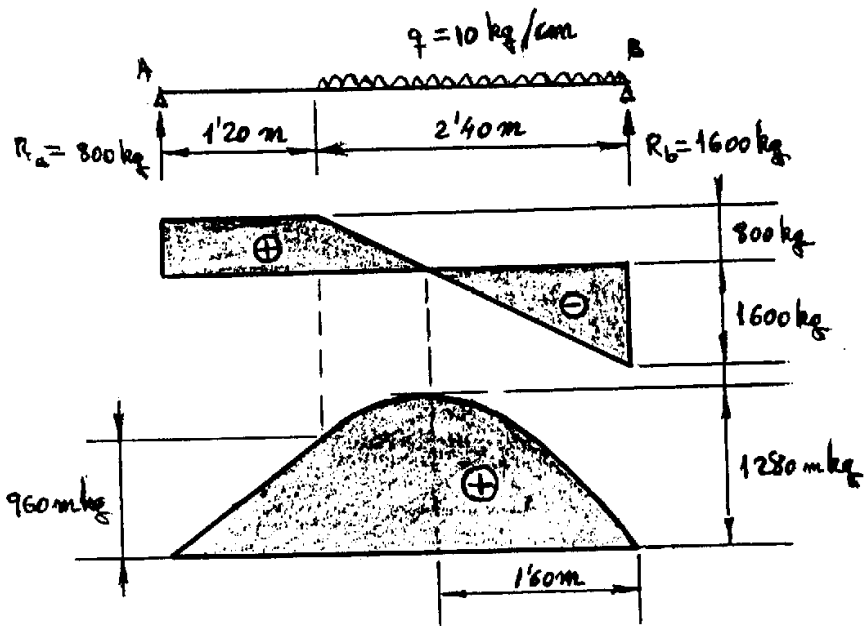
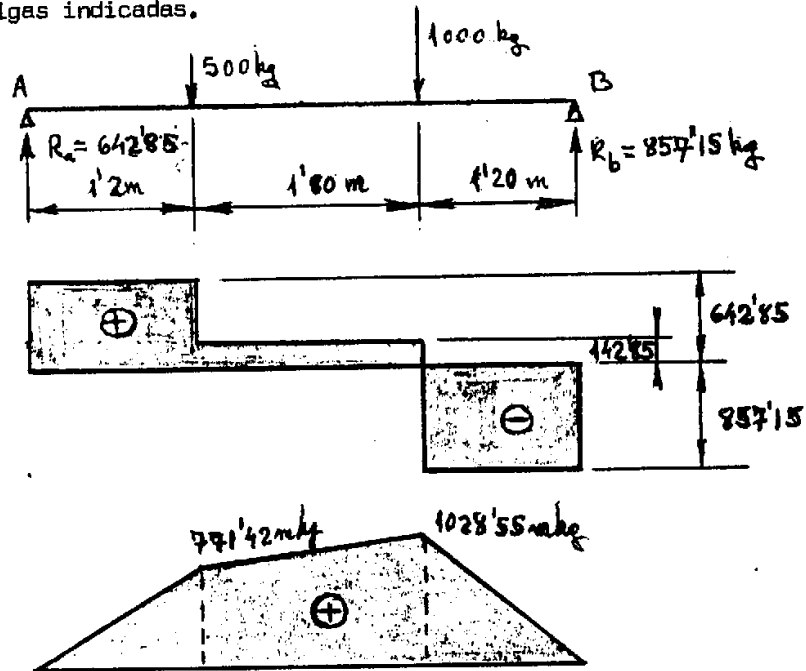


Esfuerzos y Momentos Flectores

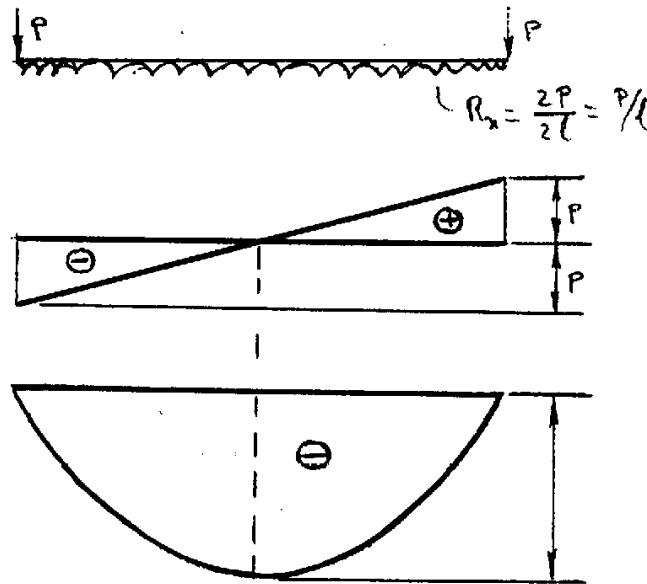
(Tim., pag. 79, 1-a y 1-b)

Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores de las vigas indicadas.



(Tim., pag. 80-4)

Calcular el diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de una viga de longitud l , apoyada uniformemente y ~~dos~~ cargas extremas P)



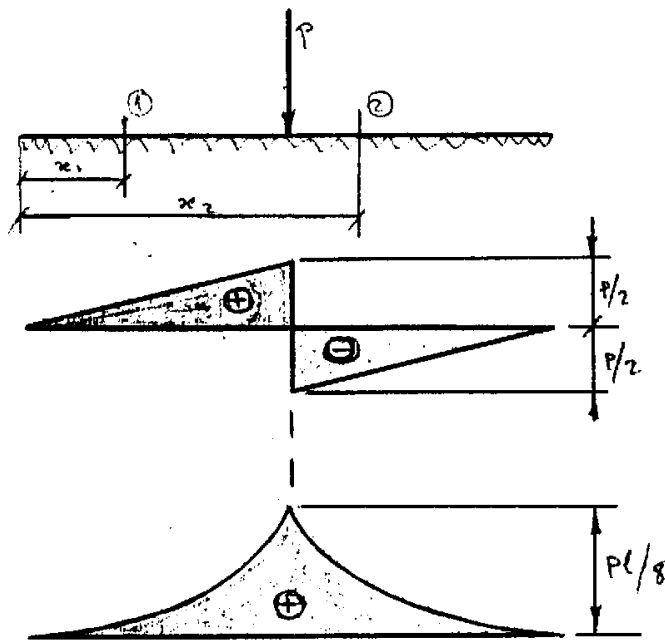
La reacción es uniformemente repartida $q = \frac{2P}{l}$

$$V = -Px + \frac{2P}{l}x = \frac{P(2x-1)}{l} \quad ; \quad V = 0 \text{ para } x = l/2$$

$$M_x = -Px + \frac{2P}{l} \frac{x^2}{2} = \frac{Px^2}{l} - Px = \frac{Px(x-l)}{l}$$

(Tim., pag. 80-5)

Calcular el diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de una viga de longitud L , apoyada uniformemente y carga centrada P .



$$q = P/l$$

$$V = \frac{P}{l} x ; \quad V_{\max} \text{ para } x = \frac{l}{2} \text{ y vale } \frac{P}{2}$$

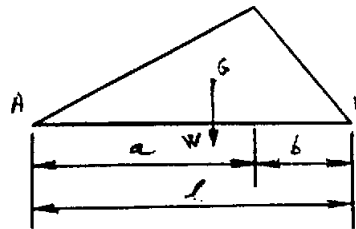
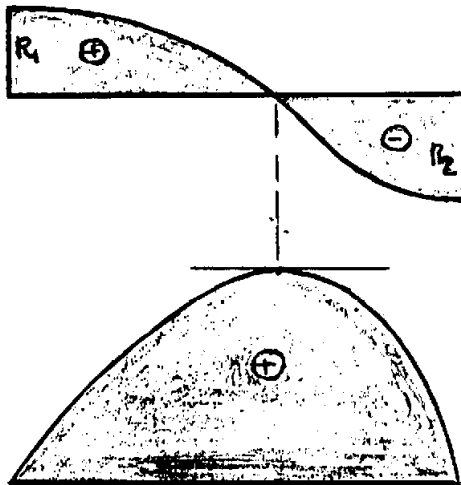
$$M_1 = q \frac{x_1^2}{2} = \frac{Px_1^2}{2l} ; \quad \max. \text{ para } x_1 = \frac{l}{2} ; \quad M_{\max} = \frac{Pl}{8}$$

$$M_2 = \frac{Px_2^2}{2l} - P \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) ; \quad \text{tangentes nulas en extremos}$$

(Tim., pag. 81-7 y 8)

Calcular el diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de una viga simplemente apoyada y carga de reparto triangular, W .

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{al} ; \quad \text{pendiente } \frac{dV}{dx} = -\frac{2Wx}{al}$$



$$V = 0 \text{ para } x = \sqrt{\frac{a(1+b)}{3}} < b$$

las ecuaciones por la izquierda son semejantes.

$$M_x = R_1 x - \frac{Wx^3}{3al} \quad M_{\max} = \frac{2W}{ql} \sqrt{\frac{a}{3} (1+b)^3}$$

(Tim, pag. 134, n° 1)

Una viga de madera simplemente apoyada y cargada de modo uniforme tiene de ~~vano~~ 3 m. Hallar la flecha máxima si $\sigma_{\max} = 80 \text{ kg/cm}^2$, $E = 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y $q = 7 \text{ kg/cm}$.

Solución:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{7 \cdot 300^2}{8} \text{ cmkg}; \quad W = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{7 \cdot 300^2}{8 \cdot 80} \text{ cm}^3 = \frac{2I_z}{h} = \frac{bh^2}{6};$$

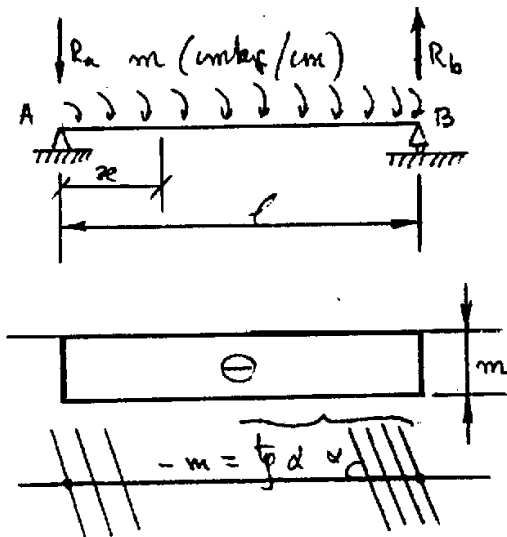
(MIR-Moscó, nº 231, pag. 102)

Determinar reacciones y diagramas de esfuerzos cortantes y momentos —
flectores de la viga de la figura.

