ A} = \int_S \frac{k^2\cdot H\cdot\cos\beta\cdot dx}{E\ I} = \frac{H\cdot k^2}{E\ I}\int_S \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} =$$

$$= \frac{H\cdot k^2}{EI\cdot r}\,2\int_0^{r\,\mathrm{sen}\,\alpha} y\cdot dx =$$

$$= \frac{2H\cdot k^2}{EI\cdot r}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2\cdot\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{r}\right)\right]_0^{r\,\mathrm{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot H\cdot k^2\cdot r}{E\ I}\left[\frac{\mathrm{sen}2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}\right]$$

y, haciendo $\dfrac{\mathrm{sen}2\alpha}{4} + \dfrac{\alpha}{2} = G(\alpha)\cdot F(\alpha)$, queda finalmente

$$\delta = \frac{2\cdot H\cdot r^3}{E\ I}\,F(\alpha)\left[1 + \frac{k^2}{r^2}\,G(\alpha)\right]$$

CALCULO MATRICIAL ESTRUCTURAS

(Escuela Superior Arquitectura, Sevilla)

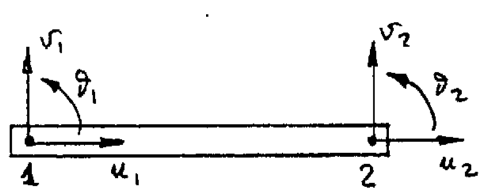
En una viga prismática, perteneciente a un pórtico plano, se han medido los siguientes corrimientos:

		coorden.	u	v	ϑ
extremo	1	(2;6)	3 cm.	1 cm.	0'006 rad
"	2	(8;6)	2 cm.	1 cm.	-0'003 "

Calcular, en coordenadas locales : a) las matrices de rigidez y flexibilidad; b) reacciones en los extremos; c) reacciones en los extremos, si sobre la viga actua una carga uniformemente repartida de 4 t/m.; tómese $A = 0'60 \cdot 0'25\ m^2$

$E = 2'0 \cdot 10^6\ t/m^2$

<u>Solución</u> : la longitud de la barra L = 6 m. (8-6 coordenadas)



a) se trata de una barra de pórtico extensible; las matrices elementales serán:

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} ; \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

— 138 —

b) Reacciones

$$
\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
EA/L & & & & & \\
0 & 12EI/L^3 & & & & \\
0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & & & \\
\hline
-EA/L & 0 & 0 & EA/L & & \\
0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\
0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L & 4EI/L
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
3.\,10^{-2} \\ 1.\,10^{-2} \\ 6.\,10^{-3} \\ \hline 2.\,10^{-2} \\ 1.\,10^{-2} \\ -3.\,10^{-3}
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
EA/L & 0 & 0 \\
0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
0 & 6EI/L^2 & 4EI/L
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} 3\,.\,10^{-2} \\ 1\,.\,10^{-2} \\ 6\,.\,10^{-3} \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
-EA/L & 0 & 0 \\
0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
0 & -6EI/L^2 & 2EI/L
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} 2\,.\,10^{-2} \\ 1\,.\,10^{-2} \\ -3.\,10^{-3} \end{bmatrix} =
$$

$$
= 10^{-2}
\begin{bmatrix}
3EA/L \\[2mm]
\dfrac{12EI}{L^3} + \dfrac{6EI}{L^2}\,0'6 \\[2mm]
\dfrac{6EI}{L^2} + \dfrac{4EI}{L}\,0'6
\end{bmatrix}
+ 10^{-2}
\begin{bmatrix}
-2EA/L \\[2mm]
\dfrac{-12EI}{L^3} - \dfrac{6EI}{L^2}\,0'3 \\[2mm]
\dfrac{-6EI}{L^2} - \dfrac{2EI}{L}\,0'3
\end{bmatrix} =
$$

$$= 10^{-2} \begin{bmatrix} EA/L \\ 0'3\,\dfrac{6EI}{L^2} \\ 1'8\,\dfrac{EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\ t \\ 4'5\ t \\ 27'0\ mt \end{bmatrix}$$

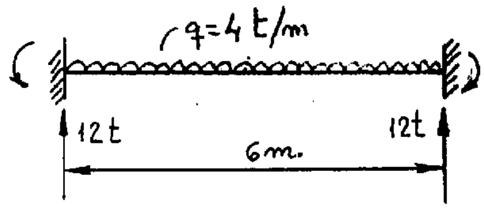
Puede comprobarse ya que $N_2 = -500\ t$

$V_2 = -4'5\ t$

$M_2 = 0$

c) Las fórmulas anteriores nos dan las reacciones sobre los nudos extremos debidos a los "corrimientos de esos nudos". Si actúa una carga, habrá que sumar a aquellos las debidas a esta carga (barra biempotrada):

$$\mu = \mu' = \frac{ql^2}{12} = \frac{4\,.\,36}{12} = 12\ mt$$



$N_1 = 500\ t$

$V_1 = 4'5 + 12 = 16'5\ t$

$M_1 = 27 + 12 = 39\ mt$

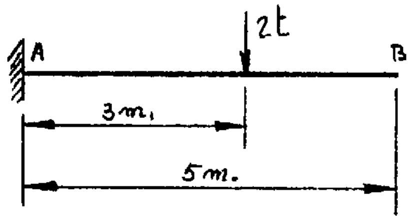
$N_2 = -500\ t$

$V_2 = -4'5 + 12 = 7'5\ t$

$M_2 = 0 - 12 = -12\ mt$

(Escuela de Arquitectura, Sevilla, curso 81-82)

Calcular por métodos matriciales, en la figura adjunta: a) flecha del punto B; b) giro del mismo punto B; c) momento en el punto A.

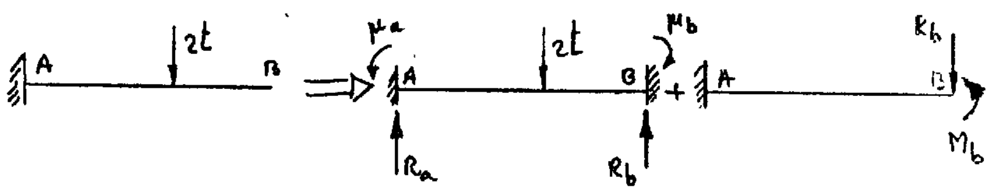


$0'2 \; . \; 0'6 \; m^2$, $E = 2 \; . \; 10^6 \; t/m^2$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0'2 \; . \; 0'6^3}{12} =$$

$EI = 7200 \;/\; EA = 0'24 \; . \; 10^6$

Solución :



El cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto nos da:

$$\mu_a = \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{2 \; . \; 3 \; . \; 2^2}{5^2} = 0'96 \text{ mt}$$

$$\mu_b = \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{2 \; . \; 3^2 \; . \; 2}{5^2} = 1'44 \text{ m t}$$

$$R_a = \downarrow - \frac{1'44 - 0'96}{l} + \frac{P}{l} b = \uparrow 0'704 \text{ t}$$

$$R_b = \uparrow \frac{144 - 0'96}{5} + \frac{P}{l} a = 1'296 \text{ t}$$

Las cargas en el nodo B son $P_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1'296 \\ 1'44 \end{bmatrix}$ y la ecuación matricial resulta ser:

$$\begin{bmatrix} P_a \\ P_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

, con $\delta_1 = 0$ por empotramiento; resolviendo (no hay u_1, u_2)

$$P_b = K_{12} \cdot 0 + K_{22}\delta_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1'296 \\ 1'44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} \\ \vartheta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -1'296 &= 691'2\, v_{22} - 1728\,\vartheta_{22} \\ 1'44 &= -1728\, v_{22} + 5760\,\vartheta_{22} \end{aligned}\right\} \text{ resolviendo, } \vartheta_{22} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 691'2 & -1'296 \\ -1728 & 1'44 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 691'2 & -1728 \\ -1728 & 5760 \end{vmatrix}} = -1'25 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}$$

$v_{22} = -5 \cdot 10^{-3}$ m $= -5$ mm (hacia abajo)

De la ecuación motricial sacamos $P_a = \cancel{K_{11}\delta_1} + K_{12}\delta_2$

$$\begin{bmatrix} R_a \\ M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{2^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} \\ \vartheta_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_a = \left(\frac{-6EI}{L^2}\right)(-5 \cdot 10^{-3}) + \frac{2EI}{L}(-1'25 \cdot 10^{-3}) = 5'04 \text{ m t}$$

momento toal $5'04 + 0'96 = 6$ mt (comprobar facilmente)

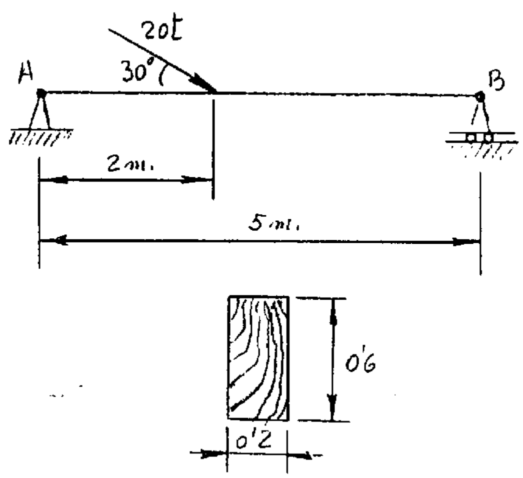
Comprobemos reacción total en A:

$$R_A = \left(-\frac{12EI}{L^3}\right)(-5 \cdot 10^{-3}) + \frac{6EI}{L^2}(-1'25 \cdot 10^{-3}) = 1'296 \text{ t}$$

total $1'296 + 0'704 = 2$ t (evidente)

(Escuela de Arquitectura, Sevilla, curso 81-82)

Calcular por métodos matriciales, en la figura adjunta, 1º) el giro del extremo B; 2º) el alargamiento de la barra AB; 3º) la reacción vertical en A.

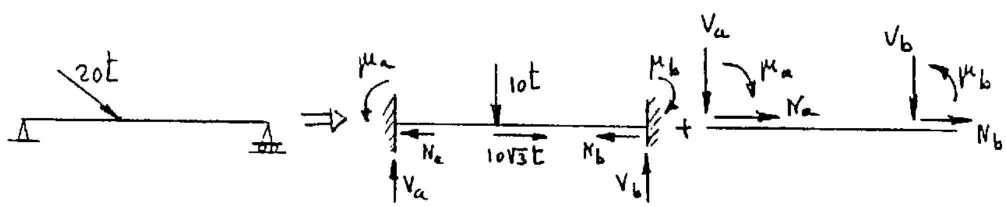


$$A = 0'2 \;.\; 0'6 = 0'12 \; m^2$$

$$\left.\begin{aligned} E &= 2 \;.\; 10^6 \; t/m^2 \\ I &= \frac{bh^3}{12} = 3'6 \;.\; 10^{-3} \; m^4 \end{aligned}\right\}$$

$$EI = 7200$$

$$AE = 0'24 \;.\; 10^6$$



desglosamos la viga propuesta en la hiperestática empotrada y la subsiguiente:

$$\left.\begin{aligned} \mu_a &= \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{10.2.9}{25} = 7'2 \text{ mt} \\ \mu_b &= \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{10.4.3}{25} = 4'8 \text{ mt} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} V_a &= \frac{P}{l}\,3 + \frac{7'2-4'8}{5} = 6'48 \text{ t} \\ V_b &= \frac{P}{l}\,2 - \frac{7'2-4'8}{5} = 3'52 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\frac{2N_a}{\cancel{AE}} = \frac{3N_b}{\cancel{AE}} \quad ; \quad N_a = 1'5 \; N_b$$

$$N_a + N_b = 10\sqrt{3} \quad ; \quad N_b = \frac{10\sqrt{3}}{2'5} = 6'928 \text{ t}; \quad N_a = 10'392 \text{ t}$$

Aplicando ahora el cálculo matricial a la barra de la derecha, con las limitaciones de movimientos impuestos en la viga original ($u_a = v_a = 0$; $v_b = 0$)

$$\begin{bmatrix} 10'392 \\ -6'48 \\ -7'20 \\ 6'928 \\ -3'52 \\ 4'80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_a \\ u_b \\ 0 \\ \vartheta_b \end{bmatrix}$$

$$6'928 = + \frac{EA}{L} u_b \Longrightarrow u_b = \frac{6'928 \;.\; 5}{0'24 \;.\; 10^6} = 1'44 \;.\; 10^{-4} \text{ m.} <> 0'144 \text{ mm}$$

(comprobación: de la viga original sacamos facilmente $\delta = \frac{10\sqrt{3}.2}{AE} =$ $= 0'144$ mm.)

$$\left.\begin{aligned} -7'20 &= \frac{4EI}{L}\vartheta_a + \frac{2EI}{L}\vartheta_b \\ 4'80 &= \frac{2EI}{L}\vartheta_a + \frac{4EI}{L}\vartheta_b \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -7'20 &= 5760\,\vartheta_a + 2880\,\vartheta_b \\ 4'80 &= 2880\,\vartheta_a + 5760\,\vartheta_b \end{aligned}\right\}$$

$$\vartheta_b = \frac{\begin{vmatrix} 5760 & -7'20 \\ 2880 & 4'80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5760 & 2880 \\ 2880 & 5760 \end{vmatrix}} = \frac{48.384}{+24.883.200} = 0'00194 \text{ radianes;}$$

ϑ_a = análogamente = $-\,0'00222$ radianes.

(comprobaciones; sacamos las fórmulas de "Resistencia de M" ;

$$\vartheta_b = \frac{Pab(l+a)}{6lEI_z} = \frac{10.2.3.7}{30.7200} = 0'00194 \text{ radianes;}$$

$$\vartheta_a = \frac{Pb(l^2-b^2)}{6lEI_z} = \frac{10.3.16}{30.7200} = 0'00222 \text{ radianes.)}$$

Ahora ya:

$$\left[\begin{array}{c} P_A \\ \hdashline P_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -10'392 \\ 6'48 \\ 7'20 \\ \hdashline -6'928 \\ 3'52 \\ -4'80 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} k_{11} & k_{12} \\ \hdashline k_{21} & k_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -22.10^{-4} \\ \hdashline 1'44.10^{-4} \\ 0 \\ 19'4.10^{-4} \end{array}\right]$$

$$V_a = \left[6'48\right] + \left[\frac{6EI}{L^2}\vartheta_a + \frac{6EI}{L^2}\vartheta_b\right] = 6'48 + \frac{6EI}{L^2}(-0'00028) =$$

$$= 6'48 - 0'48 = 6\ t$$

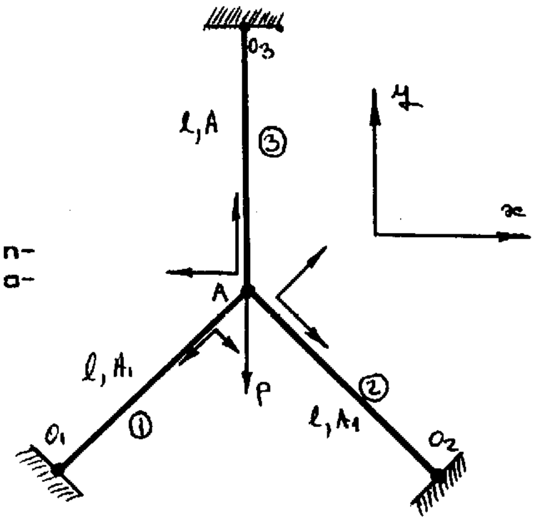
Por ejemplo momento en A:

$$M_A = 7'20 + \frac{4EI}{L}\vartheta_a + \frac{2EI}{L}\vartheta_b = 7'20 + (-12'787) + 5'587 = 0$$

(Timoshenko, tomo I, pag. 318, nº 1)

La carga vertical P está sostenida como indica la figura (1, A longitud y sección de la barra vertical y 1, A_1 de las barras inclinadas). Determinar las tensiones en las barras y la relación A_1/A para que dichas tensiones sean numéricamente iguales.