Solución : Como la reacción de cada momento unitario es del signo seña-

lado en la figura y de valor $\frac{m}{l}$, las reacciones totales —
valen:

$R_a = R_b = \frac{m}{l} l = m$, dando —
el diagrama de esfuerzos cor-
tantes indicado.



Al cortar a una distancia x ,
el momento vale $R_a x - m x = 0$,
luego el diagrama es la línea
de momentos nulos. Ahora bien,
la pendiente de dicho diagra-
ma, según el anterior, debie-
ra ser $-m$ en cada punto; resulta ser el haz infinito de pendiente $-m$ se-

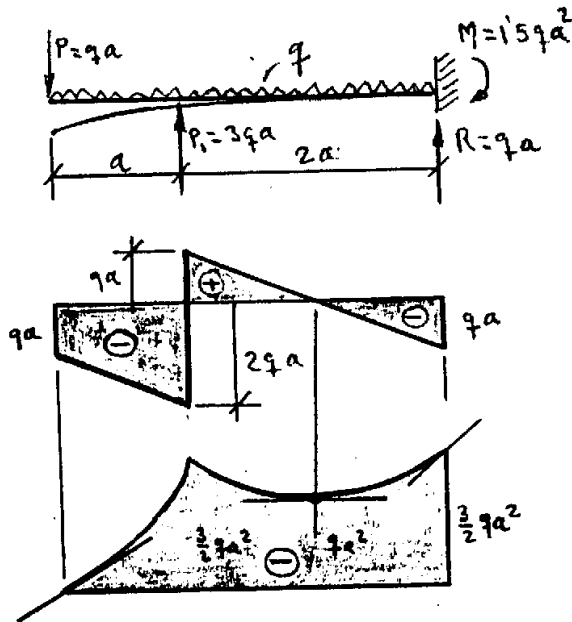
ñalado (se obtiene también por extensión de la viga sometida a 2 momen-
tos, 3, 4, 5 n).

Nota: no existen, pues, ni deformada, ni flechas, ni ángulos.

(MIR-Moscó, nº 237, pag. 103)

Determinar reacciones y diagramas de esfuerzos cortantes y momentos —
flectores de la viga de la figura.

Solución :



Justifíquese los siguientes -
valores: $M = 1.5 qa^2$, $R = qa$

Seale el diagrama de esfuerzos
cortantes indicado

$$M_x \Big|_0^{2a} = qax - \frac{3}{2} qa^2 - \frac{qx^2}{2}, -$$

que da los valores de la figura.

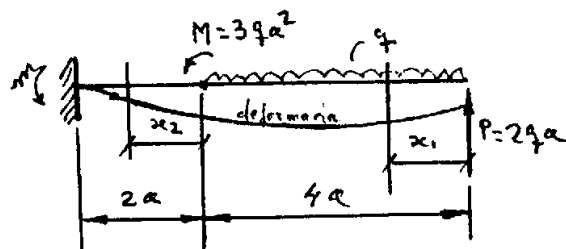
$$M_x \Big|_{2a}^{3a} = - qax - \frac{qx^2}{2}$$

las pendientes extremas son -
iguales; no hay puntos de in-
flexión y la elástica es la -
dibujada.

(MIR-Moscú, n° 238, pag. 103)

Reacciones y diagramas cortante y flector de la viga de la figura.

Solución : Comprobar los valores obtenidos.

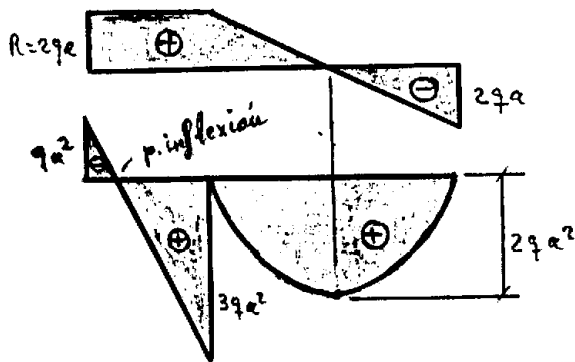


$$R = 2 qa ; m = qa^2$$

diagrama de esfuerzos cortan-
tes al dibujado,

ecuación M_x en el tramos x_1 :

$$M_{x_1} = 2 qa x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$



Ecuación en el tramo x_2 :

$$M_{x_2} = 3qa^2 - 2qax_2$$

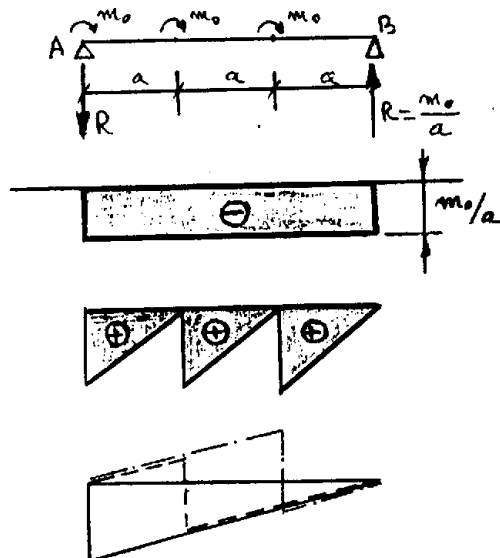
deformada la que se indica,
con un solo punto de inflexión;
(en M no hay inflexión)

(MIR-Coscú, nº 239, pag. 103)

Reacciones y diagramas cortante y flector de la viga de la figura.

Solución : Comprobar los valores obtenidos.

$$R = \frac{3m_0}{3a} = \frac{m_0}{a}$$



El diagrama M_x se ha dibujado
por cálculo analítico:

$$M_a = m_0 - \frac{m_0}{a} a = 0$$

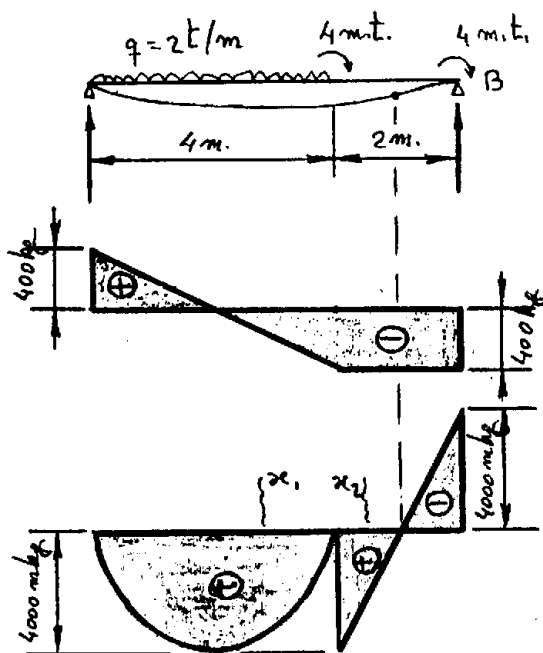
$$M_{2a} = 2m_0 - \frac{m_0}{a} 2a = 0$$

Pero puede deducirse, por el
método de superposición, su-
mando los diagramas de las -
tres m_0 , según figura infe-
rior.

(MIR - Moscú, nº 243, pag. 103)

Diagramas esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura.

Solución : Las reacciones valen, según método superposición:



$$R_a = \frac{8000}{6} \cdot 4 - \frac{8000}{6} = 4000 \text{ Kg}$$

$$R_b = \frac{8000}{6} \cdot 2 + \frac{8000}{6} = 4000 \text{ Kg}$$

Comprobar diagrama.

En cuanto a los momentos en las distintas secciones:

$$M_{x_1} = 4000 x - \frac{2000 x^2}{2} ;$$

$$M_2 = 4000 \text{ mkg} ; M_4 = 0$$

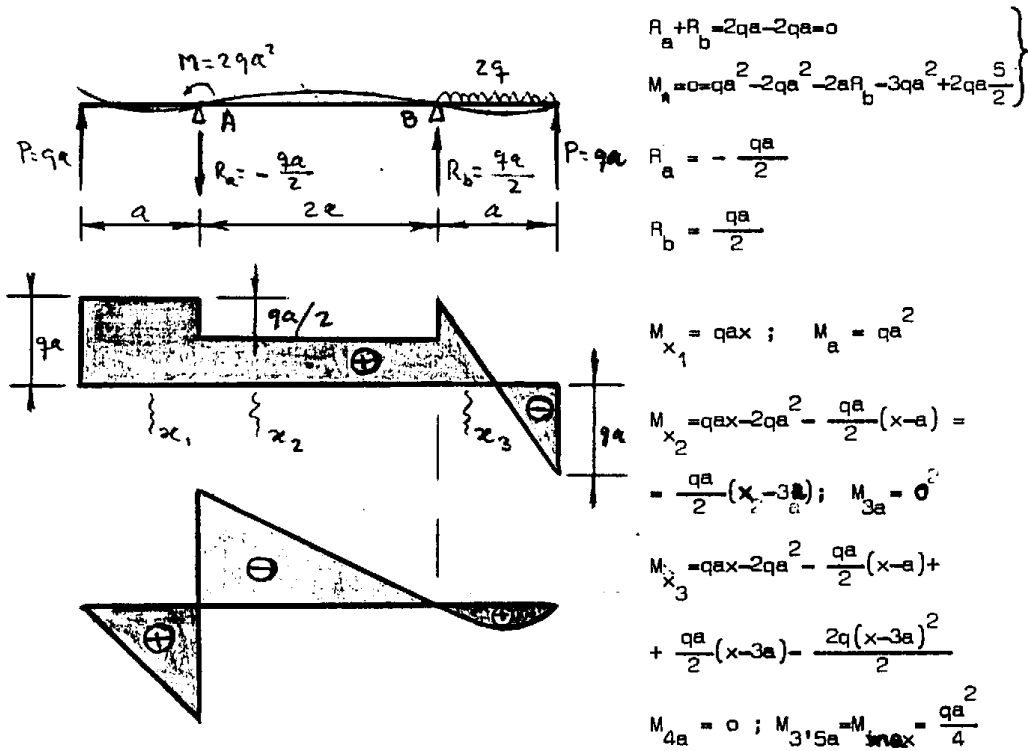
$$M_{x_2} = 4000 x - 2000 \cdot 4 (x-2) + 4000 ;$$

$$M_6 = -4000 \text{ mkg.}$$

(MIR - Moscú, nº 257, pag. 104)