<u>Solución:</u>



en la fig.dcha. se han indicado las coordenadas locales y las globales.

barra (1), α = 225°

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = -\sqrt{2}/2$

$$(k11)1 = \frac{E\cdot A1}{L}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E\cdot A1}{L}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \frac{E\cdot A1}{2L}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

barra (2), α = 315° ; $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{2}/2$; $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$

$$(k11)2 = \frac{E\cdot A1}{L}\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \frac{E\cdot A1}{2L}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

barra (3), α = 90° ; $\operatorname{sen}\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$

$$(k11)3 = \frac{E\cdot A}{L}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[P] = \left[(k11)1 + (k11)2 + (k11)3 \right] \cdot \delta A \quad , \quad \text{es decir:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} = \left\{ \frac{E \cdot A1}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{E \cdot A1}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}$$

y, como $\delta u = 0$, por simetría, queda:

$$-P = \frac{E \cdot A1}{2L} \left(\delta v + \delta v \right) + \frac{E \cdot A}{L} \delta v \quad ; \quad \delta v = \frac{-PL}{E(A + A1)} = \delta v'$$

por ser globales = locales en la barra (3);

$$P3' = (k11)3 \cdot \delta A' = \frac{E \cdot A}{L} \; \frac{-PL}{E(A + A1)} = \frac{-AP}{A + A1} \downarrow \text{(tracción)}$$

$$\delta 1' = T^{t} \cdot \delta A = \left[\cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \right] \cdot \delta A = \left[-\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2 \right] \frac{-PL}{E(A + A1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot PL}{2E\ (A + A1)} \swarrow \text{(compresión)}$$

$$P1' = (k11)1 \cdot \delta 1' = \frac{E \cdot A1}{L} \; \frac{\sqrt{2}\ PL}{2E\ (A + A1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot A1 \cdot P}{2\ (A + A1)} \swarrow$$

(compresión): (positivo, tal y como se han tomado las direcciones locales)

$$\delta 2' = \overset{+}{T} \cdot \delta A = \left[\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2 \right] \frac{-PL}{E\,(A + A1)} = \frac{\sqrt{2}\,PL}{2E\,(A + A1)}$$

y sale, lógicamente, el mismo valor.

La ecuación matricial completa para calcular las reacciones será:

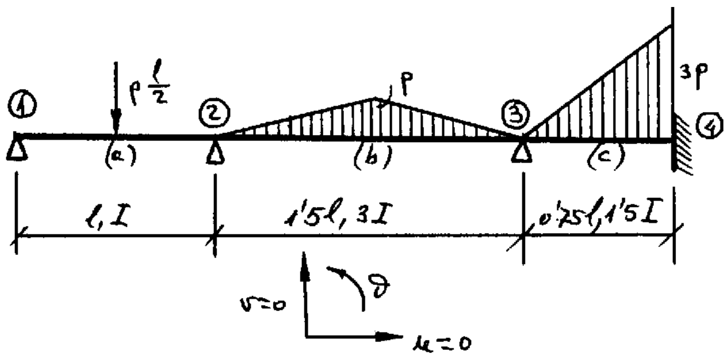
$$\begin{bmatrix} Ro1 \\ Ro2 \\ Ro3 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k11)1 & 0 & 0 & (k12)1 \\ 0 & (k11)2 & 0 & (k12)2 \\ 0 & 0 & (k11)3 & (k12)3 \\ (k21)1 & (k21)2 & (k21)3 & (k22)1 + (k22)2 + (k22)3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta 1 = 0 \\ \delta 2 = 0 \\ \delta 3 = 0 \\ \delta A \end{bmatrix}$$

$Ro1 = (k12)1 \cdot \delta A$; y, en locales, resulta:

$$Ro1 = \left(- \frac{E \cdot A1}{L} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{E(A + A1)} = - \frac{\sqrt{2} \cdot A1 \cdot P}{2\,(A + A1)} \quad \nearrow ,$$

opuesta a P1'. Análogamente, el resto de las reacciones.

(Fdez. Casado, Cálculo de Estruc.Reticulares, pág.84)
Resolver matricialmente el problema de la figura adjunta (cálculo de reacciones).



Se adoptan la nomenclatura de nudos y barras indicadas en la anterior figura y solo se consideran desplazamientos giros ($\theta \neq 0$); es decir, ui = 0 y vi = 0, que se deduce de las condiciones de sustentación.

Para facilitar el cálculo, que no sea literal, se toma l = 4m., 1'5 l = 6 m., 0'75 l = 3 m.; y se supondrán barras inextensibles; no es necesario pasar de coordenadas locales a globales, al ser todos los sistemas coincidentes. La matriz global será:

$$\begin{bmatrix} (k11)a & (k12)a & 0 & 0 \\ (k21)a & (k22)a + (k22)b & (k23)b & 0 \\ 0 & (k32)b & (k33)b + (k33)c & (k34)c \\ 0 & 0 & (k43)c & (k44)c \end{bmatrix}$$

y cada elemental:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 12\ EI/L & & \multicolumn{2}{c}{\text{(simétrica)}} \\ 6\ EI/L^2 & 4\ EI/L & & \\ \hline -12\ EI/L & -6EI/L^2 & 12\ EI/L & \\ 6\ EI/L^2 & 2\ EI/L & -6\ EI/L^2 & 4\ EI/L \end{array}\right]$$

con lo cual, y sustiyendo valores de cada barra, resultan:

$$[\,ka\,] = EI \left[\begin{array}{cc|cc} 0'188 & 0'375 & -0'188 & 0'375 \\ 0'375 & 1'000 & -0'375 & 0'500 \\ \hline -0'188 & -0'375 & 0'188 & -0'375 \\ 0'375 & 0'500 & -0'375 & 1'000 \end{array}\right]$$

l= 4 ; I

$$[\,kb\,] = EI \left[\begin{array}{cc|cc} 0'167 & 0'500 & -0'167 & 0'500 \\ 0'500 & 2'000 & -0'500 & 1'000 \\ \hline -0'167 & -0'500 & 0'167 & -0'500 \\ 0'500 & 1'000 & -0'500 & 2'000 \end{array}\right]$$

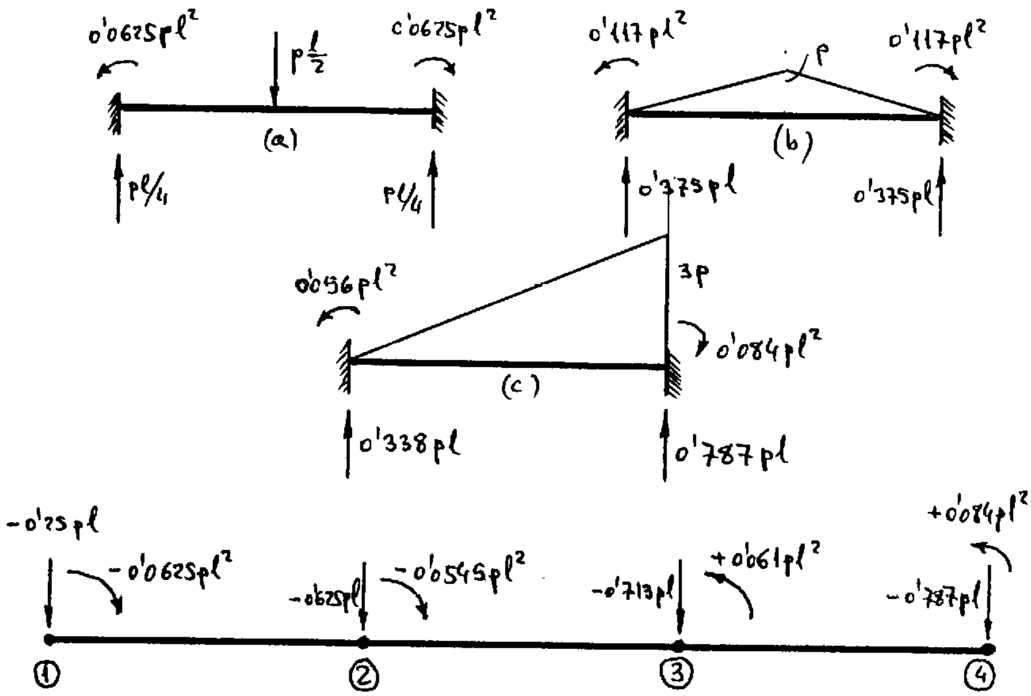
l= 6 ; 3I

$$[\,kc\,] = EI \left[\begin{array}{cc|cc} 0'667 & 1'000 & -0'667 & 1'000 \\ 1'000 & 2'000 & -1'000 & 1'000 \\ \hline -0'667 & -1'000 & 0'667 & -1'000 \\ 1'000 & 1'000 & -1'000 & 2'000 \end{array}\right]$$

l= 3 ; 1'5I

ahora ya se toman los valores hiperestáticos de cada barra: a la hora de sumar cargas las barras (a) y (b), al ser simétricas, no conllevan hiperestáticas; en cambio en la (c) a las isostáticas hay que sumar las hiperestáticas, suma algebraica de momentos dividida por la luz:

$$\frac{(0'084 - 0'056)pl^2}{0'75\cdot l} = 0'037\cdot pl$$



con todos los datos anteriores se forma la ecuación matricial: por problemas prácticos de espacio se escribe el primer miembro separado del segundo; y este segundo se debe entender multiplicado por $EI \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{bmatrix} -0'2500\ pl \\ -0'0625\ pl^2 \\ -0'6250\ pl \\ -0'0545\ pl^2 \\ \hdashline -0'7130\ pl \\ 0'0610\ pl^2 \\ -0'7870\ pl \\ 0'0840\ pl^2 \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
188 & 375 & -188 & 375 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
375 & 1000 & -375 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-188 & -375 & 355 & 125 & -167 & 500 & 0 & 0 \\
375 & 500 & 125 & 3000 & -500 & 1000 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -167 & -500 & 834 & 500 & -667 & 1000 \\
0 & 0 & 500 & 1000 & 500 & 4000 & -1000 & 1000 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -667 & -1000 & 667 & -1000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 1000 & -1000 & 2000
\end{array}\right]}_{\times EI\cdot 10^{-3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \\ 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = 0$$

resolviendo en los ángulos de giro:

$$-\ 0'0625\ pl^2 = (\ \theta_1 + 0'5\cdot\theta_2\ )\ EI \qquad (1)$$

$$-\ 0'0545\ pl^2 = (\ 0'5\cdot\theta_1 + 3'0\cdot\theta_2 + \theta_3\ )\ EI \qquad (2)$$

$$0'0610\ pl^2 = (\ \theta_2 + 4'0\cdot\theta_3\ )\ EI \qquad (3)$$

eliminando θ_3 entre (2) y (3) y luego con (1) salen los valores finales siguientes:

$$\theta_1 = -\ 0'0548\ pl^2/EI \text{ radianes}$$

$$\theta_2 = -\ 0'0154\ pl^2/EI \text{ radianes}$$

$$\theta_3 = +\ 0'0191\ pl^2/EI \text{ radianes}$$

(Estos valores coinciden con los calculados por otro procedimiento en nota anexa del citado texto de Fdez. Casado). Para calcular las reacciones extremas se resuelve ya:

$$\begin{bmatrix} R1 \\ M1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'2500\ pl \\ 0'0625\ pl^2 \end{bmatrix} + \overset{(k11)a}{\begin{bmatrix} 0'188 & 0'375 \\ 0'375 & 1'000 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\delta 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\ 0'0548\ pl^2 \end{bmatrix}} +$$

$$+ \overset{(k12)a}{\begin{bmatrix} -\ 0'188 & 0'375 \\ -\ 0'375 & 0'500 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\delta 2}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\ 0'0154\ pl^2 \end{bmatrix}}$$

$$R1 = (0'25 - 0'375 \times 0'0548 \times 4 - 0'375 \times 0'0154 \times 4)pl = 0'145\ pl$$

$$M1 = (0'0625 - 0'0548 - 0'0077)pl^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} R4 \\ M4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'787\ pl \\ -\ 0'084\ pl^2 \end{bmatrix} + \overset{(k21)c}{\begin{bmatrix} -\ 0'667 & -1'000 \\ 1'000 & 1'000 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\delta 3}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\ 0'0191\ pl^2 \end{bmatrix}}$$

$$R4 = 0'711\ pl \qquad ; \qquad M4 = -\ 0'0649\ pl^2$$

$$R2 = (0'625 + 0'375 \times 0'0548 \times 4 - 0'125 \times 0'0154 \times 4 +$$

$$+ 0'5 \times 0'0191 \times 4)pl = 0'738\ pl$$

$$R3 = (0'713 + 0'5 \times 0'0154 \times 4 + 0'5 \times 0'0191 \times 4)\ pl = 0'782\ pl$$

para calcular los momentos en los nudos 2 y 3 no se puede usar la ecuación global, que da nulos evidentemente, sino la matricial de cada barra:

$$\begin{bmatrix} M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'117\ pl^2 \end{bmatrix} + \overset{(k22)b}{\begin{bmatrix} 0'500 & 2'000 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\delta 2}{\begin{bmatrix} -\ 0'0154\ pl^2 \end{bmatrix}} +$$

$$+ \overset{(k23)b}{\begin{bmatrix} -\ 0'500 & 1'000 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\delta 3}{\begin{bmatrix} +\ 0'0191\ pl^2 \end{bmatrix}}$$

$M2 = (0'117 - 2 \times 0'0154 + 0'0191)\ pl^2 = 0'1053\ pl^2$

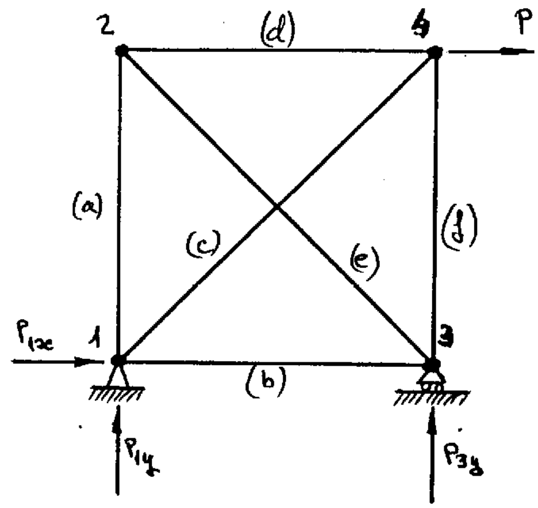
análogamente:

$M3 = -\ 0'117\ pl^2 + (k32)b \cdot \delta 2 + (k33)b \cdot \delta 3 =$

$= (-\ 0'117 - 1 \times 0'0154 + 2 \times 0'0191)\ pl^2 = -\ 0'0942\ pl^2$

(Argüelles Alvarez, La Estruc. Metálica Hoy, III, pág.IV-170).
Resolver matricialmente la estructura articulada de la página siguiente. Las secciones de todas las barras son idénticas y el lado del cuadrado vale L.

Nota.- Véase el mismo problema resuelto por el PTV en la pág. 90 de esta misma colección de problemas.