Diagrama esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura:

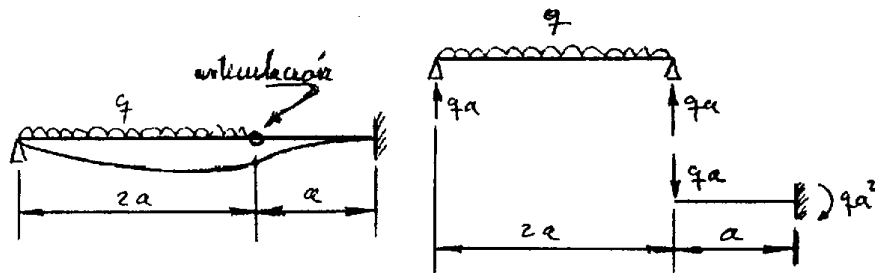
Solución :

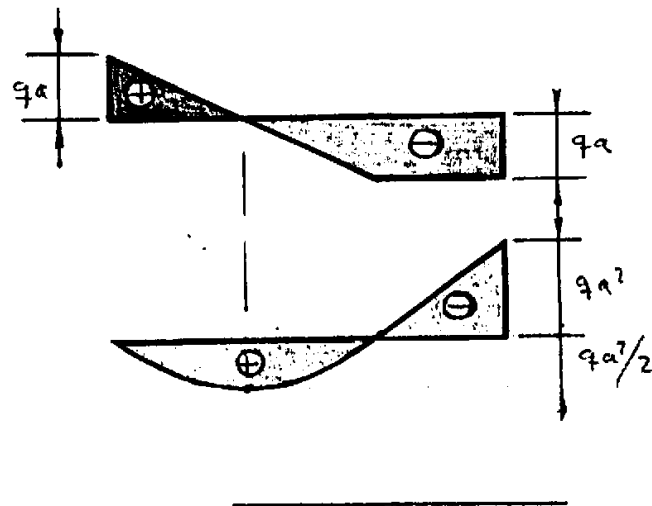


(MIR - Moscú, nº 261, pag. 105)

Diagrama esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura.

Solución :

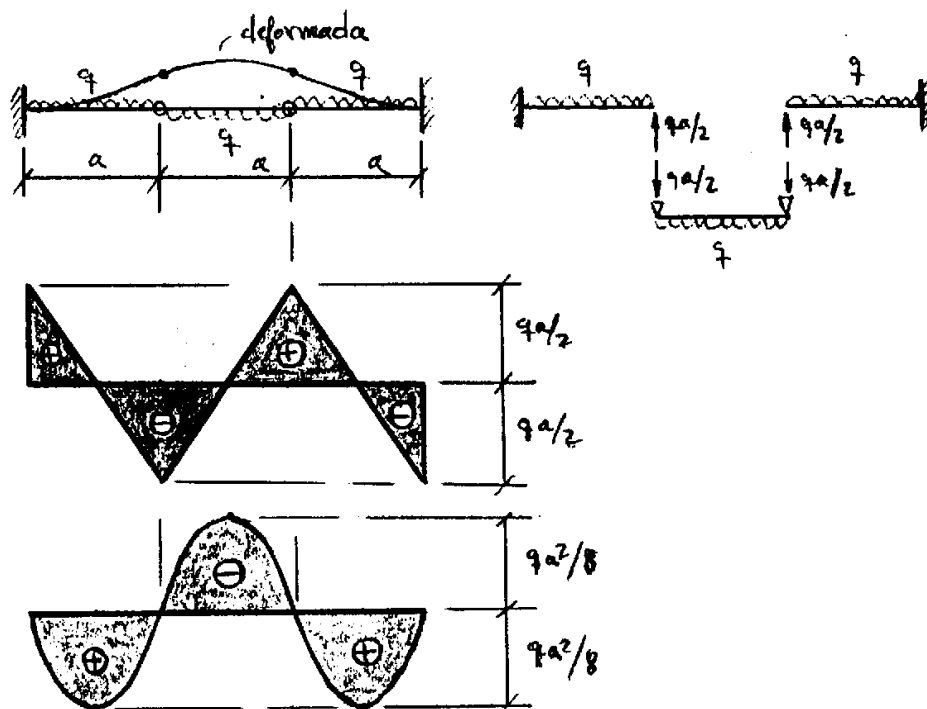




(MIR - Moscú, N° 264, pag. 105)

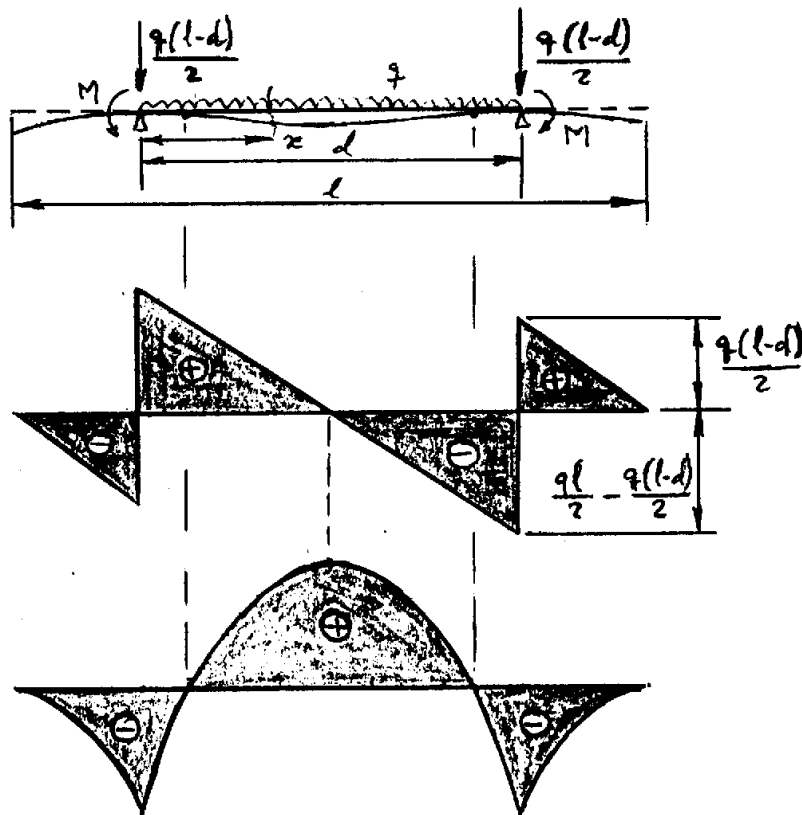
Dibujar diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga indicada.

Solución : Razonarlo.



(Tim., pag. 83-10)

Una viga con dos voladizos iguales sufre una carga uniformemente repartida y tiene una longitud total l . Hallar la distancia d entre los apoyos para que el momento flector en el centro de la viga sea numéricamente igual a los momentos en los apoyos.



Suprimimos los voladizos por sus efectos:

$$R = \frac{q(l-d)}{2} ; \quad M = \frac{q(l-d)}{2} \cdot \frac{l-d}{4} = \frac{q(l-d)^2}{8}$$

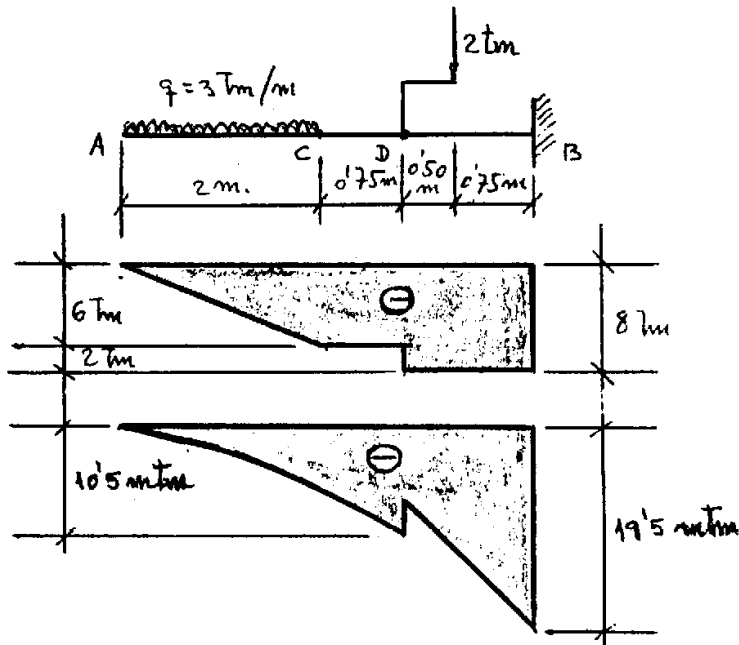
$$R_a = R_b = \frac{ql}{2}$$

$$M_x = \frac{ql}{2} x - \frac{q(l-d)}{2} x - \frac{q(l-d)^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

para $x = \frac{1}{2}$ saldrá $M_{\max} = \frac{q(1-d)^2}{8}$; igualando y resolviendo:

$d^2 - 4ld + 1^2 = 0$; $d = 1(2 \pm \sqrt{2}) = 0.586$ (la solución $1 > 4$ no lo es del problema)

Diagrama esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura.



(la fuerza de 2 Tm , con el brazo de palanca, es equivalente a 2 Tm en D y un momento de $2 \cdot 0.5 = 1 \text{ mTm}$ también en D)

$$M_{AC} = \frac{qx^2}{2} ; M_C = \frac{3 \cdot 2^2}{2} = 6 \text{ mTm}$$

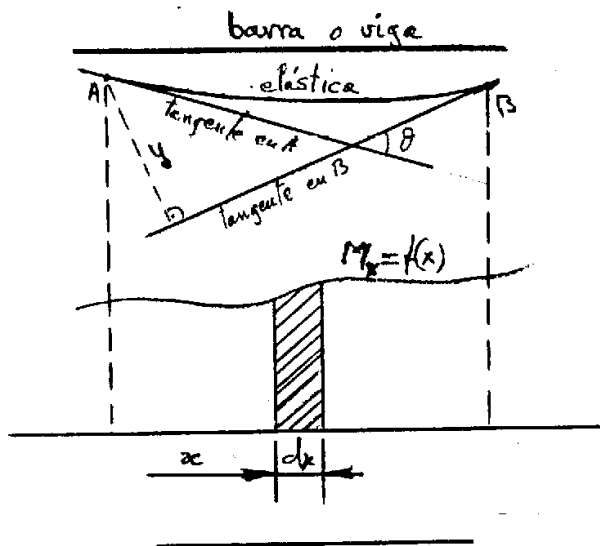
$M_D = 6(1+0.75) = 10.5 \text{ mTm}$; y aquí hay que restar el momento exterior - de 1 mTm .

$$M_B = 6(1+2) - 1 + 2 \cdot 1.25 = 19.5 \text{ mTm}.$$

Flechas y ángulos por Mohr,

$$\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$y = \int_A^B \frac{x}{EI} M dx$$



(Tim., pag. 144, nº 1)

Determinar la flecha y el giro de una viga en voladizo, PNI, uniformemente cargada con $q = 350 \text{ kg/m}$ y sometida además a la acción en su extremo de una carga concentrada $P = 250 \text{ kg}$. Longitud $l = 1.5 \text{ m}$, $\sigma_t = 1000 \text{ Kg/cm}^2$

Solución : $M_{fmax} = Pl + \frac{ql^2}{2} = 250 \cdot 1.50 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 150^2}{2} = 76.875 \text{ cmkg}$;

$W = \frac{M_{fmax}}{\sigma_t} = 76.87 \text{ cm}^3$ corresponde a PNI de 14 cm, $I_z = 573 \text{ cm}^4$; aplica-

mos el método de superposición :

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_2} + \frac{ql^4}{8EI_2} = \frac{250 \cdot 150^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 573} + \frac{3'5 \cdot 150^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 573} \text{ cm} = 0'44 \text{ cm} = 4'4 \text{ mm}$$

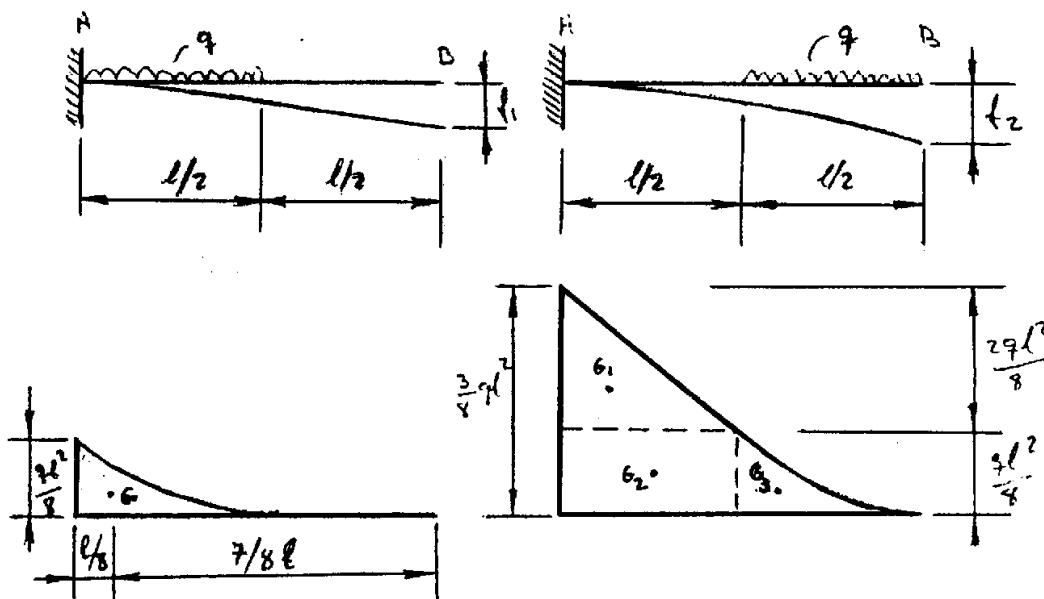
$$\vartheta = \frac{Pl^2}{2EI_2} + \frac{ql^3}{6EI_2} = \frac{250 \cdot 150^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 573} + \frac{3'5 \cdot 150^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 573} \text{ rad.} = 0'00417 \text{ rad.}$$

nes = 0° 0' 15" 0 1

(Tim., pag. 144, nº 5)

¿Cual será la relación de las flechas en los extremos de los voladizos de la figura adjunta?

Solución : (se han dibujado debajo de cada una los diagramas de momentos flectores; razonarlos)



En la primera viga, para aplicar Mohr, el área de la parábola ($\frac{1}{3}$ base.al tura) vale $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{48}$

El c.d.g. está a $1/4$ base del lado izquierdo, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Tomamos B como punto fijo y la tangente variable por A

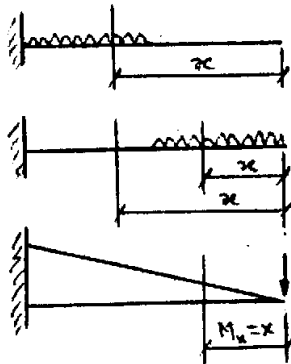
$$f_1 = \int \frac{M_x dx}{EI_z} = \frac{(M_x)}{EI_z} = \frac{\frac{ql^3}{48} \cdot \frac{7}{8} \cdot 1}{EI_z} = \frac{7ql^4}{384 EI_z} ; \text{ la otra, según fi-}$$

gura, la hacemos por descomposición (triángulo, rectángulo y parábola)

$$f_2 = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{ql^3}{48} \cdot \frac{31}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{6} + \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{4} \right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_z} \left(\frac{3}{384} + \frac{5}{96} + \frac{3}{64} \right) = \frac{41 ql^4}{384 EI_z} \quad f_1 : f_2 = 7:41$$

El mismo problema por Castigliano:



$$M_x \Big|_0^{l/2} = 0 ; M_x \Big|_{l/2}^l = \frac{q}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$M_x \Big|_0^{l/2} = \frac{qx^2}{2} ; M_x \Big|_{l/2}^l = q \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

carga unitaria, $M_x = xP$, $\frac{\partial M_x}{\partial P} = x$

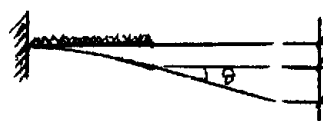
$$f_1 = \frac{1}{EI_z} \int_{l/2}^l \frac{q}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 x dx = \frac{q}{2EI_z} \int_{l/2}^l \left(x^3 + \frac{1^2 x}{4} - 1x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{q}{2EI_z} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1^2 x^2}{8} - \frac{1x^3}{3} \right]_{l/2}^l = \frac{7ql^4}{384EI_z}$$

$$f_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^{l/2} \frac{qx^3}{2} dx + \frac{1}{EI_z} \int_{l/2}^l \frac{ql}{2} \left(x - \frac{1}{4}\right) x dx = \frac{41ql^4}{384EI_z} \quad f_1:f_2=7:41$$

Otro procedimiento: (Ver Timoshenko, pag. 143, fórmulas 100 y 102)

$$f_1 = f_{11} + f_{12} = \frac{q}{8EI_z} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{q}{2} \frac{1}{2} =$$



$$= \frac{ql^4}{128EI_z} + \frac{q}{6EI_z} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{ql^4}{128EI_z} + \frac{ql^4}{96EI_z} = \frac{7ql^4}{384EI_z}$$



$$f_2 = \frac{ql^4}{8EI_z} - f_1 = \frac{ql^4}{8EI_z} - \frac{7ql^4}{384EI_z} = \frac{ql^4}{EI_z} \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{384}\right) = \frac{41ql^4}{384EI_z}$$

Fléchas y ángulos por el método de parámetros de origen (o ecuación universal elástica)

Fórmulas y signos generales

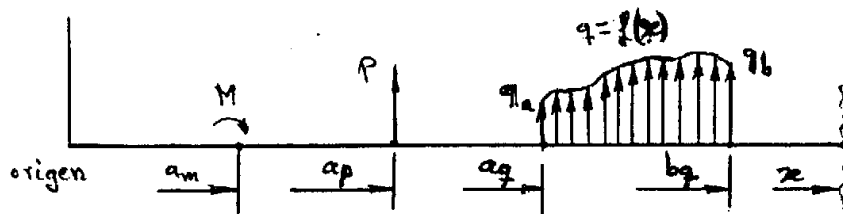
$$EIf_x = EIf_o + EI\theta_o \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-am)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-ap)^3}{3!} +$$

$$+ \sum q_a \frac{(x-aq)^4}{4!} - \sum q_b \frac{(x-bq)^4}{4!} + \sum q_a \frac{(x-aq)^5}{5!} - \sum q_b \frac{(x-bq)^5}{5!} + \dots$$

$$EI \vartheta_x = EI \vartheta_o + \sum M \frac{(x-am)}{1!} + \sum P \frac{(x-ap)^2}{2!} + \sum q_a \frac{(x-aq)^3}{3!} -$$

$$- \sum q_b \frac{(x-bq)^3}{3!} + \sum q'_a \frac{(x-aq)^4}{4!} + \dots$$

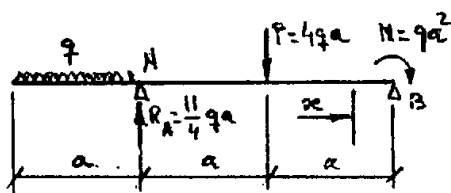
$\left\{ \begin{array}{l} xc = a_q, q_a, q'_a, q''_a, \dots \\ xc = b_q, q_b, q'_b, q''_b, \dots \end{array} \right.$



(MIR - Moscú, ejemplo 42, pag. 142)

Calcular f_x y ϑ_x en la viga de la figura, con los valores particulares ϑ_A , ϑ_B y f_p .