Solución:

Se escriben la matriz global y las locales de cada barra:

$$
\begin{bmatrix}
(K11)a + (K11)b + (K11)c & (K12)a & (K13)b & (K14)c \\
(K21)a & (K22)a + (K22)d + (K22)e & (K23)e & (K24)d \\
(K31)b & (K32)e & (K33)b + (K33)e + (K33)f & (K34)f \\
(K41)c & (K42)d & (K43)f & (K44)c + (K44)d + (K44)f
\end{bmatrix}
$$

$$
(K')a = (K')b = (K')d = (K')f = \frac{A\ E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ;
$$

$$K'c = K'e = \frac{A\,E}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$K = \frac{A\,E}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

barras a y f: $\quad (K11)a = (K33)f = \dfrac{A\,E}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha = 90°$;

$\text{sen}\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$

barras b y d: $\quad (K11)b = (K22)d = \dfrac{A\,E}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha = 0°$;

$\text{sen}\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$

barra c: $\quad (K11)c = \dfrac{A\,E}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \dfrac{A\,E}{L} \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\alpha = 45°$;

$\text{sen}\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$

barra e: $\quad (K22)e = \dfrac{A\,E}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \dfrac{A\,E}{L} \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\alpha = -45°$;

$\text{sen}\alpha = -\sqrt{2}/2$; $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$

Se escribe la ecuación matricial completa y, luego, la resultante de eliminar las condiciones de contorno. Por cuestiones de espacio, y al ser los distintos términos de la matriz global repetitivos, se adopta la nomenclatura siguiente:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = X = 1'35355 \qquad ; \qquad 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = T = 0'64645$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = Y = 0'35355 \qquad\qquad - \frac{1}{2\sqrt{2}} = Z = -\ 0'35355$$

$$\begin{bmatrix} P1x \\ P1y \\ \hline P2x \\ P2y \\ \hline P3x \\ P3y \\ \hline P4x \\ P4y \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} X & Y & 0 & 0 & -1 & 0 & Z & Z \\ Y & X & 0 & -1 & 0 & 0 & Z & Z \\ \hline 0 & 0 & X & Z & Z & Y & -1 & 0 \\ 0 & -1 & Z & X & Y & Z & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & Z & Y & X & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & Z & Z & X & 0 & -1 \\ \hline Z & Z & -1 & 0 & 0 & 0 & X & Y \\ Z & Z & 0 & 0 & 0 & -1 & Y & X \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \delta 1x \\ \delta 1y \\ \delta 2X \\ \delta 2y \\ \delta 3x \\ \delta 3y \\ \delta 4x \\ \delta 4y \end{bmatrix}$$

Siendo nulos los siguientes vectores de carga y de desplazamiento:

$P2x = P2y = P3x = P4y = 0 \quad ; \quad \delta 1x = \delta 1y = \delta 3y = 0 \quad ;$

y conocido el valor de $P4x = P$, carga sobre el nudo 4.

quedando el vector de cargas (0,0,0,P,0) igual a lo que sigue, multiplicado por AE/L:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1'35355 & -0'35355 & -0'35355 & -1 & 0 \\ -0'35355 & 1'35355 & 0'35355 & 0 & 0 \\ -0'35355 & 0'35355 & 1'35355 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1'35355 & 0'35355 \\ 0 & 0 & 0 & 0'35355 & 1'35355 \end{bmatrix}}_{\times AE/L} \cdot \begin{bmatrix} \delta 2x \\ \delta 2y \\ \delta 3x \\ \delta 4x \\ \delta 4y \end{bmatrix}$$

De la resolución matricial anterior salen los valores que se indican a continuación:

$$\overrightarrow{\delta 2x} = 1'914 \frac{P\ L}{A\ E} \ ; \ \uparrow \delta 2y = 0'396 \frac{P\ L}{A\ E} \ ; \ \overrightarrow{\delta 3x} = 0'396 \frac{P\ L}{A\ E}$$

$$\overrightarrow{\delta 4x} = 2'311 \frac{P\ L}{A\ E} \ ; \ \downarrow \delta 4y = -0'604 \frac{P\ L}{A\ E}$$

$$\delta'^{\,e}_{2} = \frac{P\ L}{A\ E} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1'914 \\ 0'396 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ 1'518 \frac{P\ L}{A\ E}$$

$$\delta'^{\,e}_{3} = \frac{P\ L}{A\ E} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'396 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ 0'396 \frac{P\ L}{A\ E}$$

$$\delta'^{\,c}_{4} = L^{T} \cdot \delta_{4} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2'311 \\ -0'604 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2'311 \\ -0'604 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ 1'707 \frac{P\ L}{A\ E}$$

las fuerzas de cada barra se calculan en locales: $P' = K' \cdot \Delta'$

barra a: $$(P12)a = \frac{A\,E}{L}\,0'396\,\frac{P\,L}{A\,E} = 0'396\,P \quad \text{(tracción)}$$

barra b: $$(P13)b = \frac{A\,E}{L}\,0'396\,\frac{P\,L}{A\,E} = 0'396\,P \quad \text{(tracción)}$$

barra c: $$(P14)c = \frac{A\,E}{\sqrt{2}L}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,1'707\,\frac{P\,L}{A\,E} = 0'854\,P \quad \text{(tracción)}$$

barra d: $$(P24)d = \frac{A\,E}{L}\,(2'314 - 1'914)$$ [illegible] $$\frac{P\,L}{A\,E} =$$

$$= 0'397\,P \quad \text{(tracción)}$$

barra e: $$(P23)e = \frac{A\,E}{\sqrt{2}L}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1'518 + 0'396)\,\frac{P\,L}{A\,E} =$$

$$= -0'561\,P \quad \text{(compre.)}$$

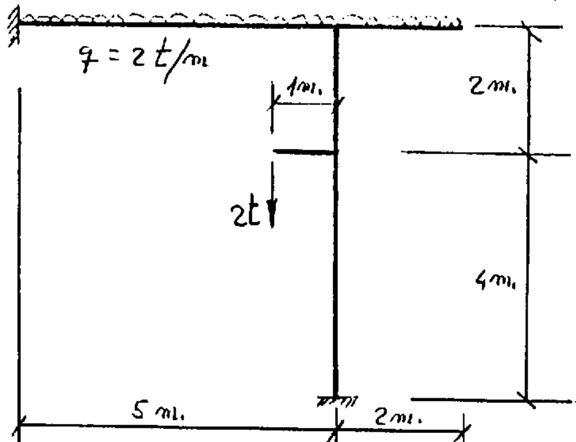
barra f: $$(P34)f = \frac{A\,E}{L}\,(-0'604)\,\frac{P\,L}{A\,E} =$$

$$= -0'604\,P \quad \text{(compre.)}$$

$$P1x = -\delta 3x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\delta 4x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\delta 4y = -P$$, e igual $P1y = +P$

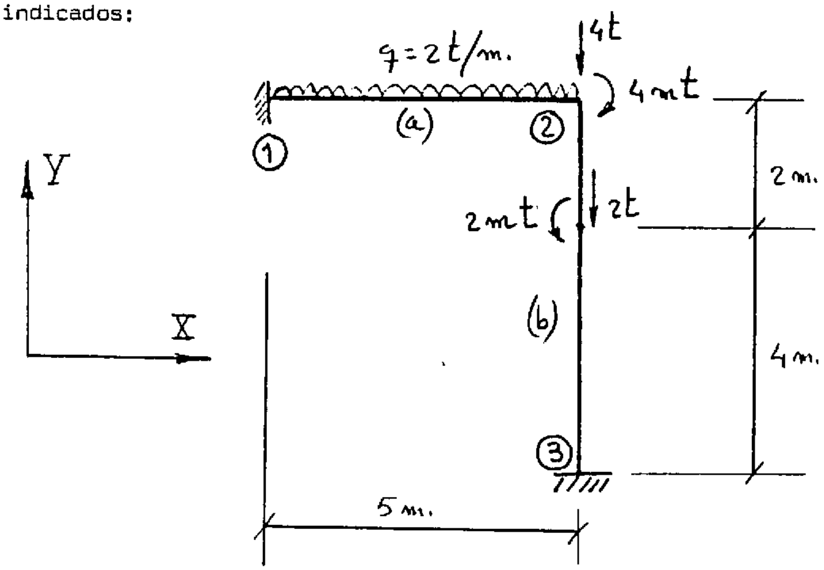
$P4y = -P$

Calcular matricialmente las leyes de esfuerzos de la estructura adjunta, teniendo en cuenta que la sección de todas las barras es de 0'40.0'25 m^2; las barras se considerarán elongables y no se tendrá en cuenta el peso propio a efectos de cálculo. $E = 3.10^6$ t/m^2



$$\left.\begin{array}{l} E = 3.10^6 \ t/m^2 \\ A = 0'25.0'40 = 0'1 \ m^2 \\ I = \dfrac{bh^3}{12} = 1'\widehat{3}.10^{-3} \ m^4 \\ EA = 3.10^5 \ t \\ EI = 4000 \ t \ m^2 \end{array}\right\}$$

Adaptemos la nomenclatura de la siguiente figura, con los ejes globales indicados:



Ecuación matricial general:

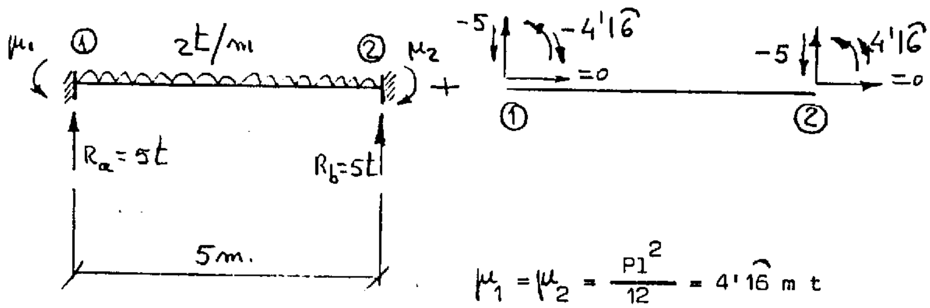
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_a & (K_{12})_a & 0 \\ (K_{21})_a & (K_{22})_a + (K_{11})_b & (K_{12})_b \\ 0 & (K_{21})_b & (K_{22})_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

Por empotramiento, $\delta_1 = \delta_3 = 0$; por lo tanto, y según el siginificado físico de cada matriz parcial, las columnas 1ª y 3ª se pueden suprimir, quedando:

$$\left[P_2 \right] = \left[(K_{22})_a + (K_{11})_b \right] \left[\delta_2 \right] \qquad (1)$$

Vamos a calcular las vigas (a) y (b) en coordenadas locales:

Barra (a):

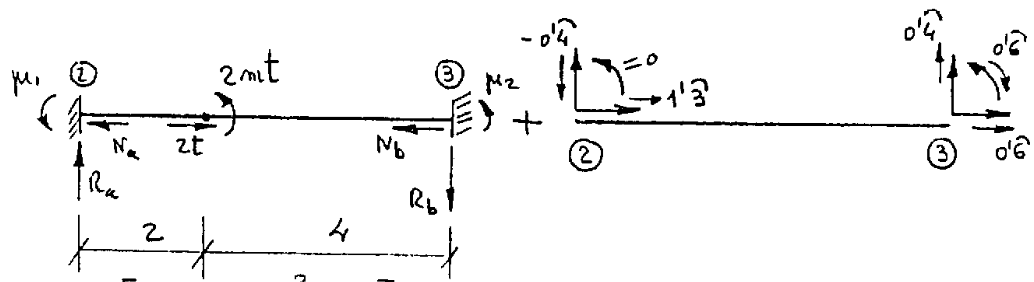


$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{Pl^2}{12} = 4'1\widehat{6} \ m\ t$$

En esta viga coinciden las coordenadas locales y globales, luego las reacciones matricialmente valen en ambas coordenadas:

$$(1) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -4'1\widehat{6} \end{bmatrix} ; (2) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 4'1\widehat{6} \end{bmatrix}$$

Barra (b):



$$\mu_1 = m \left[4 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right] = 0$$

$$\curvearrowleft M_2 = m \left[4 \frac{b}{l} - 3 \frac{b^2}{l^2} - 1 \right] = 0'\widehat{6}\ m\ t\ ; \quad R_a = R_b = \frac{0'\widehat{6}+2}{6} = 0'\widehat{4}$$

$N_a + N_b = 2$; $2N_a = 4\ N_b = 4\ (2 - N_a) = 8 - 4\ N_a$; $N_a = 8/6 = 1'\widehat{3}\ t$;

$N_b = 0'\widehat{6}\ t$

Las reacciones en coordenadas locales valen:

$$(2) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1'\widehat{3} \\ -0'\widehat{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0'\widehat{6} \\ 0'\widehat{4} \\ -0'\widehat{6} \end{bmatrix}$$

La barra (a) repetimos que coincide con coordenadas globales; no así la -(b); la matriz de transformación, puesto que (b) forma 270º con la global, es:

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} T^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos las matrices de las barras:

$$(K'_{22})_a = (K_{22})_a = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 384 & -960 \\ 0 & -960 & 3200 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

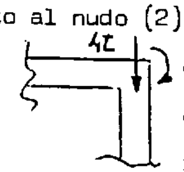
$$(K^{1}_{11})_b = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & +6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 \\ 0 & 222'\widehat{2} & 666'\widehat{6} \\ 0 & 666'\widehat{6} & 2666\widehat{6} \end{bmatrix} \quad ; \quad K = T\,k'\,T^T \;;$$

$$(K_{11})_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 \\ 0 & 222'\widehat{2} & 666'\widehat{6} \\ 0 & 666'\widehat{6} & 2666'\widehat{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 222'\widehat{2} & 0 & 666'\widehat{6} \\ 0 & 50000 & 0 \\ 666'\widehat{6} & 0 & 2666'\widehat{6} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

En cuanto al nudo (2), además de las reacciones antes calculadas, existen las



4 m T; y las reacciones de la barra (a) y del nudo coinciden con globales, pero las relativas a la barra (b) se han de pasar a globales:

$$\mathbf{P} = T\,\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1'\widehat{3} \\ -0'\widehat{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0'\widehat{4} \\ -1'\widehat{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual el vector de cargas total del nudo (2) en coordenadas globales queda:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 4'1\widehat{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0'\widehat{4} \\ -1'\widehat{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0'\widehat{4} \\ -10'\widehat{3} \\ 0'1\widehat{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1) de la primera página, con los datos (2), (3) y (4) de las siguientes páginas resulta:

$$\begin{bmatrix} -0'\widehat{4} \\ -10'\widehat{3} \\ -0'1\widehat{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60222'\widehat{2} & 0 & 666'\widehat{6} \\ 0 & 50384 & -960 \\ 666'\widehat{6} & -960 & 5866'\widehat{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -0'\widehat{4} &= 60222'\widehat{2}\,u_2 + + 666'\widehat{6}\,\vartheta_2 \\ -10'\widehat{3} &= \phantom{60222'\widehat{2}\,u_2} + 50384v_2 - 960\,\vartheta_2 \\ 0'1\widehat{6} &= 666'\widehat{6}\,u_2 - 960v_2 + 5866'\widehat{6}\,\vartheta_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &[\alpha] \\ &[\beta] \\ &[\gamma] \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{de } [\alpha] \Longrightarrow u_2 = \frac{-0'\widehat{4} - 666'\widehat{6}\,\vartheta_2}{60222'\widehat{2}} \\ &\text{de } [\beta] \Longrightarrow v_2 = \frac{-10'\widehat{3} + 960\,\vartheta_2}{50384} \end{aligned}\right\} \quad \text{llevando a } [\gamma] \text{ queda:}$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2 &= -4'35 \cdot 10^{-6} \\ u_2 &= -7'33 \cdot 10^{-6} \\ v_2 &= -2'05 \cdot 10^{-4} \end{aligned}\right\} \qquad \delta_2 = \begin{bmatrix} -7'33.10^{-6} \\ -2'05.10^{-4} \\ -4'35.10^{-6} \end{bmatrix}$$

Como la barra (a) está en globales ≡ locales, se puede calcular directamente:

$$\begin{bmatrix} N_{1a} \\ V_{1a} \\ M_{1a} \\ \hdashline N_{2a} \\ V_{2a} \\ M_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4'1\widehat{6} \\ \hdashline 0 \\ 5 \\ -4'1\widehat{6} \end{bmatrix} +$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 & 0 \\ 0 & 384 & 960 & 0 & -384 & 960 \\ 0 & 960 & 3200 & 0 & -960 & 1600 \\ \hdashline -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & -960 & 0 & 384 & -960 \\ 0 & 960 & 1600 & 0 & -960 & 3200 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline -7'33.10^{-6} \\ -2'05.10^{-4} \\ -4'35.10^{-6} \end{bmatrix}$$

$N_1 = 0 + (-60000)\ (-7'33.10^{-6}) = 0'440\ T = N_1$ (Ha del método castigliano)

$V_1 = 5 + (-3'84)\ (-2'05.10^{-4}) + (960)\ (-4'35.10^{-6}) = 5'075\ T = V_1$ (Va del método C.)

$M_1 = 4'1\widehat{6} + (-960)\ (-2'05 . 10^{-4}) + (1600)\ (-4'35 . 10^{-6}) = 4'357 \text{ mT} = M_1$

(M_a del método C.)

$N_{2a} = -440 \text{ T}\ ,\quad V_{2a} = 4'93 \text{ T}\ ;\quad M_{2a} = -3'98 \text{ mT}$

En la barra (b) los desplazamientos δ_2 hay que pasarlos a locales:

$$\delta' = T^T\ \delta \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7'33 . 10^{-6} \\ -2'05 . 10^{-4} \\ -4'35 . 10^{-6} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2'05 . 10^{-4} \\ -7'33 . 10^{-6} \\ -4'35 . 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1b} \\ V_{1b} \\ M_{1b} \\ \hdashline N_{2b} \\ V_{2b} \\ M_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1'\widehat{3} \\ 0'\widehat{4} \\ 0 \\ \hdashline -0'\widehat{6} \\ -0'\widehat{4} \\ 0'\widehat{6} \end{bmatrix} +$$

$$
+\left[\begin{array}{ccc|ccc}
50000 & 0 & 0 & -50000 & 0 & 0 \\
0 & 222'\hat{2} & 666'\hat{6} & 0 & -222'\hat{2} & 666'\hat{6} \\
0 & 666'\hat{6} & 2666'\hat{6} & 0 & -666'\hat{6} & 1333'\hat{3} \\
\hline
-50000 & 0 & 0 & 50000 & 0 & 0 \\
0 & -222'\hat{2} & -666'\hat{6} & 0 & 222'\hat{2} & -666'\hat{6} \\
0 & 666'\hat{6} & 1333'\hat{3} & 0 & -666'\hat{6} & 2666'\hat{6}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
+2'05.10^{-4} \\
-7'33.10^{-6} \\
-4'35.10^{-6} \\
\hline
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]
$$

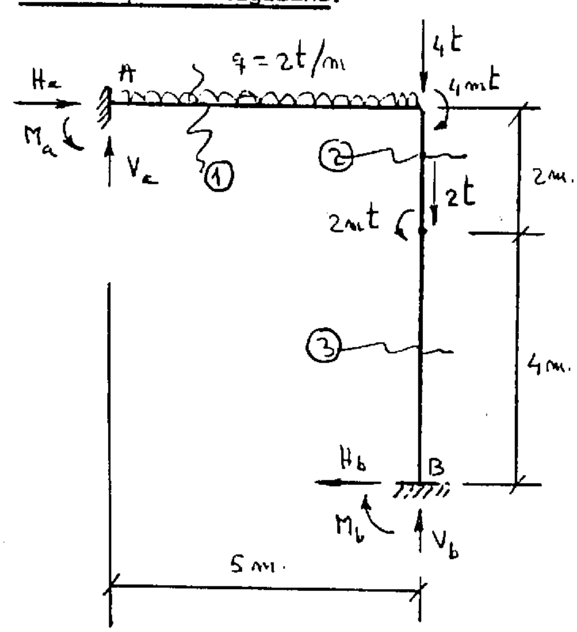
Y resolviendo como antes, $N_{2b} = -10'917$ T (V_b del método C.)

$V_{2b} = -0'440$ T (H_b " " ")

$M_{2b} = 0'656$ T (M_b " " ")

$N_{1b} = 8'92$ T ; $V_{1b} = 0'440$ T , $M_{1b} = -0'016$ m T

Cálculo por castigliano:



(1) $H_a = H_b$

(2) $V_a + V_b = 16$

(3) $M_A = 0$; $M_b + 6\,H_b - 5\,V_b -$

$- M_a + 57 = 0$

(3') eliminando V_b $\Longrightarrow$

$M_b + 6H_a + 5\,V_a - M_a - 23 = 0$

Suponemos en (3') $\Longrightarrow$ $M_a =$

$= f\,(V_a\,,\,H_a)$

$$M_{x_1} = M_a - V_a x + x^2$$

$$M_{x_2} = M_a - 5V_a - H_a x + \overbrace{25 - 4}^{21}$$

$$M_{x_3} = M_a - 5V_a - H_a x + \underbrace{25 - 4 + 2}_{23}$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_a} = 1 = \frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_a} = \frac{\partial M_{x_3}}{\partial M_a} \; ; \quad \text{de } (3') \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 - \dfrac{\partial M_a}{\partial V_a} = 0 \, , \; \dfrac{\partial M_a}{\partial V_a} = 5 \\ \\ 6 - \dfrac{\partial M_a}{\partial H_a} = 0 \, , \; \dfrac{\partial M_a}{\partial H_a} = 6 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial V_a} = -x + \frac{\partial M_a}{\partial V_a} = -x + 5 \; ; \quad \frac{\partial M_{x_2}}{\partial V_a} = \frac{\partial M_{x_3}}{\partial V_a} = -5 +$$

$$+ \frac{\partial M_a}{\partial V_a} = -5 + 5 = 0$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial H_a} = 0 + \frac{\partial M_a}{\partial H_a} = 6 \; ; \quad \frac{\partial M_{x_2}}{\partial H_a} = \frac{\partial M_{x_3}}{\partial H_a} = -x + \frac{\partial M_a}{\partial H_a} = -x + 6$$

Al aplicar ahora Castigliano e igualar a cero, suprimimos en todo $1/EI_z$;

$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = 0 = \int_0^5 (M_a - V_a x + x^2)dx + \int_0^6 (M_a - 5V_a - H_a x)dx + 21\int_0^2 dx + 23\int_2^6 dx = 0$$

Simplificando sale: $\quad 11 M_a - 42'5 V_a - 18 H_a + 175'\hat{6} = 0 \qquad (4)$

$$\frac{\partial U}{\partial V_a} = \int_0^5 (M_a - V_a x + x^2)\,(5 - x)\,dx = 0 \text{ ; simplificando queda:}$$

$$3 M_a - 5 V_a + 12'5 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial H_a} = 6\int_0^5 (M_a - V_a x + x^2)dx + \int_0^2 (M_a - 5\,V_a - H_a x + 21)\ (6-x)dx\ +$$

$$+ \int_2^6 (M_a - 5\,V_a - H_a x + 23)\ (6-x)\ dx = 0;$$

$$30\ M_a - 75\ V_a + 250 + \left[M_a\ \frac{(6-x)^2}{-2} - 5\ V_a\ \frac{(6-x)^2}{-2} + H_a\ \frac{x^3}{3} - 6\ H_a\ \frac{x^2}{2} \right]_0^6 +$$

$$+ 21\ \frac{(6-x)^2}{-2}\Bigg]_0^2 + 23\ \frac{(6-x)^2}{-2}\Bigg]_2^6 = 0$$

Operando y simplificando, resulta $48\ M_a - 165\ V_a - 36\ H_a + 644 = 0$ (6)

Resolviendo el sistema (4), (5) y (6):

$$\left.\begin{aligned} (4) &\Longrightarrow 11\ M_a - 42'5\ V_a - 18\ H_a + 175'\widehat{6} = 0 \\ (6) &\Longrightarrow 48\ M_a - 165\ V_a - 36\ H_a + 644 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_{-}22\ M_a \mp 85\ V_a \mp 36\ H_a \pm 351'\widehat{3} &= 0 \\ 48\ M_a - 165\ V_a - 36\ H_a + 644 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sumando:}$$

$$(5) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 26\ M_a - 80\ V_a + 292'\widehat{6} &= 0 \\ 3\ M_a - 5\ V_a + 12'5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_{-}26\ M_a \mp 80\ V_a \pm 292'\widehat{6} &= 0 \\ 48\ M_a - 80\ V_a + 200'0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$22\ M_a - 92'\widehat{6} = 0 \qquad M_a = 4'212\ \text{m T}$$

de (5) $\Longrightarrow$ $V_a = \dfrac{3M_a + 12'5}{5} = 5'0272\ T = V_a$

$V_b = 16 - V_a = 10'973\ T = V_b$

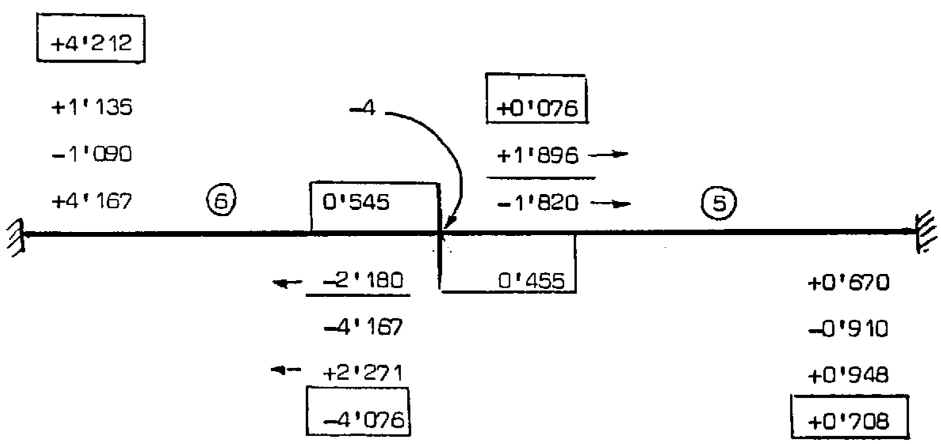
de (4) $\Longrightarrow$ $H_a = \dfrac{11M_a - 42'5V_a + 175'6}{18} = 0'463\ T = H_b$

de (3) $\Longrightarrow$ $M_b = -6\,H_b + 5\,V_b + M_a - 57 = -0'701 = M_b$

Comprobación por Cross:

No tenemos en cuenta las cargas verticales de 4 T y 2 T, que se transmiten al empotramiento inferior.

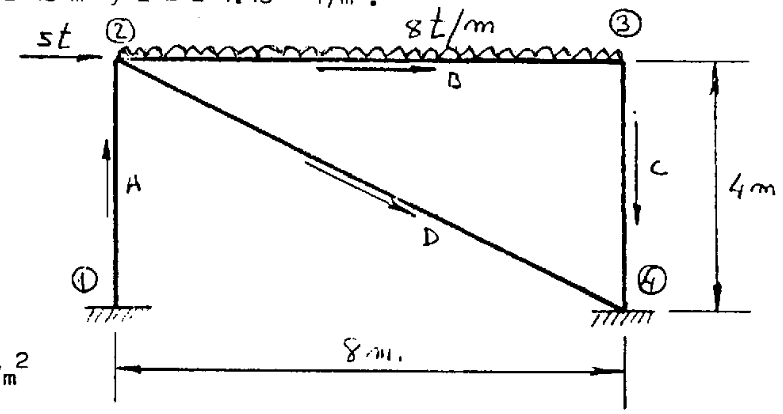
Rigideces proporcionales a 1/5 y 1/6, es decir, a 6 y 5 respectivamente; para el cálculo de los momentos de empotramiento perfecto vale lo hallado en cálculo matricial.



$V_a = \dfrac{2.5}{2} + \dfrac{4'212 - 4'076}{5} = 5'0272\ T = V_a$ $\qquad V_b = 16 - V_a = 10'973\ T = V_b$

$H_a = H_b = \dfrac{0'076 + 0'708 + 2}{6} = 0'464\ T = H_a = H_b$

Resolver matricialmente la estructura de la figura; todas las secciones — son de $A = 0'65.0'40\ m^2$ y $E = 2'1.10^{-6}\ T/m^2$.



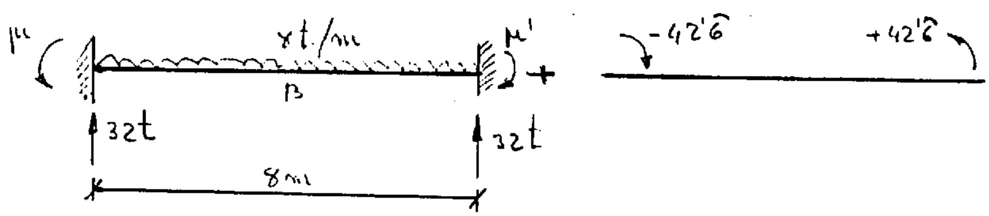
$E = 2'1\ .\ 10^6\ T/m^2$

$A = 0'65\ .\ 0'40\ m^2 = 0'26\ m^2$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0'40.0'65^3}{12} = 9'15\ .\ 10^{-3}\ m^4$$

$EI = 19215\ T\ m^2$

Debido a la barra D, se puede considerar el pórtico como intranslacional y tener en cuenta solamente el cálculo de los momentos, actuando en los nudos (1) y (4) las reacciones verticales 8.8/2 = 32 T y la fuerza de — 5 T exterior estudiarla al final en cortadura y tracción o compresión.



$$\mu = \mu' = \frac{Pl^2}{12} = \frac{8^3}{12} = 42'\widehat{6}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\ 42'\widehat{6} \\ -\ 42'\widehat{6} \end{bmatrix}$$

La matriz completa de la estructura sería:

$$K = \begin{bmatrix} (K_{11})_a & (K_{12})_a & 0 & 0 \\ (K_{21})_a & (K_{22})_a+(K_{11})_b+(K_{11})_d & (K_{12})_b & (K_{12})_d \\ 0 & (K_{21})_b & (K_{22})_b+(K_{11})_c & (K_{12})_c \\ 0 & (K_{21})_d & (K_{21})_c & (K_{22})_c+(K_{22})_d \end{bmatrix}$$

pues no hay δ_1, δ_4, desplazamientos de los nudos empotrados; ni son posibles movimientos 1 de (a) y 2 de (c) y (d)

Pero escribimos mejor la reducida:

$$K = \begin{bmatrix} (K_{22})_a + (K_{11})_b + (K_{11})_d & (K_{12})_b \\ (K_{21})_b & (K_{22})_b + (K_{11})_c \end{bmatrix}$$

Como solamente calculamos momentos, no hay que tener en cuenta transformación de coordenada y calculamos directamente las matrices de cada barra:

$$(K_a) = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$(K_b) = EI \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad (K_c) = EI \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(K_d) = EI \begin{bmatrix} 4/\sqrt{80} & 2/\sqrt{80} \\ 2/\sqrt{80} & 4/\sqrt{80} \end{bmatrix};$$

$$K = EI \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}+\frac{4}{\sqrt{80}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} = 19215 \begin{bmatrix} 1'947 & 0'25 \\ 0'25 & 1'50 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -42'\widehat{6} \\ 42'\widehat{6} \end{bmatrix} = 19215 \begin{bmatrix} 1'947 & 0'25 \\ 0'25 & 1'50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -42'\widehat{6} = 19215 \left[1'947\,\vartheta_2 + 0'25\,\vartheta_3\right] \\ 42'\widehat{6} = 19215 \left[0'25\,\vartheta_2 + 1'50\,\vartheta_3\right] \end{array}\right\}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0'25 \\ 1 & 1'50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1'947 & 0'25 \\ 0'25 & 1'50 \end{vmatrix}} \; \frac{42'\widehat{6}}{19215} = -\,1'36 \,.\, 10^{-3} \text{ radianes}$$

$$\vartheta_3 = 1'71 \,.\, 10^{-3} \text{ radianes}$$

Con lo cual, las fuerzas en cada barra son:

Barra (a)
$$\begin{bmatrix} M_{1a} \\ M_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0'5 \\ 0'5 & 1 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} 0 \\ -1'36.10^{-3} \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} M_{1a} = -13'07 \text{ mT} \\ M_{2a} = -26'13 \text{ mT} \end{matrix}$$

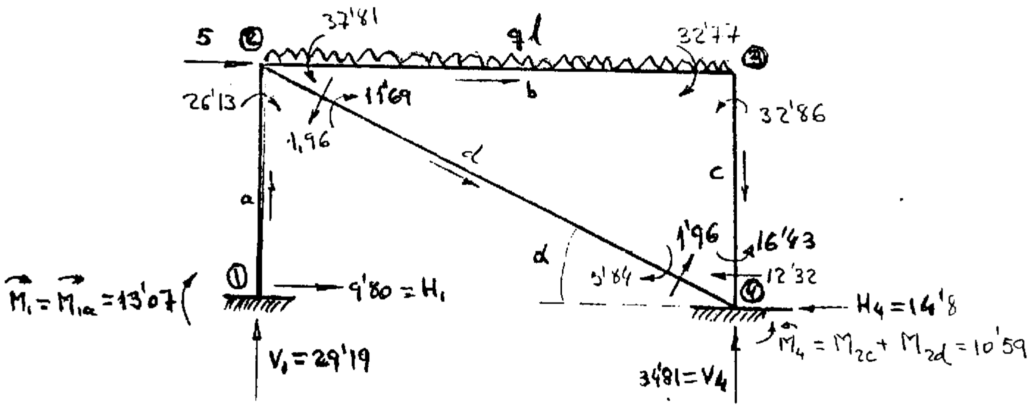
Barra (b)
$$\begin{bmatrix} M_{1b} \\ M_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42'6 \\ -42'6 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0'5 & 0'25 \\ 0'25 & 0'50 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} -1'36.10^{-3} \\ 1'71.10^{-3} \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} M_{1b} = 37'81 \text{ m T} \\ M_{2b} = -32'77 \text{ m T} \end{matrix}$$

Barra (c)
$$\begin{bmatrix} M_{1c} \\ M_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0'5 \\ 0'5 & 1 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} 1'71.10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} M_{1c} = 32'86 \text{ mT} \\ M_{2c} = 16'43 \text{ mT} \end{matrix}$$

Barra (d)
$$\begin{bmatrix} M_{1d} \\ M_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