Solución : Cortando por la sección x indicada, la fórmula general será:



(no hay momentos) (la reacción en A vale $R_A = \frac{11}{4} qa$)

$$EI f_x = EI f_o + EI \vartheta_o x + \frac{11}{4} qa \frac{(x-a)^3}{6} -$$

$$- 4 qa \frac{(x-2a)^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-a)^4}{24}$$

para los valores particulares de $x = a$ y $x = 3a$, la flecha $f_x = 0 \implies$

$$x = a \implies EI f_A = 0 = EI f_o + EI \vartheta_o a - \frac{qa^4}{24}$$

$$x = 3a \implies EI f_B = 0 = EI f_o + EI \vartheta_o 3a + \frac{88}{24} qa^4 - \frac{2}{3} qa^4 - \frac{81}{24} qa^4 + \frac{16}{24} qa^4$$

Resolviendo entre ambas ecuaciones, salen los valores:

$$f_o = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI} ; \vartheta_o = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}, \text{ que sustituidos en las ecua}$$

ciones generales, dan f_x y ϑ_x ; en particular, para los valores pedidos:

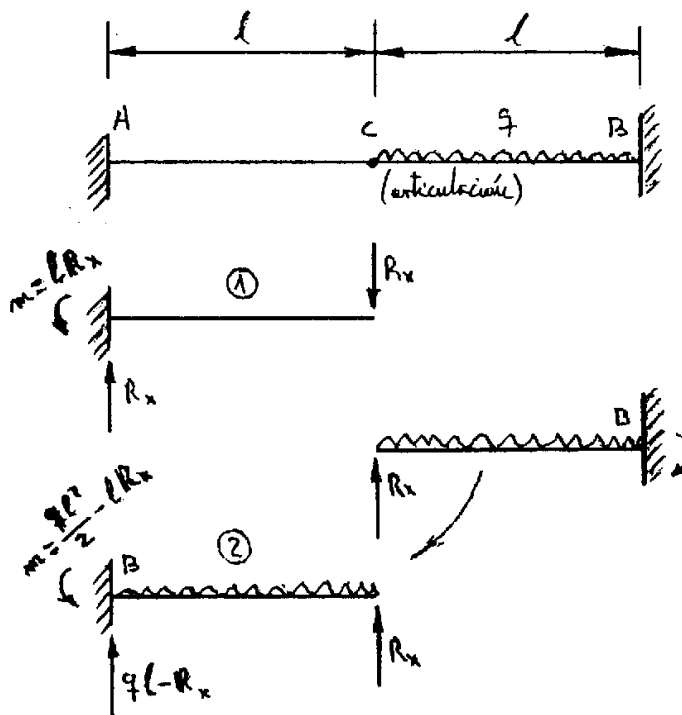
$$\left. \begin{array}{l} x = a, \quad \vartheta_A = -\frac{qa^3}{3EI} \\ x = 3a, \quad \vartheta_B = \frac{qa^3}{6EI} \end{array} \right\} \quad x = 2a, \quad f_p = \frac{7qa^4}{24EI}$$

(MIR - Moscú, nº 493, pag. 170)

Resolver la viga de la figura, calculando la flecha en la articulación.

Solución : Aplicamos el método de los parámetros de origen a las vigas

(1) y (2):



$$EI f_{1_1} = -1 R_x \frac{1^2}{2} + R_x \frac{1^3}{6} = -\frac{R_x 1^3}{3}$$

$$EI f_{1_2} = -\left(\frac{ql^2}{2} - 1 R_x\right) \frac{1^2}{2} + (ql - R_x) \frac{1^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = \frac{R_x 1^3}{3} - \frac{ql^4}{8}$$

igualando ambas, sale $R_x = \frac{3ql}{16}$

Nota: también puede hacerse igualando flechas, según formularios:

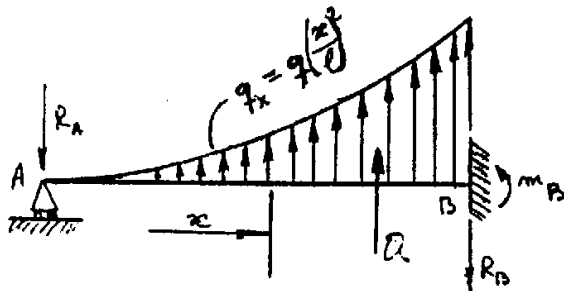
$$f_1 = \frac{R_x 1^3}{3EI} ; \quad f_2 = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{R_x 1^3}{3EI}$$

(MIR - Moscú, nº 494, pag. 170)

Resolver la viga de la figura por el método de los parámetros de origen, calculando además el ángulo de giro en la sección del apoyo.

Solución : Comenzamos calculando: $q_x = q \left(\frac{x}{l}\right)^2$; $q'_x = \frac{2qx}{l^2}$;

$$q''_x = \frac{2q}{l^2}$$



$$EIF_x = EI \theta_o x - R_a \frac{x^3}{6} + \frac{2q}{l^2} \frac{x^5}{720}$$

$$EI \theta_x = EI \theta_o - R_a \frac{x^2}{2} + \frac{2q}{l^2} \frac{x^5}{120}$$

y para $x = l$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= EI \vartheta'_0 - R_a \frac{l^2}{6} + \frac{ql^3}{360} \\ 0 &= EI \vartheta''_0 - R_a \frac{l^2}{2} + \frac{ql^3}{60} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Restando } R_a l^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \\ + ql^3 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{60} \right) &= 0 ; \\ R_a &= \frac{ql}{24} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la segunda: $0 = EI \vartheta''_0 - \frac{ql^3}{48} + \frac{ql^3}{60}$; $\vartheta''_0 = \frac{ql^3}{240EI}$

Carga total, $Q = \int_0^l \frac{qx}{l^2} dx = \frac{ql}{3}$; $R_b = \frac{ql}{3} - R_a = \frac{7ql}{24} = R_b$

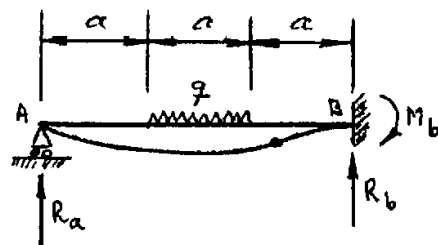
c.d.g. $\Rightarrow \vartheta = \frac{\int_0^l \frac{qx}{l^2} x dx}{\frac{ql}{3}} = \frac{3l}{4}$; $m_b + \frac{ql}{3} \frac{3l}{4} - \frac{7ql}{24} l = 0$;

$$m_b = \frac{ql^2}{24}$$

(MIR - Moscú, nº 493, pag. 170)

Calcular la viga de la figura, dibujando los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes, aplicando el método de los parámetros de origen.

Solución :



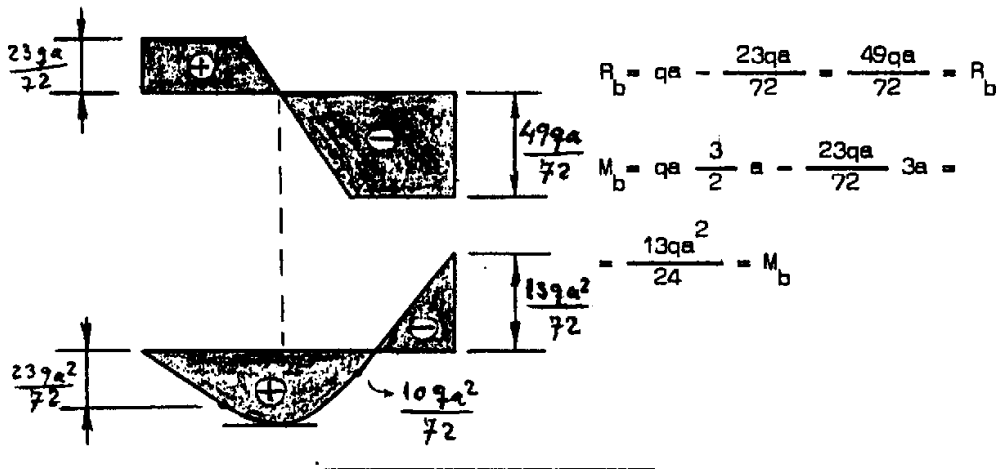
$$EI \vartheta'_x = EI \vartheta''_0 x + R_a \frac{x^3}{6} - q \frac{(x-a)^4}{24} + q \frac{(x-2a)^4}{24}$$

$$EI \vartheta_x = EI \vartheta_0 + R_a \frac{x^2}{2} - q \frac{(x-a)^3}{6} + q \frac{(x-2a)^3}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{para } x = 3a \Rightarrow 0 &= EI \vartheta_0 + \frac{9}{2} R_a a^2 - \frac{2}{3} q a^3 + \frac{q a^3}{24} \\ 0 &= EI \vartheta_0 + \frac{9}{2} R_a a^2 - \frac{4}{3} q a^3 + \frac{q a^3}{6} \end{aligned} \right\}$$

restando ambas, $0 = 2EI \vartheta_0 + \frac{13}{24} q a^3$; $\vartheta_0 = \frac{13 q a^3}{48 EI}$; y de la segunda,

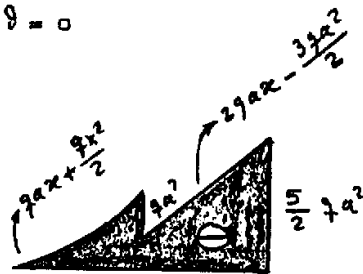
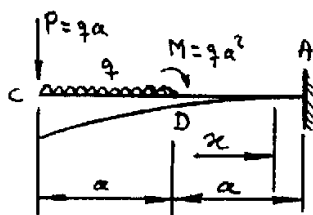
$$R_a = \frac{23 q a}{72}$$



(MIR - Moscú, nº 392, pag. 145)

Calcular, por el método de los parámetros de origen, la flecha en C y el ángulo en D, de la viga de la figura.