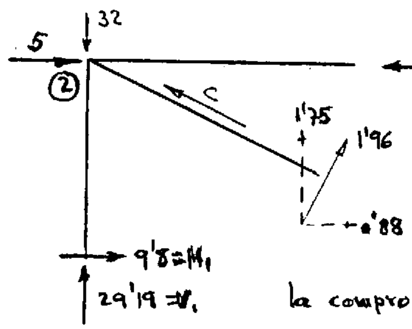
$$+ \begin{bmatrix} 4/\sqrt{80} & 2/\sqrt{80} \\ 2/\sqrt{80} & 4/\sqrt{80} \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} -1'36.10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} M_{1d} = -11'69 \text{ mT} \\ M_{2d} = -5'84 \text{ mT} \end{matrix}$$



$$\overleftarrow{H_1} = -\frac{M_{1a} + M_{2a}}{h} = \overrightarrow{9'8} \qquad \overleftarrow{H_4} = F + H_1 = 14'8$$

$$\Sigma M_{①} = 0 \Longrightarrow -M_1 - F \cdot h - \frac{ql^2}{2} + M_4 + V_4\, l = 0 \ ; \ V_4 \uparrow = 34'81$$

$$\uparrow V_1 = q\,l - V_4 = 29'19$$

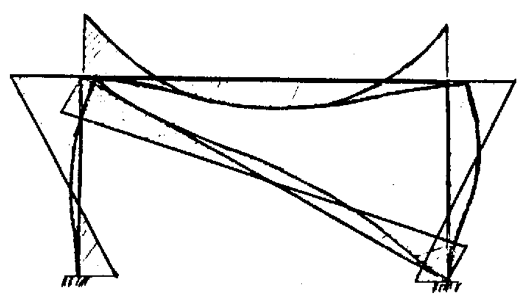


$$12'32 = \frac{M_{1c} + M_{2c}}{h}$$

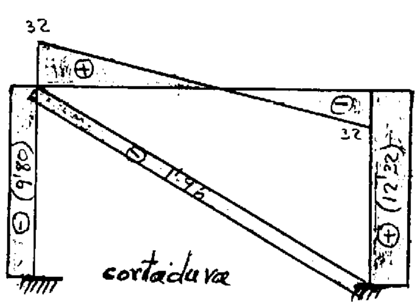
$$5 + 9'8 + 0'88 - 12'32 - C \cos\alpha = 0$$

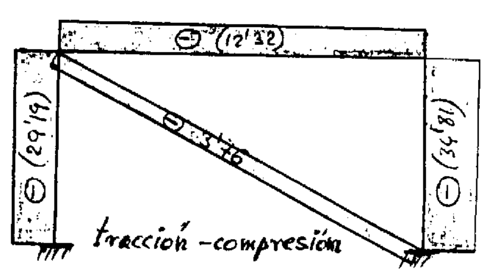
$$C = 3'76$$

la comprobación del nudo ③ es similar



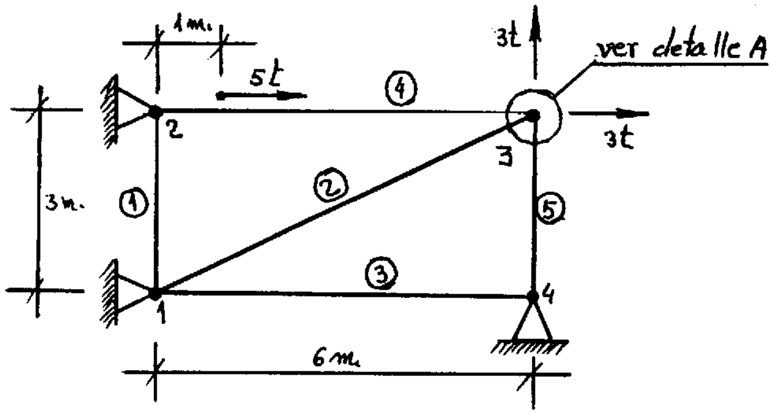
momentos flectores y deformada

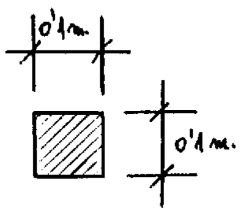


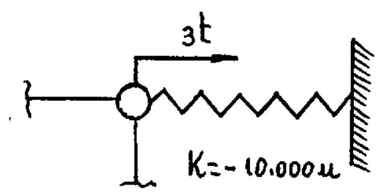


(Escuela Técnica Superior de Arquitectura - Sevilla).

Calcular matricialmente las leyes de esfuerzos de la estructura adjunta. Los nudos 1, 2 y 4 son articulados; el 3 lo es así mismo, pero tiene una conexión elástica según detalle.







$E = 2 \times 10^7$ t/m². $= 2 \times 10^6$ kg/cm^2

sección barras: 10×10 cm^2

Detalle A

muelle que deja libre todos los movimientos v y ø.

Solución:

Al ser de nudos articulados, solo se tendrán en cuenta las coordenadas x - y; se calculan los vectores de cargas en los nudos:

barra 4, nudo 2: $\dfrac{5000}{600}\ 500 = 4166'7$ kg tracción,

$$(P2)4 = \begin{bmatrix} +\ 4166'7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nudo 3: $\dfrac{5000}{600}\ 100 = \ 833'3$ kg compresión:

$$(P3)4 = \begin{bmatrix} +\ 3000'0\ +\ 833'3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz global es:

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & (k22)2\ + & \\ & & +\ (k22)4\ + & \\ & & +\ (k22)5 & \\ \hline & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta 1 = 0 \\ \delta 2 = 0 \\ \delta 3 \\ \delta 4 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k22)2\ +\ (k22)4\ +\ (k22)5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta 3 \end{bmatrix}$$

Al ser una estructura de nudos articulados, para tener en cuenta también cortadura, la matriz local de cada barra sera de la forma:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (E\ A)/\ L & 0 & -\ (E\ A)/\ L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\ (E\ A)/\ L & 0 & (E\ A)/\ L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$k = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \cdot k' \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

barra 4 :
$$\frac{E\ A}{L} = \frac{2.000.000 \times 100}{600} = 333.333'3$$

matriz global:
$$(k22)4 = \begin{bmatrix} 333.333'3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

barra 5 :
$$\frac{E\ A}{L} = \frac{2.000.000 \times 100}{300} = 666.666'7$$

$\alpha = -90°$
$\operatorname{sen}\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$

matriz global:
$$(k22)5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 666.666'7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 666.666'7 \end{bmatrix}$$

barra 2 :
$$\frac{E\ A}{L} = \frac{2.000.000 \times 100}{\sqrt{600^2 + 300^2}} = 298.142'4$$

$\operatorname{tg}\alpha = 3/6$
$\operatorname{sen}\alpha = 0'447$, $\cos\alpha = 0'894$

matriz global:

$$(k22)2 = \begin{bmatrix} 0,894 & 0 \\ 0'447 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 298.142'4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'894 & 0'447 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 238.286'1 & 119.143'1 \\ 119.143'1 & 59.571'6 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, la matriz global, (k22)2 + (k22)4 + (k22)5, queda:

$$\begin{bmatrix} 238.286'1 + 333.333.3 & 119.143'1 + 0 + 0 \\ 119.143'1 + 0 + 0 & 59.571'6 + 0 + 666.666.7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 571.619'4 & 119.143'1 \\ 119.143'1 & 726.238'3 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el resorte tiene una constante K = 10.000 m/t = = 100.000 kg/cm, que se ha de sumar al a11 de la matriz (movimiento u3 del nudo 3); luego:

$$\begin{bmatrix} 3.833'3 \\ 3.000'0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 671.619'4 & 119.143'1 \\ 119.143'1 & 726.238'3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u3 \\ v3 \end{bmatrix}$$

resolviendo, se obtienen los valores:

$$u3 = 5'12 \times 10^{-3} \quad cm.$$

$$v3 = 3'29 \times 10^{-3} \quad cm.$$

Resta calcular las fuerzas en barras; en la barra 4 los movimientos locales son coincidentes con los globales y el vector de cargas de dicha barra, (P2x, P2y,P3x,P3y) es:

$$\left[\begin{array}{c} -4.166'7 \\ 0 \\ \hline -833'3 \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc:cc} 333.333'3 & 0 & -333.333'3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -333.333'3 & 0 & 333.333'3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 5'12 \times 10^{-3} \\ 3'29 \times 10^{-3} \end{array}\right]$$

$(P2x)4 = -\ 5.873'4$ kg (tracción) , $(P2y)4 = 0$

$(P3x)4 = \quad 873'4$ kg (tracción) , $(P3y)4 = 0$

e igual se resuelven las restantes barras; en la barra 2 se han de pasar los movimientos u3 y v3 a locales:

$$\begin{bmatrix} u'3 \\ v'3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u3 & 0 \\ v3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6'05\times10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

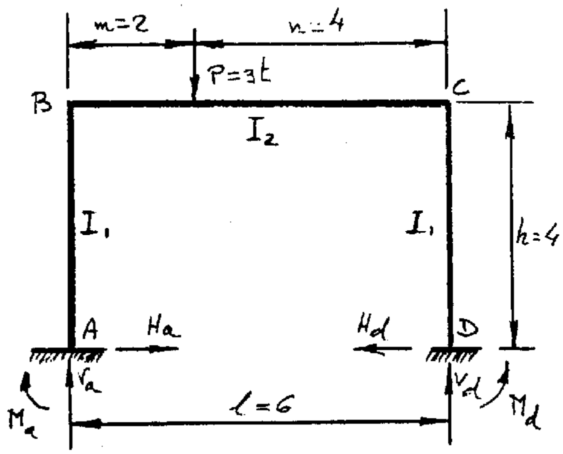
$$\begin{bmatrix} (P1)2 \\ \hline (P3)2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 298.142'4 & 0 & -298.142'4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -298.142'4 & 0 & 298.142'4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 6'05\times10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(P1x)2 = -\ 1.803'1$ kg (tracción) , $(P1y)2 = 0$

$(P3x)2 = +\ 1.803'1$ kg (tracción) , $(P3y)2 = 0$

y el resto se va calculando de forma análoga.

Resolver por métodos matriciales el pórtico de la figura adjunta (Ensidesa, tomo I, pag. 670). (Medidas en metros y carga en toneladas).



$E = 2 \times 10^6\ Kg/cm^2$

$\sigma_t = 1400\ \ Kg/cm^2$

Solución : Las fórmulas de Ensidesa nos permitirán un predimensionamiento y una comprobación final. Tras de varios tanteos adaptamos :

$$\left.\begin{array}{l} \text{- dintel PNI 20, } I_2 = 2140\ cm^4,\ A_2 = 33'5\ cm^2 \\ \text{- pilares PNI 16, } I_1 = 935\ cm^4,\ A_1 = 22'8\ cm^2 \end{array}\right\}\quad k = \frac{hI_2}{lI_1} \simeq 1'526$$

$$W_2 = 214\ cm^3,\ W_1 = 117\ cm^3$$

$$v_a = \frac{Pn}{l}\left[1 + \frac{m(n-m)}{l^2(6k+1)}\right] = \frac{3\times4}{6}\left[1 + \frac{2\times2}{36\underbrace{(6\times1'526+1)}_{10'156}}\right] \simeq 2022\ kg = v_a$$

$$v_d = 3 - v_a = 978\ kg = v_d$$

$$H_a = H_d = \frac{3Pmn}{2lh(k+2)} = \frac{3\times3\times8}{48\times3'526} = 0'425\ t = 425\ kg = H_a = H_d$$

$$M_a = \frac{Pmn}{2l}\left[\frac{1}{k+2} - \frac{n-m}{l(6k+1)}\right] = 0'502 \text{ mt} = M_a$$

$$M_d = \text{"} \quad \text{"} + \text{"} = 0'633 \text{ mt} = M_d$$

$$M_b = -\frac{Pmn}{l}\left[\frac{1}{k+2} + \frac{n-m}{2l(6k+1)}\right] = -1'200 \text{ mt} = M_b$$

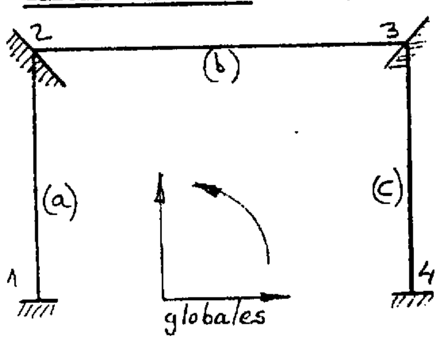
$$M_c = \text{"} \quad \text{"} - \text{"} = -1'069 \text{ mt} = M_c$$

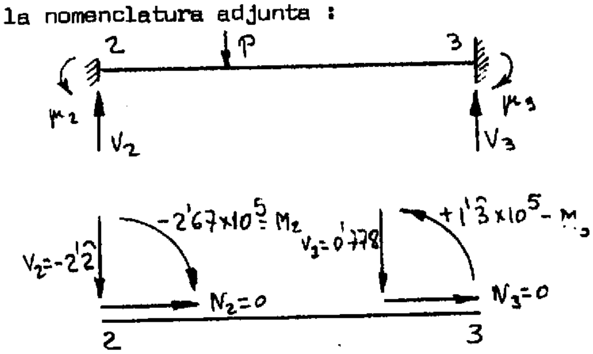
$$M_p = \frac{Pmn}{l} + \frac{nM_b}{l} + \frac{mM_c}{l} = 2'844 \text{ mt} = M_p \;;$$

$$W_{dintel} = \frac{284400 \text{ cmkg}}{1400 \text{ kg/cm}^2} \simeq 203 \text{ cm}^3, \text{ válido}$$

$$W_{pilar} = \frac{120000}{1400} \simeq 86 \text{ cm}^3, \text{ válido}$$

Cálculo matricial.- Adoptamos la nomenclatura adjunta :





$$\mu_2 = \frac{Pab^2}{l^2} = 2'67 \text{ mt} \;; \quad \mu_3 = \frac{Pa^2b}{l^2} = 1'33 \text{ mt} \;; \quad \left[\frac{F_2}{F_3}\right] =$$

$$V_2 = \frac{Pb}{l} + \frac{\mu_2 - \mu_3}{l} = 2222 \text{ kg} \;; \; V_3 = \frac{Pa}{l} - \frac{\mu_2 - \mu_3}{l} = 778 \text{ kg}$$

$$= \left[\begin{array}{c} 0 \\ -2222 \\ -2'67\times10^5 \\ \hline 0 \\ -778 \\ 1'33\times10^5 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{11})_a & (k_{12})_a & 0 & 0 \\ (k_{21})_a & (k_{22})_a + (k_{22})_b & (k_{23})_b & 0 \\ 0 & (k_{32})_b & (k_{33})_b + (k_{33})_c & (k_{34})_c \\ 0 & 0 & (k_{43})_c & (k_{44})_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 = 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{22})_a + (k_{22})_b & (k_{23})_b \\ (k_{32})_b & (k_{33})_b + (k_{33})_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

para el cálculo de las matrices en globales tenemos

(a) $\longrightarrow$ α = 90º

(b) $\longrightarrow$ locales = globales

(c) $\longrightarrow$ α = 270º (-90º)

matriz de cada barra en locales :

$$[\text{MATRIZ}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]$$

vigas (a) y (c) $\longrightarrow$ $\frac{EA}{L} = \frac{2\times10^6\times22'8}{400} = 114.000$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12\times2\times10^6\times935}{400^3} \simeq 351$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6\times2\times10^6\times935}{400^2} = 70.125$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4\times2\times10^6\times935}{400} = 18.700.000$$

$$\frac{2EI}{L} = 9.350.000$$

viga (b) $\longrightarrow$ $\frac{EA}{L} = \frac{2\times10^6\times33'5}{600} = 111.667$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12\times2\times10^6\times2140}{600^3} = 238$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6\times2\times10^6\times2140}{600^2} = 71.333$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4\times2\times10^6\times2140}{600} = 28.533.333$$

$$\frac{2EI}{L} = 14.266.667$$

Cambio de coordenadas en vigas (a) y (c) : $k = L\,k'\,L^t$

$$L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad L^t = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_a = 90^{\circ}\,, \quad \alpha_{(c)} = -90^{\circ}$$

$$L_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad L^t_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ;$$

$$L_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad L^t_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices que vamos a necesitar son :

$$(k_{22})_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114.000 & 0 & 0 \\ 0 & 351 & -70.125 \\ 0 & -70.125 & 18'7\times10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 351 & 0 & 70.125 \\ 0 & 114.000 & 0 \\ 70.125 & 0 & 18'7\times10^6 \end{bmatrix} \; ;$$

$$(k_{22})_b = \begin{bmatrix} 111.667 & 0 & 0 \\ 0 & 238 & +71.333 \\ 0 & +71.333 & 28.533.333 \end{bmatrix} \; ;$$

$$\left.\begin{array}{l}(k_{23})_b\\(k_{32})_b\end{array}\right\} = \begin{bmatrix} -111.667 & 0 & 0 \\ 0 & -238 & \pm 71.333 \\ 0 & \mp 71.333 & 14.266.667 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$(k_{33})_b = \begin{bmatrix} 111.667 & 0 & 0 \\ 0 & 238 & -71.333 \\ 0 & -71.333 & 28.533.333 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$(k_{33})_c = L_c \begin{bmatrix} 114.000 & 0 & 0 \\ 0 & 351 & 70.125 \\ 0 & 70.125 & 18'7\times10^6 \end{bmatrix} \quad L_c^t =$$

$$= \begin{bmatrix} 351 & 0 & 70.125 \\ 0 & 114.000 & 0 \\ 70.125 & 0 & 18'7\times10^6 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{22})_a + (k_{22})_b & (k_{23})_b \\ (k_{32})_b & (k_{33})_b + (k_{33})_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2222 \\ -2'67\times10^5 \\ \hline 0 \\ -778 \\ 1'33\times10^5 \end{bmatrix} =$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
112.018 & 0 & 70.125 & -111.667 & 0 & 0 \\
0 & 114.238 & 71.333 & 0 & -238 & 71.333 \\
70.125 & 71.333 & 47'2\times10^{6} & 0 & -71.333 & 14'3\times10^{6} \\
\hline
-111.667 & 0 & 0 & 112.018 & 0 & 70.125 \\
0 & -238 & -71.333 & 0 & 114.238 & -71.333 \\
0 & 71.333 & 14'3\times10^{6} & 0 & -71.333 & 47'2\times10^{6}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \\ \hline u_3 \\ v_3 \\ \vartheta_3
\end{array}\right] \quad ;
$$

resolviendo :

$$
\left.\begin{array}{rll}
0 = & 112.018\,u_2 + \qquad\qquad + 70.125\,\vartheta_2 & \\
 & -111.667\,u_3 & (1) \\
-2222 = & +114.238\,v_2 + 71.333\,\vartheta_2 & \\
 & -238\,v_3 + 14.266.667\,\vartheta_3 & (2) \\
-2'67\times10^{5} = & 70.125\,u_2 + 71.333\,v_2 + 47.233.333\,\vartheta_2 & \\
 & -71.333\,v_3 + 14.266.667\,\vartheta_3 & (3) \\
0 = & -111.667\,u_2 & \\
 & +112.018\,u_3 + 70.125\,\vartheta_3 & (4) \\
-778 = & -238\,v_2 - 71.333\,\vartheta_2 & \\
 & +114.238\,v_3 - 71.333\,\vartheta_3 & (5) \\
1'33\times10^{5} = & +71.333\,v_2 + 14.266.667\,\vartheta_2 & \\
 & -71.333\,v_3 + 47.233.333\,\vartheta_3 & (6)
\end{array}\right\}
$$

Si se analizan las ecuaciones (3) y (6) y se observan sus coeficientes, – se pueden despreciar en primera aproximación los términos en u_2, v_2 y v_3 :

$$
\left.\begin{array}{l}
-2'67\times10^{5} = 47.233.333\,\vartheta_2 + 14.266.667\,\vartheta_3 \\
1'33\times10^{5} = 14.266.667\,\vartheta_2 + 47.233.333\,\vartheta_3
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
-2'67 = 472'3\,\vartheta_2 + 142'7\,\vartheta_3 \\
1'33 = 142'7\,\vartheta_2 + 472'3\,\vartheta_3
\end{array}
$$

$$\vartheta_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2'67 & 142'7 \\ 1'33 & 472'3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 472'3 & 142'7 \\ 142'7 & 472'3 \end{vmatrix}} = \frac{-1450'83}{202704} \simeq -0'0072 \text{ radianes ;}$$

$$\vartheta_3 = \frac{\begin{vmatrix} 472'3 & -2'67 \\ 142'7 & 1'33 \end{vmatrix}}{202704} \simeq \frac{1009'168}{202704} \simeq 0'005 \quad \text{radianes}$$

sustituyendo ahora en (1) y (4) $\Rightarrow$ $504'9 = 112.018\, u_2 - 111.667\, u_3$

$$-350'6 = -111.667\, u_2 + 112.018\, u_3$$

que, resolviendo, de los resultados : $u_2 = u_3 = 0'22$ cm.; y llevando ya todos estos valores a (2) y (5) queda el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} -2065'07 = 114.238\, v_2 - 238\, v_3 \\ -934'93 = -238\, v_2 + 114.238\, v_3 \end{array}\right\} \text{que da los valores } \begin{array}{l} v_2 = -0'018 \text{ cm.} \\ v_3 = -0'0082 \text{ cm.} \end{array}$$

<u>Cálculo de reacciones finales</u> : para la viga (b), locales $\equiv$ globales :

$$\begin{bmatrix} N_{2b} \\ V_{2b} \\ M_{2b} \\ \hline N_{3b} \\ V_{3b} \\ M_{3b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 111.667 & 0 & 0 & -111.667 & 0 & 0 \\ 0 & 238 & 71.333 & 0 & -238 & 71,333 \\ 0 & 71.333 & 28533333 & 0 & -71.333 & 14266667 \\ \hline -111.667 & 0 & 0 & 111.667 & 0 & 0 \\ 0 & -238 & -71.333 & 0 & 238 & -71.333 \\ 0 & 71.333 & 14266667 & 0 & -71.333 & 28533333 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0'22 \\ -0'018 \\ -0'0072 \\ \hline 0'22 \\ -0'0082 \\ 0'0050 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ 2222 \\ 2'67\times10^{5} \\ \hline 0 \\ 778 \\ -1'33\times10^{5} \end{bmatrix}$$; resolviendo esta ecuación matricial, sale $N_{2b}=N_{3b}=0$;

$V_{2b} = V_B = +\ 2063\ \text{Kg}\uparrow$

$V_{3b} = V_C = \ 937\ \text{Kg}\uparrow$ (se observa que son valores aproximados)

$M_B = M_{2b} = \ 1'32\ \text{mt}$

$M_C = M_{3b} = -\ 0'94\ \text{mt}$.

para el cálculo de las reacciones en los empotramientos hemos de pasar primeramente los desplazamientos δ_2 y δ_3 a locales :

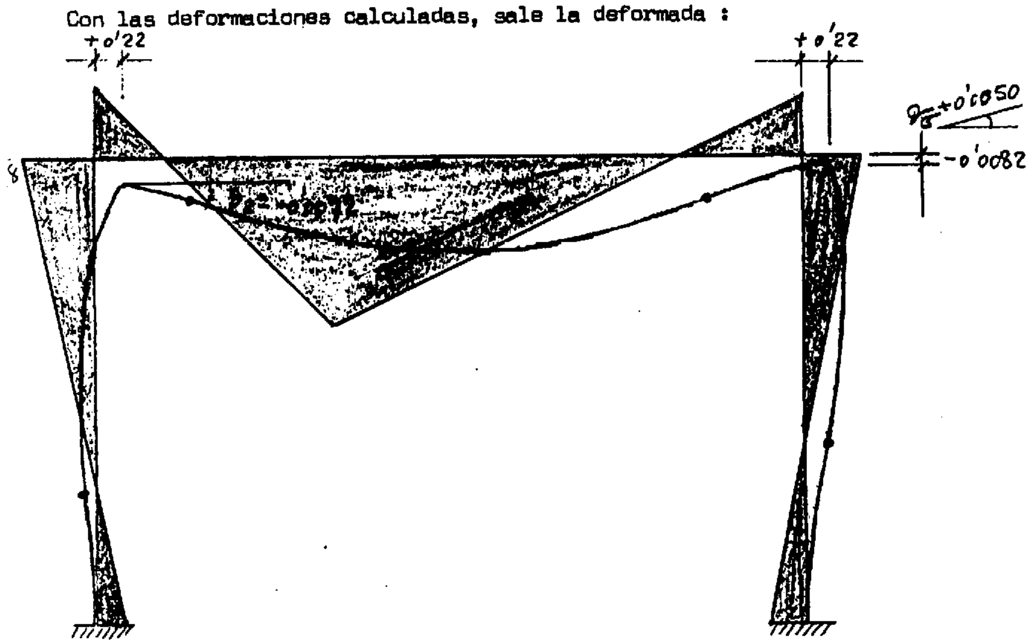
$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ {}'_2 \end{bmatrix} = L^t\delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0'22 \\ -0'018 \\ -0'0072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0'018 \\ -0'22 \\ -0'0072 \end{bmatrix} \quad ; \begin{bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \\ {}'_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0'22 \\ -0'0082 \\ +0'0050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'0082 \\ 0'22 \\ 0'005 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -114.000 & 0 & 0 \\ 0 & -351 & 70.125 \\ 0 & -70.125 & 9'35\times10^{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0'018 \\ -0'22 \\ -0'0072 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} N_1 &= V_A = 2'052\ t\uparrow \\ V_1 &= H_A = -\ 0'428\ t\rightarrow \\ M_1 &= M_A = -\ 0519\ \text{mt} \end{aligned}$$

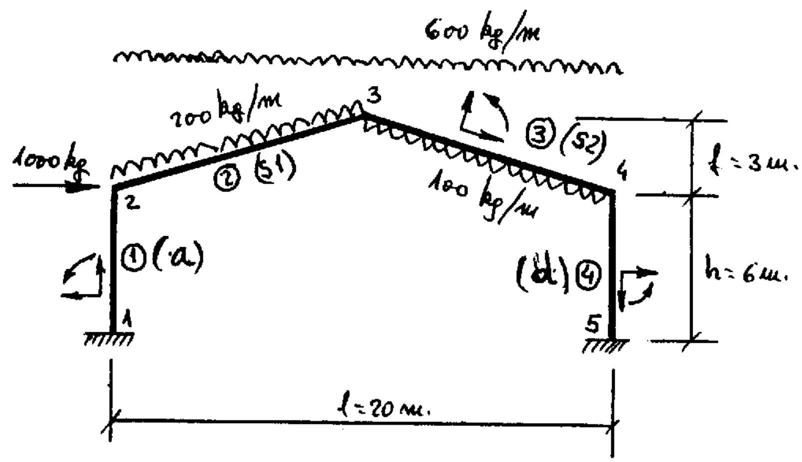
$$\begin{bmatrix} N_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -114.000 & o & o \\ o & -351 & -70.125 \\ o & +70.125 & 9'35\times 10^{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'0082 \\ 0'22 \\ 0'005 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} N_4 = V_D = -0'935 \text{ t} \uparrow \\ V_4 = H_D = -0'428 \text{ t} \leftarrow \\ M_4 = M_D = \quad 0'622 \text{ mt} \end{array}$$

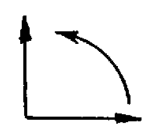
Con las deformaciones calculadas, sale la deformada :



(E.T.S.I.I.-Sevilla)

Resolver matricialmente el pórtico de la figura, que se supone predimensionado: pilares HEB 260 ($I = 14.919\ cm^4$, $A = 118,4\ cm^2$), dinteles IPE 330 ($I = 11.770\ cm^4$, $A = 62,6\ cm^2$), $E = 2.100.000\ kg/cm^2$.





Solución:

Primeramente se numeran nudos y barras y se fijan coordenadas locales y globales; las matrices locales serán de 6 x 6, al considerar esfuerzos axiles, cortantes y flectores.

Para la transformación de coordenadas a globales se tendra en cuenta la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} P'x \\ P'y \\ M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ M \end{bmatrix} \qquad P' = L^T \cdot P$$

$$c = \cos\alpha \qquad s = \operatorname{sen}\alpha$$

$$P = K\ \delta \qquad P = L\ P' \qquad \delta = L\ \delta' \qquad K = L\ K'\ L^T$$

Y la matriz general de cada barra, en globales, siguiendo la nomenclatura de Livesley, se escribe:

$$A = c^2 \frac{E\,A}{L} + s^2 \frac{12\,E\,I}{L^3} \quad ; \quad B = s^2 \frac{E\,A}{L} + c^2 \frac{12\,E\,I}{L^3}$$

$$H = \frac{4\,E\,I}{L} \quad ; \quad D = c \cdot s \left(\frac{E\,A}{L} - \frac{12\,E\,I}{L^3} \right)$$

$$E = -\,s \frac{6\,E\,I}{L^2} \quad ; \quad F = c \frac{6\,E\,I}{L^2}$$

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & D & E & -A & -D & E \\ D & B & F & -D & -B & F \\ E & F & H & -E & -F & H/2 \\ \hline -A & -D & -E & A & D & -E \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ E & F & H/2 & -E & -F & H \end{array} \right]$$

La ecuación matricial de la estructura en coordenadas globales, eliminando las condiciones de contorno, es:

$$\begin{bmatrix} P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K22)1 + (K22)2 & (K23)2 & 0 \\ (K32)2 & (K33)2 + (K33)3 & (K34)3 \\ 0 & (K43)3 & (K44)3 + (K44)4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u2 \\ u3 \\ u4 \end{bmatrix}$$

Nota.- Con los datos hasta aquí expuestos, no se realiza paso a paso el cálculo de matrices de barras y su paso a globales, ni la armadura de la matriz global, que se deja como ejercicio al alumno: los resultados, que se han obtenido en programa independiente aparte, se muestran en las páginas siguientes.

	long. (cm.)	area (cm2)	M.I. (cm4)	E (kg/cm2)	AE/L (kg/cm)	12EI/L3 (kg/cm)	6EI/L2 (kg)	4EI/L (cm.kg)	2EI/L (cm.kg)
pilar (a)	600,00	118,40	14.919	2.100.000	414.400	1.740,55	522.165	208.866.000	104.433.000
pilar (d)	600,00	118,40	14.919	2.100.000	414.400	1.740,55	522.165	208.866.000	104.433.000
dintel(s1)	1044,03	62,60	11.770	2.100.000	125.916	260,64	136.057	94.698.369	47.349.185
dintel(s2)	1044,03	62,60	11.770	2.100.000	125.916	260,64	136.057	94.698.369	47.349.185
flecha(f)	300,00	-	-	-	-	-	-	-	-
luz(L)	2000,00	-	-	-	-	-	-	-	-

Matrices de transformacion:

La			Lat			Ld			Ldt		
0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0
1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Ls1			Ls1t			Ls2			Ls2t		
0,96	-0,29	0,00	0,95	0,32	0,00	0,96	0,29	0,00	0,95	0,32	0,00
0,29	0,96	0,00	-0,32	0,95	0,00	-0,29	0,96	0,00	0,32	0,95	0,00
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00

cos s1	sen s1	cos s2	sen s2
0,958	0,287	0,959	-0,29

```
Matrices de barras:

 /                                                  \
 : AE/L     0        0         :-AE/L    0        0     :
 :                             :                        :
 : 0        12EI/L36EI/L2      :0        -12EI/L36EI/L2 :
 :                             :                        :
 : 0        6EI/L2 4EI/L       :0        -6EI/L2 2EI/L  :
 : ----------------------------:------------------------:
 : -AE/L    0        0         :AE/L     0        0     :
 :                             :                        :
 : 0        -12EI/L-6EI/L2     :0        12EI/L3 -6EI/L2 :
 :                             :                        :
 : 0        6EI/L   2EI/L      :0        -6EI/L2 4EI/L  :
 \                                                  /
```

```
Matrices de barras:

1).-Barra a (local)                  1).-Barra a (global,k=La.k'.Lat)

   414400      0          0                1741       0    -522165
        0   1741     522165                   0  414400          0
        0 522165  208866000             -522165       0  208866000

2).-Barra s1 (local)                 2).-Barra s1 (global,k=Ls1.k'.Ls1t)

   125916      0          0              115541   34584     -39096
        0    261     136057               34584   10636     130319
        0 136057   94698369              -39096  130319   94698369

3).-Barra s2 (local)                 3).-Barra s2 (global,k=Ls2.k'.Ls2t)

   125916      0          0              115541  -34584      39096
        0    261     136057               34584   10636     130319
        0 136057   94698369               39096  130319   94698369

4).-Barra d (local)                  4).-Barra d (global,k=Ld.k'.Ldt)

   414400      0          0                1741       0     522165
        0   1741     522165                   0  414400          0
        0 522165  208866000              522165       0  208866000
```

1).-Barra a (local)

```
 414400       0          0 :-414400       0          0
      0    1741     522165 :      0   -1741     522165
      0  522165  208866000 :      0 -522165  104433000
-------------------------------------------------------
-414400       0          0 : 414400       0          0
      0   -1741    -522165 :      0    1741    -522165
      0  522165  104433000 :      0 -522165  208866000
```

1).-Barra a (global,k=La.k'.Lat)

```
   1741       0    -522165 :  -1741       0    -522165
      0  414400          0 :      0 -414400          0
-522165       0  208866000 : 522165       0  104433000
-------------------------------------------------------
  -1741       0     522165 :   1741       0     522165
      0 -414400          0 :      0  414400          0
-522165       0  104433000 : 522165       0  208866000
```