Solución: Tenemos que aplicar las dos fórmulas, al ser conocidas en el empotramiento los valores $f = 0$, $\vartheta = 0$



$$EI \vartheta_x = EI \vartheta_o + qa^2(x-a) - qa \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + q \frac{(x-a)^3}{6} \quad [1]$$

para $x = 2a$, $\vartheta_x = \vartheta_A = 0$ $\vartheta_o = \frac{13qa^3}{6EI}$ $[2]$

$$EI f_x = EI f_o + EI \vartheta_o x + qa^2 \frac{(x-a)^2}{2} - qa \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-a)^4}{24} \quad [3]$$

sustituyendo en $[3]$ el valor $[2]$ y haciendo $x=2a$; $f_x = f_A = 0$, sale

$$f_o = -\frac{23qa^4}{8EI} \quad [4];$$

f_o resulta ser un valor pedido, $f_o = f_o$; sustituyendo en $[1]$ $x = a$ y el valor $[2]$, sale

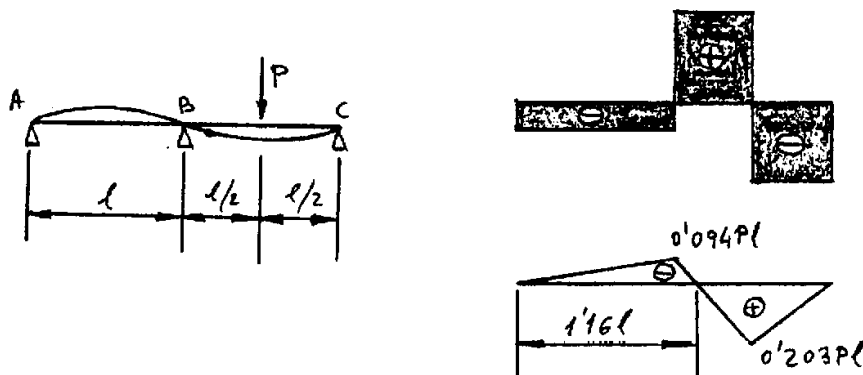
$$\vartheta_o = \frac{3qa^3}{2}, \text{ segundo valor pedido}$$

Nota: se ha dibujado el diagrama de momentos flectores para aclaración.

(Ensidesa, pag. 519)

Resolver la viga de la figura, con ayuda de la ecuación de los parámetros de origen.

Solución : De las ecuaciones de la estática planteamos $R_a + R_b + R_c = P$ (1)



$$M_A = 0 \implies R_b \cdot 1 + R_c \cdot 2 - P \cdot \frac{3}{2} = 0; \quad 2R_b + 4R_c = 3P \quad (2)$$

Y la ecuación de las flechas queda así:

$$EI f_x = EI f_0 + EI \vartheta_0 x + R_a \frac{x^3}{6} + R_b \frac{(x-1)^3}{6} - P \frac{(x - \frac{3}{2})^3}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 0; \text{ además, para } x=1, f_1=0 \\ x=2, f_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sustituyendo:}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= EI \vartheta_0 + \frac{R_a 1^3}{6} \implies EI \vartheta_0 + \frac{R_a 1^3}{6} = 0 \\ 0 &= EI \vartheta_0 + \frac{4}{3} R_a 1^3 + \frac{R_b 1^3}{6} - \frac{P 1^3}{48} \\ 0 &= R_a 1^3 + \frac{R_b 1^3}{6} - \frac{P 1^3}{48} \end{aligned} \right\} \text{ restando}$$

$$48 R_a + 8 R_b = P \quad (3)$$

Resolviendo el sistema (1), (2) y (3) resulta:

$$R_a = -\frac{3P}{32} \approx -0.094 P; \quad R_b = \frac{11P}{16} \approx 0.688 P;$$

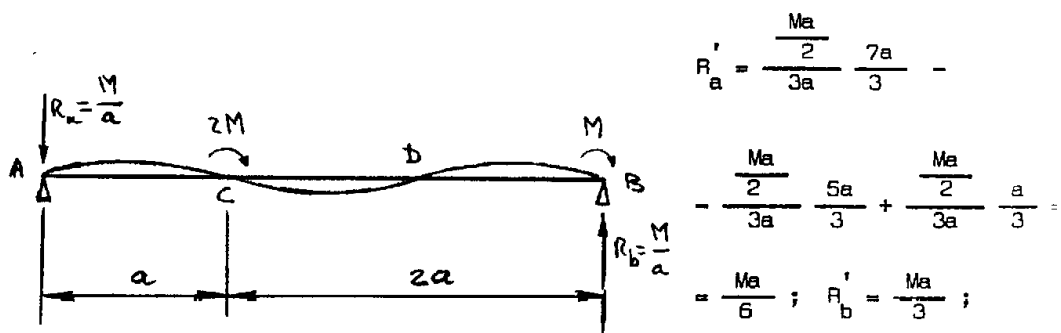
$R_c = 0.406 P$; el punto de inflexión se calcula por:

$$-R_a x + R_b (x-1) = 0; \quad x \approx 1.16 \text{ l}$$

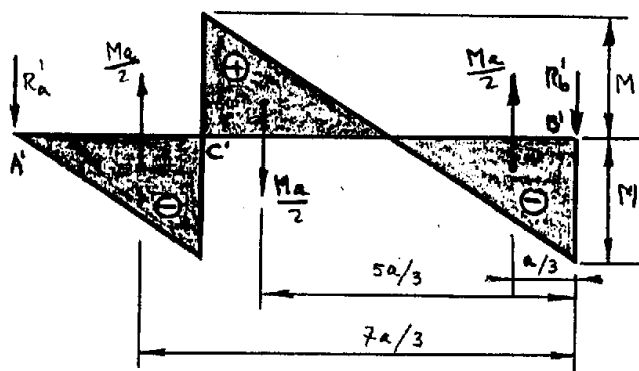
(MIR - Moscú, nº 415, pag. 149)

Determinar la flecha en C y el ángulo de giro en B de la viga de la figura.

Solución: Calculamos el diagrama de momentos flectores, que pasa a ser de cargas (razonar su obtención); aplicamos el método de superposición: tres triángulos parciales y sus resultantes.



luego $\vartheta_B = \frac{Ma}{3EI} ;$



$$M_c = \frac{Ma}{6} a - \frac{Ma}{2} \frac{a}{3} =$$

$$= 0 = f_c$$

de paso, $M_D = \frac{Ma}{3} a -$

$$- \frac{Ma}{2} \frac{2a}{3} = 0, \text{ y sale}$$

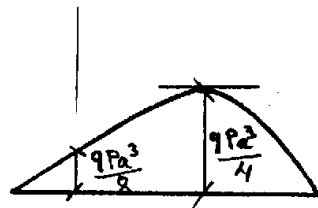
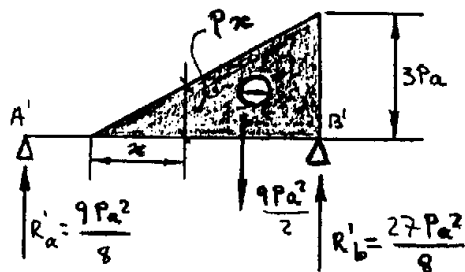
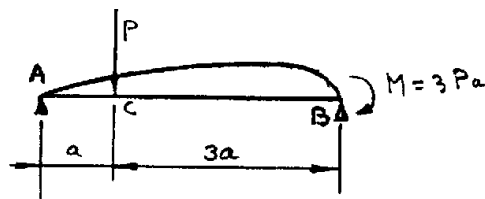
la elástica que indicamos.

(MIR - Moscú, nº 430, pag. 151)

Calcular los valores absolutos de la flecha máxima, F_{\max} , y ángulo máximo, ϑ_{\max} , dibujando la elástica correspondiente de la viga propuesta.

Solución : Comenzamos por calcular el diagrama de momentos flectores — ($R_a = 0 ; R_b = P$), que resulta el indicado, con sus reacciones correspondientes y que nos da:

$$\vartheta_{\max} = R'_b = \frac{27Pa^2}{8EI}$$



Para calcular f_{\max} hemos de saber M_{\max} , habiendo dibujado debajo el segundo diagrama de momentos flectores.

$$M_x = \frac{9Pa^2}{8}(x+a) - \frac{Px^3}{6};$$

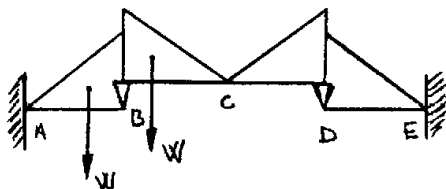
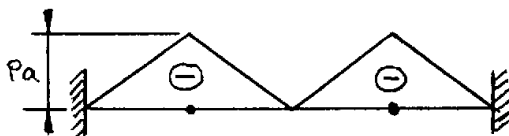
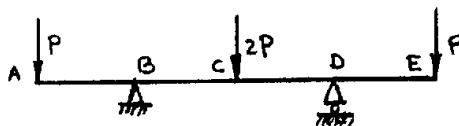
$$M'_x = \frac{9Pa^2}{8} - \frac{Px^2}{2}; \quad x = \frac{3}{2}a$$

$$M_{x=3/2a} = \frac{9Pa^2}{8} \left(\frac{3a}{2} + a \right) - \frac{27Pa^3}{48} = \frac{9Pa^3}{4};$$

$$f_{\max} = \frac{9Pa^3}{4EI}$$

(MIR - Moscú, nº 440, pag. 152)

Resolver la viga de la figura por el método de la viga conjugada (flechas en A y C)



Solución : En la figura inferior se ha indicado la distribución de momentos, sus signos y la viga conjugada. Y en la figura inferior el procedimiento de cálculo:

$$W = 1/2 Pa^2;$$

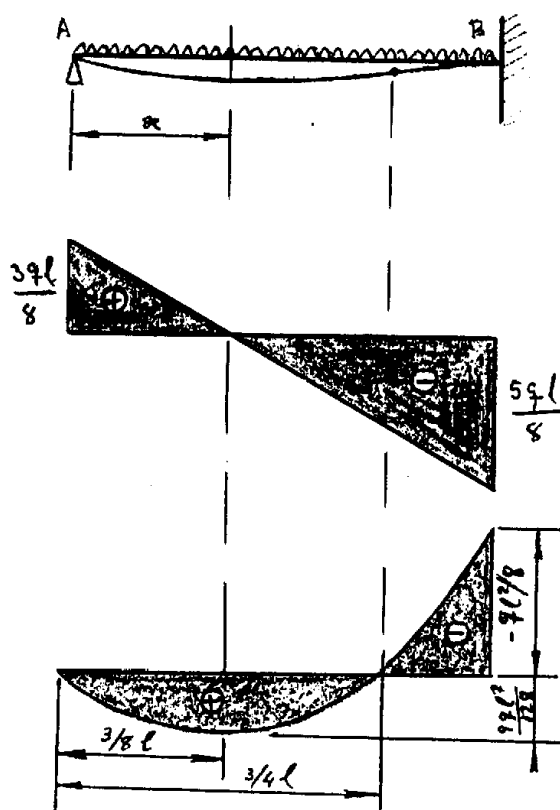
$$M_c = W a - W \frac{2}{3} a = \frac{P a^3}{6} ; \quad f_c = \frac{P a^3}{6EI_z}$$

$$M_A = W a + W \frac{2}{3} a = \frac{5 P a^3}{6} ; \quad f_A = \frac{5 P a^3}{6EI_z}$$

Teniendo en cuenta los signos de momentos, sale la elástica indicada, pues las cargas, por comodidad, se han señalado contrarias a su actuación.

(Ensidesa, I, pag. 271)

Resolver la viga de la figura.



Solución : $R_a + R_b = q l$ (1)

$$M_B = R_a l - \frac{q l^2}{2}$$
 (2)

$$M_x = R_a x - \frac{q x^2}{2} \quad (3) ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial R_a} = x$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial R_a} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(R_a x^2 - \frac{q x^3}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[R_a \frac{l^3}{3} - \frac{q l^4}{8} \right] ; \end{aligned}$$

$$R_a = \frac{3q l}{8} ; \quad R_b = \frac{5q l}{8} ;$$

en (2) $\Rightarrow M_B = \frac{3q l^2}{8} - \frac{q l^2}{2} =$

$$-\frac{q l^2}{8} = M_B$$

$$\text{de (3)} \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} = R_a - q \cdot x = 0 ; \quad x_{\max} = \frac{R_a}{q} = \frac{3}{8} l ;$$

$$M_{x=3/8l} = \frac{3ql}{8} \cdot \frac{3}{8} l - \frac{q}{2} \cdot \frac{9}{64} l^2 = \frac{9}{128} ql^2$$

$$\text{puntos de momento nulo} \Rightarrow M_x = 0 = x \left(R_a - \frac{qx}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2R_a}{q} = \\ = \frac{2}{q} \cdot \frac{3ql}{8} = \frac{3}{4} l \end{cases}$$

Otro procedimiento para el cálculo de M_B (μ'_0)

$$\mu'_0 = \frac{[M_1 L]}{[x L]} ; \quad [x] = \int_0^l x^2 dx = l^3/3$$

$$[M_1] = \left[\text{parábola max } \frac{ql^2}{8} - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot 1 \right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^4}{24} \right] ;$$

$$\mu'_0 = \frac{ql^4/24}{l^3/3} = ql^2/8$$

Elástica:

$$M_x = R_a x - \frac{qx^2}{2} ; \quad EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -R_a x + \frac{qx^2}{2}$$

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -R_a \frac{x^2}{2} + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI_z y = -R_a \frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

$$x = l \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = R_a \frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} = \frac{Pl^3}{48}$$

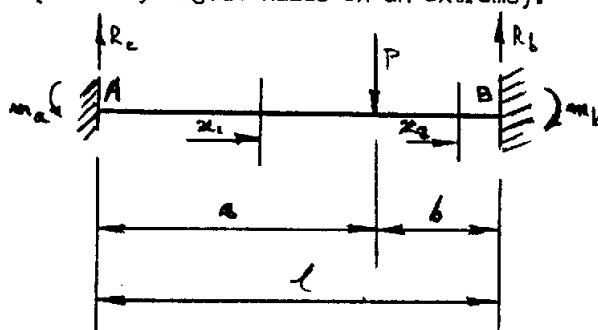
$$y_x = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qx^3 l}{6} + \frac{ql^3}{48} x \right) = \frac{qx}{48EI_z} (2x^3 - 3lx^2 + l^3)$$

$$\varphi_x = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{qx^3}{6} - \frac{3qlx^2}{16} + \frac{ql^3}{48} \right) ; \quad \text{para } x = 0 \Rightarrow \varphi_A = \frac{ql^3}{48EI_z}$$

(Ensidesa, pag. 249)

Resolver la viga de la figura.

Solución : Emplearemos tres procedimientos distintos, como tantos otros ejemplos de resolver. Primero, por Castigliano, derivando dos veces — (flecha y ángulo nulos en un extremo):



$$m_a + Pb - R_a l - m_b = 0$$

$$R_a + R_b = P$$

$$1 - l \frac{\partial R_a}{\partial m_a} = 0; \frac{\partial R_a}{\partial m_a} = \frac{1}{l}$$

$$M_{x_1} \Big|_0^a = R_a x - m_a$$

$$M_{x_2} \Big|_a^l = R_a x - m_a - P(x-a)$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial R_a} = x$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial m_a} = -1 + x \frac{\partial R_a}{\partial m_a} = \frac{x-l}{l}$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial R_a} = x$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial m_a} = -1 + x \frac{\partial R_a}{\partial m_a} = \frac{x-l}{l}$$

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial R_a} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (R_a x^2 - m_a x) dx - P \int_a^l (x^2 - ax) dx \right]; \text{ resolviendo}$$

$$2R_a l^3 - 3m_a l^2 = P(2l^3 - 3al^2 + a^3) \quad [1]$$

$$\psi = \frac{\partial U}{\partial m_a} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (m_a - R_a x) \frac{x-l}{l} dx + P \int_a^l (x-a) \frac{x-l}{l} dx \right]; \text{ resolviendo}$$

$$R_a l^3 - 3m_a l^2 = P(l^3 - 3al^2 + 3a^2 l - a^3) \quad [2]$$

de ese sistema se calcula $m_a = \frac{Pab^2}{l^2}$; luego R_a ; y el resto fácilmente.

Segundo procedimiento, quitando unas ligaduras hiperestáticas:



Ensidesa, pag. 229

Ensidesa, pag. 244

$$\varphi_1 = \frac{Pab}{6EI} (1+b)$$

$$\varphi_{1,1} = - \frac{1}{6EI} (2m_a + m_b)$$

$$\varphi_2 = - \frac{Pab}{6EI} (1+a)$$

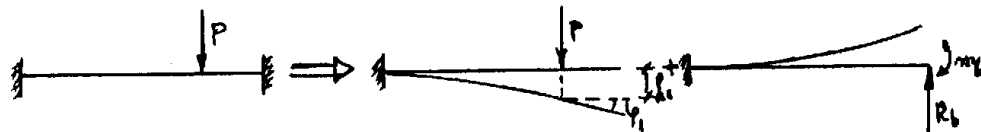
$$\varphi_{2,2} = \frac{1}{6EI} (m_a + m_b)$$

igualando valores absolutos (lo que equivale a suma nula) \Rightarrow

$$\left. \begin{aligned} 2m_a + m_b &= \frac{Pab(1+b)}{1^2} \\ m_a + 2m_b &= \frac{Pab(1+a)}{1^2} \end{aligned} \right\}$$

sistema que, resuelto, nos da $m_b = \frac{Pa^2b}{1^2}$ y $m_a = \frac{Pab^2}{1^2}$, con los signos prefijados.

Tercer procedimiento, quitando otras ligaduras:



Ensidesa, pag. 283

Ensidesa, pags. 284 y 296 (se restan flechas y Δ)

$$f_1 = \frac{Pa^2}{6EI} (2a+3b)$$

$$f = \frac{R_b l^3}{3EI} - \frac{m_b l^2}{2EI}$$

$$\varphi_1 = \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\varphi = \frac{R_b l^2}{2EI} - \frac{m_b l}{EI}$$

igualando y resolviendo:

$$P a^2 (2a+3b) = 2R_b l^3 - 3m_b l^2 \quad \text{que da } m_b = \frac{Pa^2 b}{l^2}$$

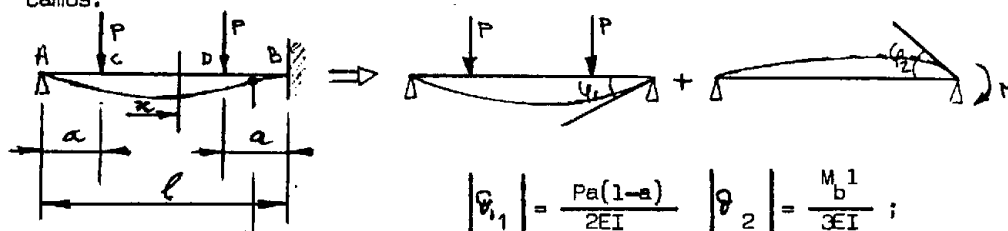
$$P a^2 l = R_b l^3 - 2m_b l^2 \quad R_b = \frac{Pa^2 (1+2b)}{l^3}$$

(Ensidesa, pag. 269)

Resolver la viga de la figura (reacciones, diagramas, ángulos y elástica).