2).-Barra s1 (local)

```
 125916       0          0 :-125916       0          0
      0     261     136057 :      0    -261     136057
      0  136057   94698369 :      0 -136057   47349185
-------------------------------------------------------
-125916       0          0 : 125916       0          0
      0    -261    -136057 :      0     261    -136057
      0  136057   47349185 :      0 -136057   94698369
```

2).-Barra s1 (global,k=Ls1.k'.Ls1t)

```
 115541   34584     -39096 :-115541  -34584     -39096
  34584   10636     130319 : -34584  -10636     130319
 -39096  130319   94698369 :  39096 -130319   47349185
-------------------------------------------------------
-115541  -34584      39096 : 115541   34584      39096
 -34584  -10636    -130319 :  34584   10636    -130319
 -39096  130319   47349185 :  39096 -130319   94698369
```

2).-Barra s2 (local)

```
 125916       0          0 :-125916       0          0
      0     261     136057 :      0    -261     136057
      0  136057   94698369 :      0 -136057   47349185
-------------------------------------------------------
-125916       0          0 : 125916       0          0
      0    -261    -136057 :      0     261    -136057
      0  136057   47349185 :      0 -136057   94698369
```

2).-Barra s2 (global,k=Ls2.k'.Ls2t)

```
 115541  -34584      39096 : 115541   34584      39096
 -34584   10636     130319 :  34584  -10636     130319
  39096  130319   94698369 : -39096 -130319   47349185
-------------------------------------------------------
-115541   34584     -39096 : 115541  -34584     -39096
  34584  -10636    -130319 : -34584   10636    -130319
  39096  130319   47349185 : -39096 -130319   94698369
```

1).-Barra d (local)

```
 414400       0          0 :-414400       0          0
      0    1741     522165 :      0   -1741     522165
      0  522165  208866000 :      0 -522165  104433000
-------------------------------------------------------
-414400       0          0 : 414400       0          0
      0   -1741    -522165 :      0    1741    -522165
      0  522165  104433000 :      0 -522165  208866000
```

1).-Barra d (global,k=Ld.k'.Ldt)

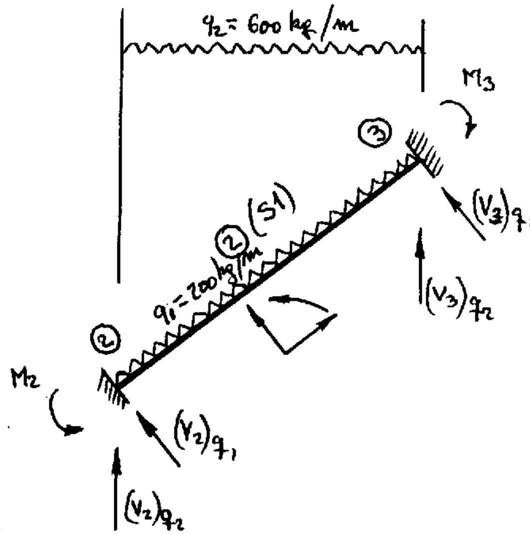
```
   1741       0     522165 :  -1741       0     522165
      0  414400          0 :      0 -414400          0
 522165       0  208866000 :-522165       0  104433000
-------------------------------------------------------
  -1741       0    -522165 :   1741       0    -522165
      0 -414400          0 :      0  414400          0
 522165       0  104433000 :-522165       0  208866000
```

117281	34584	483069	-115541	-34584	-39096	0	0	0
34584	425036	130319	-34584	-10636	130319	0	0	0
483069	130319	3,04E+08	39096	-130319	4,73E+07	0	0	0
-115541	-34584	39096	231091	0	73191	-115541	34584	39096
-34584	-10636	-130319	0	21272	0	34584	-10636	130319
-39096	130319	4,73E+07	78191	0	1,39E+08	-39096	-130319	4,73E+07
0	0	0	-115541	34584	-39096	117281	-34584	483069
0	0	0	34584	10636	-130319	-34584	425036	-130319
0	0	0	39096	130319	4,73E+07	483069	-130319	3,04E+08

Se va ya a calcular el vector de cargas, que estará formado por:

$$\vec{P} = \vec{P}_{nudos} + \Sigma\, \vec{P}_{emptr.}$$

a) barra 2 (s1)



$$\overset{\curvearrowleft}{M2} = \Sigma\, \frac{p\, l^2}{12} =$$

$$= \frac{200 \times 10'44 \times 1044}{12} +$$

$$+ \frac{600 \times 10 \times 1000}{12} -$$

$$= 681.656 \text{ cmkg}$$

$\overset{\curvearrowright}{M3}$ del mismo valor absoluto

$$\uparrow (V2)q2 = \uparrow (V3)q2 = \frac{600 \times 10}{2} = 3.000 \text{ kg}$$

$$\nwarrow (V2)q1 = \nwarrow (V3)q1 = \frac{200 \times 10'44}{2} = 1.044 \text{ kg}$$

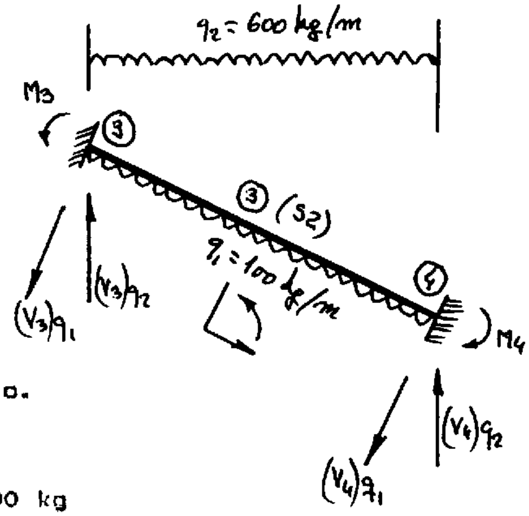
$$P_{emp}^{②} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.000 \\ 681.656 \\ \hline 0 \\ 3.000 \\ -681.656 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c} L^{②} & L^{②} \\ \hline L^{②} & L^{②} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.044 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1.044 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ 4.000 \\ 681.656 \\ \hline -300 \\ 4.000 \\ -681.656 \end{bmatrix}$$

siendo senα = 3 / 10'44 = 0'287 ; cosα = 0'958 ; y $L^{②}$ la matriz de la barra 2, que se toma de trasponer la correspondiente indicada en la página 190. Además, no se ha de olvidar que existe en el nudo 2 la fuerza de 2.0000 kg.

b) barra 3 (s2)

$$\overset{\frown}{M3} = \frac{600 \times 10 \times 1000}{12} - \frac{100 \times 10'44 \times 1044}{12} =$$

$$= 409.172 \text{ cmkg}$$



$\overset{\frown}{M4}$ del mismo valor absoluto.

$$\uparrow (V3)q2 = \uparrow (V4)q2 = 3.000 \text{ kg}$$

$$\swarrow (V3)q1 = \swarrow (V4)q1 = \frac{100 \times 10'44}{2} = 522 \text{ kg}$$

$$P^{3}_{emp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.000 \\ 409.172 \\ \hline 0 \\ 3.000 \\ -409.172 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c} \overset{3}{L} & \overset{3}{L} \\ \hline \overset{3}{L} & \overset{3}{L} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ -522 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -522 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 2.500 \\ 409.172 \\ \hline -150 \\ 2.500 \\ -409.172 \end{bmatrix}$$

siendo ahora $sen\alpha = -0'287$; $cos\alpha = 0'958$.

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R1 \\ F2 \\ 0 \\ 0 \\ R5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ P_{2\ emp} \\ P_{3\ emp} \\ P_{4\ emp} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad R1 = \begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ M\ 1 \end{bmatrix} ; \quad R5 = \begin{bmatrix} Rx5 \\ Ry5 \\ M\ 5 \end{bmatrix}$$

$$F2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$P_{2\ emp} = \begin{bmatrix} -\ 300 \\ 4.000 \\ 681.656 \end{bmatrix} ; \quad P_{3\ emp} = \begin{bmatrix} -\ 450 \\ 6.500 \\ -\ 272.484 \end{bmatrix}$$

$$; \quad P_{4\ emp} = \begin{bmatrix} -\ 150 \\ 2.500 \\ -\ 409.172 \end{bmatrix}$$

La resolución del sistema matricial siguiente se ha realizado por ordenador; a su derecha se indican las soluciones encontradas:

$$\begin{bmatrix} 1.300 \\ -\ 4.000 \\ -\ 681.656 \\ \hline 450 \\ -\ 6.500 \\ 272.484 \\ \hline 150 \\ -\ 2.500 \\ 409.172 \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} u2 \\ v2 \\ \theta 2 \\ \hline u3 \\ v3 \\ \theta 3 \\ \hline u4 \\ v4 \\ \theta 4 \end{bmatrix}$$

u2 = − 0'308273 cm.

v2 = − 0'017143 cm.

θ2 = − 0'005493 rad.

---

u3 = 1'737542 cm.

v3 = − 6'937104 cm.

θ3 = 0'003424 rad.

---

u4 = 3'779988 cm.

v4 = − 0'014227 cm.

θ4 = − 0'002444 rad.

Se pasa a calcular las reacciones de empotramiento en los nudos 1 y 5:

$$[P1] = (K12)1 \cdot [u2] \qquad ; \qquad [P5] = (K54)4 \cdot [u4]$$

en que (K12)1 y (K54)4 resultan idénticas

$$\begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ M\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.741 & 0 & -522.165 \\ 0 & -414.400 & 0 \\ 522.165 & 0 & 104.433.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0'308273 \\ -0'017143 \\ -0'005493 \end{bmatrix}$$

$$Rx1 = 3.405 \text{ kg}$$
$$Ry1 = 7.104 \text{ kg}$$
$$M\ 1 = -7.346 \text{ mkg}$$

$$\begin{bmatrix} Rx5 \\ Ry5 \\ M\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.741 & 0 & -522.165 \\ 0 & -414.400 & 0 \\ 522.165 & 0 & 104.433.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3'779988 \\ -0'014227 \\ -0'002444 \end{bmatrix}$$

$$Rx5 = -5.305 \text{ kg}$$
$$Ry5 = 5.896 \text{ kg}$$
$$M\ 5 = 17.185 \text{ mkg}$$

Para calcular los esfuerzos en los extremos de cada barra (que se deben hallar en coordenadas locales) solo se indica el procedimiento y los resultados finales, dejando al alumno su comprobación como ejercicio; lógicamente, los valores de empotramiento solo entrarán en las barras 2 (s1) y 3 (s2):

$$P' = L^T \cdot P + P'_{emp} = L^T \cdot K \cdot \delta + P'_{emp}$$

$$\begin{bmatrix} P'x1 \\ P'y1 \\ M'\ 1 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 7.104 \\ -3.405 \\ -7.346 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ry1 \\ -Rx1 \\ M\ 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \begin{bmatrix} P'x2 \\ P'y2 \\ M'\ 2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} -7.104 \\ 3.405 \\ -13.083 \end{bmatrix}$$

$$
\textcircled{2}\quad
\begin{bmatrix} P'x2 \\ P'y2 \\ M'\ 2 \\ \hline P'x3 \\ P'y3 \\ M'\ 3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 6.257 \\ 5.541 \\ 13.083 \\ \hline -\ 4.537 \\ 2.295 \\ 3.841 \end{bmatrix}
\quad ; \quad
\textcircled{3}\quad
\begin{bmatrix} P'x3 \\ P'y3 \\ M'\ 3 \\ \hline P'x4 \\ P'y4 \\ M'\ 4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5.052 \\ 578 \\ -\ 3.841 \\ \hline -\ 6.744 \\ 4.126 \\ -\ 14.633 \end{bmatrix}
$$

$$
\textcircled{1}\quad
\begin{bmatrix} P'x1 \\ P'y1 \\ M'\ 1 \\ \hline P'x5 \\ P'y5 \\ M'\ 5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5.896 \\ 5.305 \\ 14.633 \\ \hline -\ 5.305 \\ -\ 5.896 \\ 17.185 \end{bmatrix}
$$

Con estos valores se confeccionan ya los correspondientes diagramas de esfuerzos, que aparecen a continuación; no hay que olvidar la suma de los diagramas de las barras biempotradas 1 (s1) y 2 (s2) (hiperestáticos); la deformada se ha dibujado teniendo en cuenta los valores de los movimientos calculados (evidentemente, no a escala) y el diagrama de flectores.

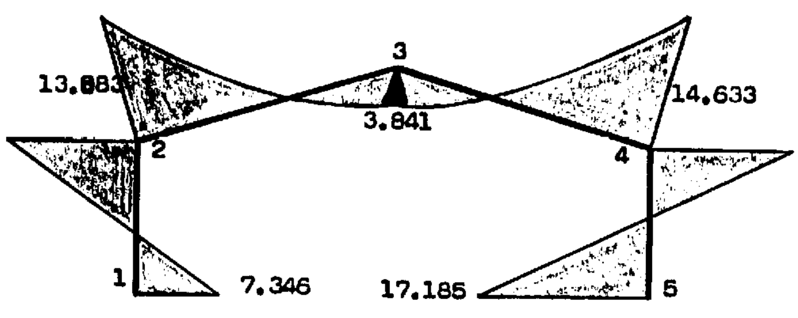
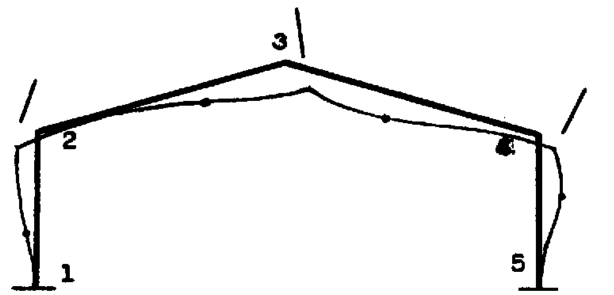


diagrama de momentos flectores



deformada

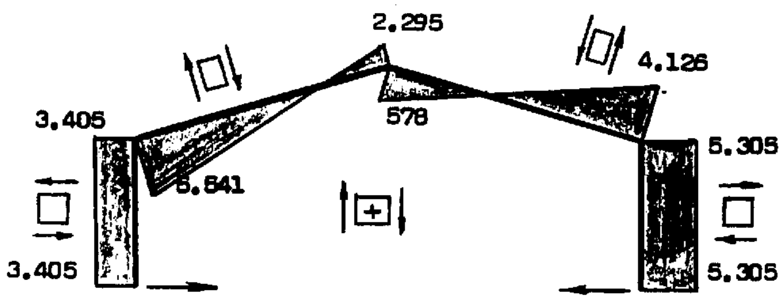


diagrama de esfuerzos cortantes

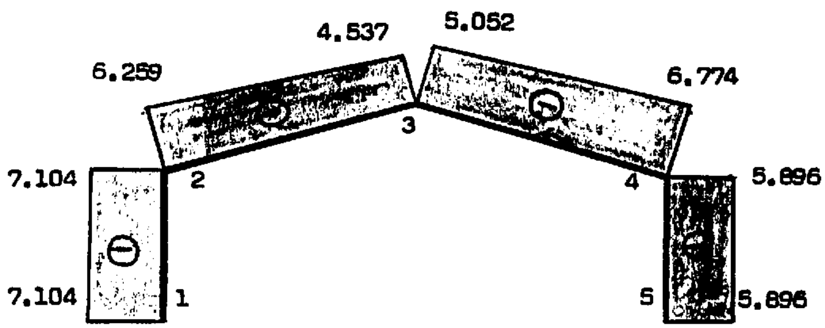
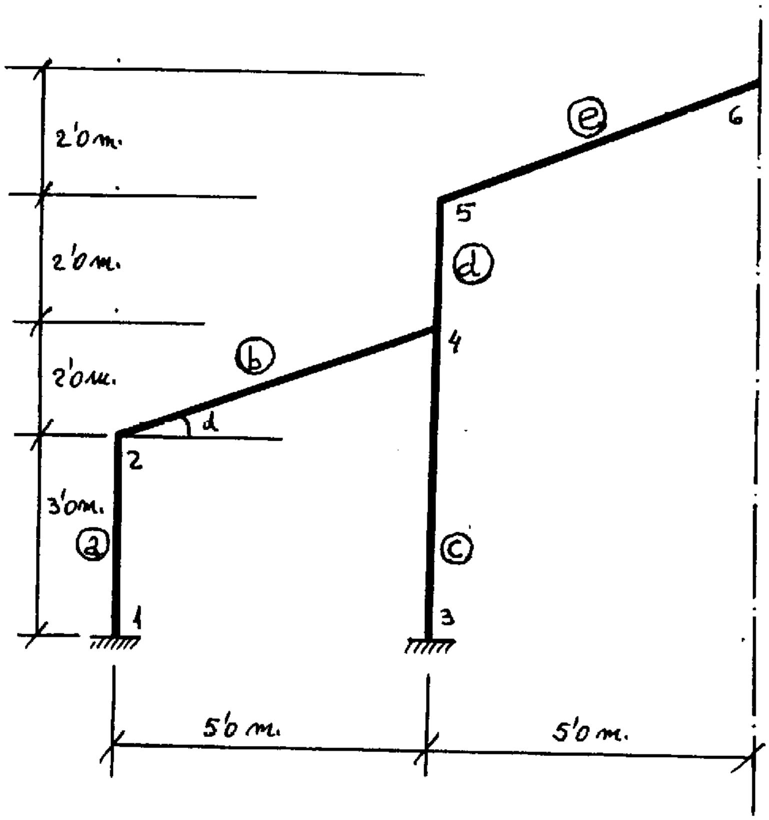


diagrama de esfuerzos axiles

(Cálculo de Estructuras Reticulares, Fdez.Casado, pág.282).

Resolver matricialmente la estructura de basílica de la figura, sometida a sobrecarga total de 450 kg/m.



Nota previa.- Se adoptan, tras un estudio de predimensionamiento, perfiles metálicos UPN 80, dispuestos en cajón, con separación variable, de manera a obtener los momentos de inercia que se indican más abajo y con sección constante de 22 cm²; dichos momentos de inercia se han calculado por Steiner.

$E = 2.100.000$ kg/cm².; (σ)adm $= 1.600$ kg/cm².

Se ha dibujado solamente la mitad de la estructura por simetría; en la misma figura aparecen la nomenclatura de nudos y barras; el nudo 6, en la simetría citada, tendrá los movimientos $u = 0$; $v \neq 0$; $\theta = 0$.

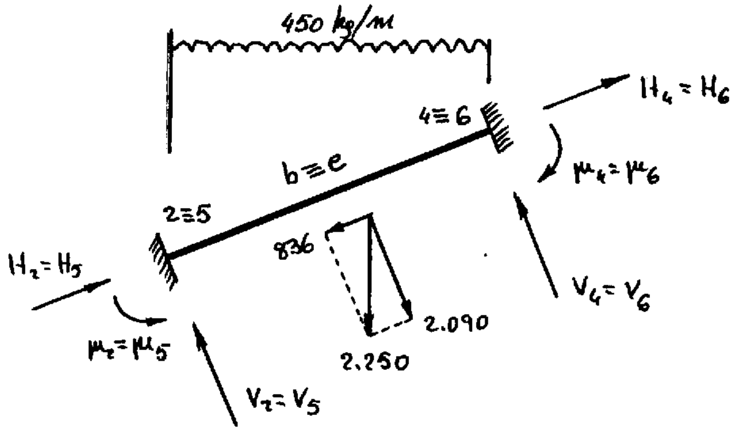
$I_a = 1.935$ cm^4 ; $I_b = 3.470$ cm^4 ; $I_c = 3.225$ cm^4 ;

$I_d = 1.290$ cm^4 ; $I_e = 3.470$ cm^4.

<u>**Solución:**</u>

Cálculo de esfuerzos en barras b y e (idénticos en ambas):

$tg\alpha = 2/5 = 0'4$; $sen\alpha = 0'3714$; $cos\alpha = 0'9285$



$V2 = V5 = 1.045$ kg $= V4 = V6$; $H2 = H5 = H4 = H6 = 418$ kg

$$\mu 2 = \mu 5 = \mu 4 = \mu 6 = \frac{450 \times 5^2}{12} = 93.750 \text{ cm.kg}$$

Con lo cual, y con los signos indicados en la figura superior, y ya cambiados de sentido, los vectores de carga de ambas barras, en locales, son:

$$(P')b = \begin{bmatrix} P'2 \\ \hline P'4 \end{bmatrix}^{(b)} = \begin{bmatrix} -418 \\ -1.045 \\ -93.750 \\ \hline -418 \\ -1.045 \\ 93.750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'5 \\ \hline P'6 \end{bmatrix}^{(e)} = (P')e$$

Para pasar dichos vectores a globales se pueden emplear las ecuaciones de transformación, pero en este caso se pueden escribir directamente, deducidos de la propia figura:

$$(P)b = \begin{bmatrix} P\,2 \\ \hline P\,4 \end{bmatrix}^{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.125 \\ -93.750 \\ \hline 0 \\ -1.125 \\ 93.750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\,5 \\ \hline P\,6 \end{bmatrix}^{e} = (P)e \qquad (\alpha$$

La ecuación matricial global, $P = K \cdot \delta$, como ha ocurrido co problemas anteriores, y por motivos de espacio, no se pued escribir completa; la matriz global está aquí abajo; lo vectores de carga y de desplazamiento van a continuación:

$$\begin{bmatrix} (K11)a & (K12)a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (K21)a & (K22)a + (K22)b & 0 & (K24)b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (K33)c & (K34)c & 0 & 0 \\ 0 & (K42)b & (K43)c & (K44)b + (K44)c + (K44)d & (K45)d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (K54)d & (K55)d + (K55)e & (K56)e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (K65)e & (K66)e \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} R1 \\ P2 \\ R3 \\ P4 \\ P5 \\ R6 \end{bmatrix} \qquad \delta = \begin{bmatrix} \delta 1 = 0 \\ \delta 2 \\ \delta 3 = 0 \\ \delta 4 \\ \delta 5 \\ \delta 6 \end{bmatrix} \qquad \delta 6 = \begin{bmatrix} u6 = 0 \\ v6 \neq 0 \\ \theta 6 = 0 \end{bmatrix}$$

Por simplicidad de cálculo, es lógico que solo interesa calcular las matrices de barras que se van a necesitar en las ecuaciones de movimientos no nulos; los resultados se indican a continuación, con los valores locales y globales:

$$(K22)'a = \begin{bmatrix} 154.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.806 & -270.900 \\ 0 & -270.900 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K22)'b = \begin{bmatrix} 85.874 & 0 & 0 \\ 0 & 562 & 151.055 \\ 0 & 151.055 & 54.178.439 \end{bmatrix} = (K55)'e$$

$$(K24)'b = \begin{bmatrix} -85.874 & 0 & 0 \\ 0 & -562 & 151.055 \\ 0 & -151.055 & 27.089.219 \end{bmatrix} = (K56)'e$$

$$(K42)'b = \begin{bmatrix} -85.874 & 0 & 0 \\ 0 & -562 & -151.055 \\ 0 & 151.055 & 27.089.219 \end{bmatrix} = (K65)'e$$

$$(K44)'b = \begin{bmatrix} 85.874 & 0 & 0 \\ 0 & 562 & 151.055 \\ 0 & -151.055 & 54.178.439 \end{bmatrix} = (K66)'e$$

$$(K44)'c = \begin{bmatrix} 92.400 & 0 & 0 \\ 0 & 650 & -162.540 \\ 0 & -162.540 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K44)'d = \begin{bmatrix} 231.000 & 0 & 0 \\ 0 & 4.064 & 406.350 \\ 0 & 406.350 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K45)'d = \begin{bmatrix} -231.000 & 0 & 0 \\ 0 & -4.064 & 406.350 \\ 0 & -406.350 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K54)'d = \begin{bmatrix} -231.000 & 0 & 0 \\ 0 & -4.064 & -406.350 \\ 0 & 406.350 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K55)'d = \begin{bmatrix} 231.000 & 0 & 0 \\ 0 & 4.064 & -406.350 \\ 0 & -406.350 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

para el paso a globales solamente, $K = L \cdot K' \cdot L^T$, se escriben las matrices de transformación y los resultados finales (que se han obtenido con programa independiente):

$$La = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Lc = Ld$$

$$Lb = \begin{bmatrix} 0'9285 & -0'3714 & 0 \\ 0'3714 & 0'9285 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Le$$

$$(K22)a = \begin{bmatrix} 1.806 & 0 & 270.000 \\ 0 & 154.000 & 0 \\ 270.900 & 0 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K22)b = \begin{bmatrix} 74.111 & 29.420 & -56.102 \\ 29.420 & 12.329 & 140.255 \\ -56.102 & 140.255 & 54.178.439 \end{bmatrix} = (K55)e$$

$$(K24)b = \begin{bmatrix} -74.111 & -29.420 & -56.102 \\ -29.420 & -12.329 & 140.255 \\ 56.102 & -140.255 & 27.089.219 \end{bmatrix} = (K56)e$$

$$(K42)b = \begin{bmatrix} -74.111 & -29.420 & 56.102 \\ -29.420 & -12.329 & -140.255 \\ -56.102 & 140.255 & 27.089.219 \end{bmatrix} = (K65)e$$

$$(K44)b = \begin{bmatrix} 74.111 & 29.420 & 56.102 \\ 29.420 & 154.000 & -140.255 \\ 56.102 & -140.255 & 54.178.439 \end{bmatrix} = (K66)e$$

$$(K33)c = \begin{bmatrix} 650 & 0 & -162.540 \\ 0 & 92.400 & 0 \\ -162.540 & 0 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K34)c = \begin{bmatrix} -650 & 0 & -162.540 \\ 0 & -92.400 & 0 \\ 162.540 & 0 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K43)c = \begin{bmatrix} -650 & 0 & 162.540 \\ 0 & -92.400 & 0 \\ -162.540 & 0 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K44)c = \begin{bmatrix} 650 & 0 & 162.540 \\ 0 & 92.400 & 0 \\ 162.540 & 0 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K44)d = \begin{bmatrix} 4.064 & 0 & -406.350 \\ 0 & 231.000 & 0 \\ -406.350 & 0 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

$$(K45)d = \begin{bmatrix} -4.064 & 0 & -406.350 \\ 0 & -231.000 & 0 \\ 406.350 & 0 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K54)d = \begin{bmatrix} -4.064 & 0 & 406.350 \\ 0 & -231.000 & 0 \\ -406.350 & 0 & 27.090.000 \end{bmatrix}$$

$$(K55)d = \begin{bmatrix} 4.064 & 0 & 406.350 \\ 0 & 231.000 & 0 \\ 406.350 & 0 & 54.180.000 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones y sus soluciones (calculadas mediante programa independiente) se muestran a continuación; nuevamente, y por motivos de escritura, se escribe el sistema matricial separado, y aun la matriz K de una forma especial y condensada, solapando columnas; para el vector de cargas, véase la fórmula (α) de la pág. 204:

$$[P] = [K]\cdot[\delta] = \left[\begin{array}{c} N2 \\ V2 \\ M2 \\ \hline N4 \\ V4 \\ M4 \\ \hline N5 \\ V5 \\ M5 \\ \hline V6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\ 1.125 \\ -\ 93.750 \\ \hline 0 \\ -\ 1.125 \\ 93.750 \\ \hline 0 \\ -\ 1.125 \\ -\ 93.750 \\ \hline -\ 1.125 \end{array}\right] = K\cdot\left[\begin{array}{c} u2 \\ v2 \\ \theta 2 \\ \hline u4 \\ v4 \\ \theta 4 \\ \hline u5 \\ v5 \\ \theta 5 \\ \hline v6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}
75.917 & 29.420 & 214.798 & -\ 74.111 & -\ 29.420 \\
-\ 56.102 & 0 & 0 & 0 & 0 \\[1em]
29.420 & 166.329 & 140.255 & -\ 29.420 & -\ 12.329 \\
140.255 & 0 & 0 & 0 & 0 \\[1em]
214.798 & 140.255 & 108.358.439 & 56.102 & -\ 140.255 \\
27.089.219 & 0 & 0 & 0 & 0 \\[1em]
-\ 74.111 & -\ 29.420 & 56.102 & 78.825 & 29.420 \\
-\ 187.708 & -\ 4.064 & 0 & -\ 406.350 & 0 \\[1em]
-\ 29.420 & -\ 12.329 & -\ 140.255 & 29.420 & 335.729 \\
-\ 140.255 & 0 & -\ 231.000 & 0 & 0 \\[1em]
-\ 56.102 & 140.255 & 27.089.219 & -\ 187.708 & -\ 140.255 \\
162.538.439 & 406.350 & 0 & 27.090.000 & 0 \\[1em]
0 & 0 & 0 & -\ 4.064 & 0 \\
406.350 & 78.175 & 29.420 & 350.248 & -\ 29.420 \\[1em]
0 & 0 & 0 & 0 & -\ 231.000 \\
0 & 29.420 & 243.329 & 140.255 & -\ 12.329 \\[1em]
0 & 0 & 0 & -\ 406.350 & 0 \\
27.090.000 & 350.248 & 140.255 & 108.358.439 & -\ 140.255 \\[1em]
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\ 29.420 & -\ 12.329 & -\ 140.255 & 12.329
\end{array}\right]$$

u_2 = − 0'6992895 cm. u_4 = − 0'7111029 cm.

v_2 = − 0'0136949 cm. v_4 = − 0'0296281 cm.

θ_2 = 0'0002274 rad. θ_4 = 0'0023009 rad.

u_5 = − 0'8346238 cm.

v_5 = − 0'0401187 cm. v_6 = − 2'1783830 cm.

θ_5 = − 0'0042395 rad.

se pasan dichos movimientos (de nudos) a locales de cada extremo de barra, (y se dan los resultados) mediante la fórmula:

$$\delta' = L^{T} \cdot \delta$$

$$\delta'a = \begin{bmatrix} \delta'1a \\ \hline \delta'2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\ 0'013695 \\ 0'699290 \\ 0'000227 \end{bmatrix} ; \quad \delta'b = \begin{bmatrix} \delta'2b \\ \hline \delta'4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 0'654377 \\ 0'247000 \\ 0'000227 \\ \hline -\ 0'671263 \\ 0'236594 \\ 0'002300 \end{bmatrix}$$

$$\delta'c = \begin{bmatrix} \delta'3c \\ \hline \delta'4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\ 0'029628 \\ 0'711103 \\ 0'002300 \end{bmatrix} ; \quad \delta'd = \begin{bmatrix} \delta'4d \\ \hline \delta'5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 0'029628 \\ 0'711103 \\ 0'002300 \\ \hline -\ 0'040119 \\ 0'834624 \\ -\ 0'004239 \end{bmatrix}$$

$$\delta'e = \begin{bmatrix} \delta'5e \\ \hline \delta'6e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 0'789848 \\ 0'272729 \\ -\ 0'004239 \\ \hline -\ 0'809051 \\ -\ 2'022629 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estos movimientos van a permitir calcular los esfuerzos de cada barra en las coordenadas de cada una de ellas mediante la fórmula:

$$F = K' \cdot \delta' + P_{emp}$$

$$F'a = \begin{bmatrix} N'1a \\ V'1a \\ M'1a \\ \hline N'2a \\ V'2a \\ M'2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.109 \text{ kg} \\ -1.201 \text{ kg} \\ -1.833 \text{ mkg} \\ \hline -2.109 \text{ kg} \\ 1.201 \text{ kg} \\ -1.771 \text{ mkg} \end{bmatrix} \; ; \; F'b = \begin{bmatrix} N'2b \\ V'2b \\ M'2b \\ \hline N'4b \\ V'4b \\ M'4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.899 \text{ kg} \\ 1.512 \text{ kg} \\ 1.771 \text{ mkg} \\ \hline -\ 999 \text{ kg} \\ 738 \text{ kg} \\ 313 \text{ mkg} \end{bmatrix}$$

$$F'c = \begin{bmatrix} N'3c \\ V'3c \\ M'3c \\ \hline N'4c \\ V'4c \\ M'4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.738 \text{ kg} \\ -\ 88 \text{ kg} \\ -\ 533 \text{ mkg} \\ \hline -2.738 \text{ kg} \\ 88 \text{ kg} \\ 91 \text{ mkg} \end{bmatrix} \; ; \; F'd = \begin{bmatrix} N'4d \\ V'4d \\ M'4d \\ \hline N'5d \\ V'5d \\ M'5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.423 \text{ kg} \\ -1.290 \text{ kg} \\ -\ 404 \text{ mkg} \\ \hline -2.423 \text{ kg} \\ 1.290 \text{ kg} \\ -2.176 \text{ mkg} \end{bmatrix}$$

$$F'e = \begin{bmatrix} N'5e \\ V'5e \\ M'5e \\ \hline N'6e \\ V'6e \\ M'6e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.097 \text{ kg} \\ 1.771 \text{ kg} \\ 2.176 \text{ mkg} \\ \hline -1.197 \text{ kg} \\ 479 \text{ kg} \\ 1.303 \text{ mkg} \end{bmatrix}$$

y con todos estos valores se dibujan ya los diferentes diagramas; no se han dibujado en esta ocasión sino los flectores y deformada.