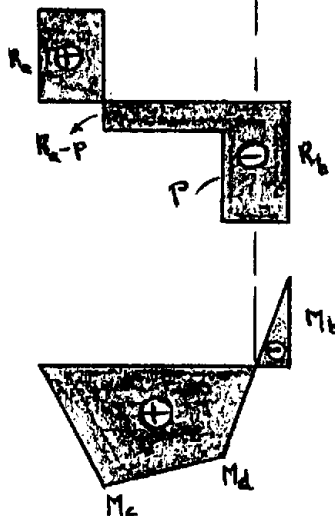
Solución : La descomponemos en dos vigas isostáticas: y del formulario se

camos:



$$\left| \vartheta_1 \right| = \frac{Pa(1-a)}{2EI} \quad \left| \vartheta_2 \right| = \frac{M_b l}{3EI} ;$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 ; \quad M_b = \frac{3Pa(1-a)}{2l}$$



tomando momentos en B y con $R_a + R_b = 2P$
deducimos:

$$M_b = 0 ; R_a l - P(1-a) - Pa + M_b = 0 \Rightarrow$$

$$R_a = \frac{P(2l^2 - 3al + 3a^2)}{2l^2}$$

$$R_b = 2P - R_a = \frac{P(2l^2 + 3al - 3a^2)}{2l^2} = R_b$$

$$Q_x \Big|_A^c = R_a ; \quad Q_x \Big|_c^D = R_a - P = \frac{3Pa(a-1)}{2l^2} (< 0) ; \quad Q_x \Big|_D^B = R_b (< 0)$$

$$M_x \Big|_A^c = R_a x ; \quad M_c = \frac{Pa(2l^2 - 3al + 3a^2)}{2l^2}$$

$$M_x \Big|_c^D = R_a x - P(x-a) = P \left[\frac{3a(a-1)x}{2l^2} + a \right]$$

$$M_x \Big|_D^B = R_a x - P(x-a) - P \left[x - (1-a) \right] = P \left[\frac{3a^2 - 3al - 2l^2}{2l^2} x + 1 \right]$$

Para las deformaciones empleamos el método de los parámetros de origen:

$$EIF_x = EIF_0 + EI \vartheta_0 x + R_a \frac{x^3}{6} - P \frac{[x-(1-a)]^3}{6} - P \frac{(x-a)^3}{6} [J] ;$$

para $x=l$, $f_1=0$; además, $f_0=0$

$$0 = EI \vartheta_0 l + R_a \frac{l^3}{6} - \frac{Pa^3}{6} - \frac{P(1-a)^3}{6} ; \text{ sustituyendo y operando, sale}$$

$$\vartheta_0 = \vartheta_a = \frac{Pa(1-a)}{4EI}$$

Nota: sale realmente $\frac{Pa(a-1)}{4EI}$, negativo para la ecuación de los parámetros de origen, que es positiva en el convenio de la ecuación de la elástica.

Para el tramo AC empleamos la ecuación de la elástica en el cálculo de la flecha:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \frac{2l^2 - 3al + 3a^2}{2l^2} x \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = -P \frac{2l^2 - 3al + 3a^2}{4l^2} x^2 + C_1 ;$$

para $x=0$; $\frac{dy}{dx} = \vartheta_a$; y sacamos el valor de $C_1 = P \frac{a(1-a)}{4}$; vol-

viendo a integrar:

$$EI y = -P \frac{2l^2 - 3al + 3a^2}{12l^2} x^3 + \frac{Pa(1-a)}{4} x + C_2 ; \text{ para } x=0 ; y=f_a=0 ,$$

$C_2 = 0$; operando:

$$y_{AC} = \frac{Px}{12EI l^2} \left[(3al - 3a^2 - 2l^2)x^2 + 3al^3 - 3a^2 l^2 \right]$$

Para el tramo \overline{CD} volveremos a emplear el método de los parámetros de origen, cambiando el signo del anterior $\vartheta_o = \vartheta_a$:

$$EI f_{CD} = \cancel{EI} \frac{Pa(a-1)}{4EI} x + \frac{P(2l^2 - 3al + 3a^2)}{2l^2} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{6} ; \text{ operando fa-}$$

cilmente sale:

$$y_{CD} = \frac{Pa}{12EI l^2} \left[-3(1-a)x^3 + 6l^2 x^2 - 3l^2(1+a) + 2a^2 l^2 \right] , \text{ que es la mis-}$$

ma de Ensidesa, cambiando el signo (elástica y parámetros de origen contrarias).

El último tramo será:

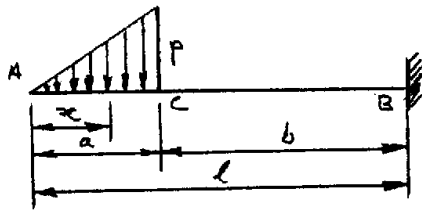
$$EI f_{DB} = \cancel{EI} \frac{Pa(a-1)}{4EI} x + \frac{P(2l^2 + 3a^2 - 3a^2 l)}{2l^2} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{6} - \frac{P[x-(1-a)]^3}{6} ,$$

que, operando, da la fórmula de Ensidesa con signo cambiado.

{Ensidesa, pag. 288}

Resolver la viga de la figura.

Solución : carga total, $\frac{Pa}{2} = R_b$; $M_b = \frac{Pa}{2} \left(1 - \frac{2}{3} a\right)$;



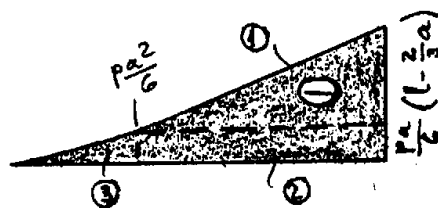
$$a_x \Big|_a^c = -\frac{px^2}{2a} ; a_x \Big|_c^b = -\frac{pa^2}{2}$$

(razónense fórmulas y forma de -
curva; $a_x^1 = -\frac{px}{a}$)

$$M_x \Big|_a^c = -\frac{px^2}{2a} \cdot \frac{x}{6} = -\frac{px^3}{6a} ;$$



$$\frac{pa}{2} M_x \Big|_c^b = -\frac{pa}{2} \left(x - \frac{2}{3}a\right)$$



Cálculo de ángulos en C y A por
el método de Möhr:

$$S_1 = \frac{\left[\frac{pa}{2} \left(1 - \frac{2}{3}a\right) - \frac{pa^2}{6} \right] b}{2} = \frac{pab^2}{4} ; S_2 = \frac{pa^2b}{6}$$

$$\varphi_c = \frac{S_1 + S_2}{EI} = \frac{3pab^2 + 2pa^2b}{12EI} = \frac{pab}{12EI} (3b - a) = \varphi_c \text{ (negativo)}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \text{ base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{4} a \frac{pa^2}{6} = \frac{pa^3}{24}$$

$$\varphi_A = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{EI} = \frac{2pab(3b-a)}{24EI} + \frac{pa^3}{24EI} = \frac{pa}{24EI} (6b^2 - 2ab + a^2) \text{ (negativo)}$$

para calcular la flecha en C tomamos momentos respecto al punto fijo C:

$$f_c = \frac{\sum \text{momentos (1,2) respecto C}}{EI} = \frac{\frac{pab^2}{4} \frac{2b}{3} + \frac{pa^2b}{6} \frac{b}{2}}{EI} = \frac{pab^2}{12EI} (1+b) = f_c \text{ (positiva)}$$

Análogamente, para f_a tomamos momentos respecto al punto fijo A:

$$f_a = \frac{\sum \text{momentos (1,2,3) respecto A}}{EI} = \frac{\frac{pab^2}{4} \left(a + \frac{2b}{3}\right) + \frac{pa^2b}{6} \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{pa^3}{24} \frac{4a}{5}}{EI} = \frac{pa}{60EI} \left[5b^2(3a+2b) + 5ab(2a+b) + 2a^3 \right] = \frac{pa}{30EI} (5b^3 + 10ab^2 + 5a^2b + a^3) = f_a$$

Ecuación de la elástica, tramo CB: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = \frac{pa}{2} \left(x - \frac{2}{3}a\right)$

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{dy}{dx} &= \frac{pa}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2ax}{3}\right) + C_1; \text{ para } x=1, \quad \frac{dy}{dx} = 0; \\ C_1 &= \frac{pal(1-4b)}{12} \\ EI y &= \frac{pa}{2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{3}\right) + C_1 x + C_2; \text{ para } x=1, \quad y=0; \\ C_2 &= \frac{pab^2}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$y_{CB} = \left[\frac{pa}{12EI} x^3 - 2ax^2 + 1(1-4b)x + 2b^2 \right]; \text{ compruébese que para } x=a \text{ resulta } f_c$$

en el tramo AC $\Rightarrow EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = \frac{Px^3}{6a}$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^4}{24a} + C_1; \text{ para } x=a; \quad \frac{dy}{dx} \varphi_c = -\frac{Pab}{12EI} (31-a);$$

$$C_1 = -\frac{Pa}{24} \left[2b(31-a) + a^2 \right] = -\frac{pa}{24} (6b^2 + 4ab + a^2)$$

$$EI y = \frac{Px^5}{120a} + C_1 x + C_2; \text{ para } x=a, \quad y = f_c = +\frac{Pab^2}{12EI} (1+b);$$

$$C_2 = \frac{Pa}{30} (5b^3 + 10ab^2 + 5a^2b + a^3)$$

$$y_{AC} = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^5}{120a} + \frac{a}{24} (6b^2 + 4ab + a^2)x + \frac{a}{30} (5b^3 + 10ab^2 + 5a^2b + a^3) \right];$$

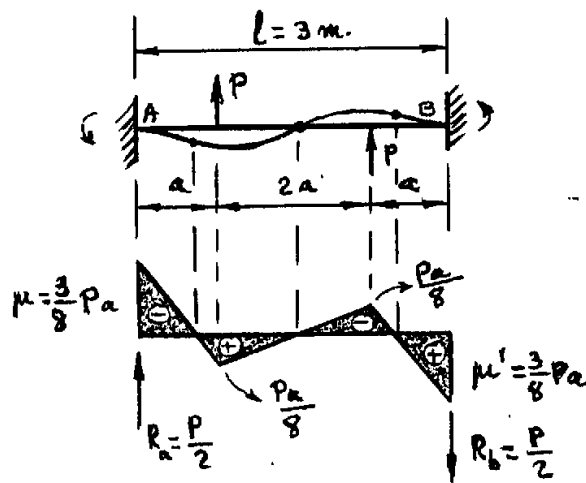
para $x=0$ sale f_a

MIR-Moscú, nº 502, pag. 177)

Calcular la viga hiperestática de la figura, determinando el valor de P , siendo $l=3$ m, $\sigma_{adm}=1600 \text{ kg/cm}^2$ y la sección de la viga anular, $D=12$ cm, $d=8$ cm.

Solución : Usando de formularios, se han calculado las reacciones hiperestática y el diagrama de momentos flectores; compruébese fácilmente.

El momento resistente vale:



$$Z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{320} = \frac{130 \pi}{3}$$

$$\sigma = \frac{M_{f \max}}{Z} = \frac{\frac{3}{8} Pa}{\frac{130 \pi}{3}} =$$

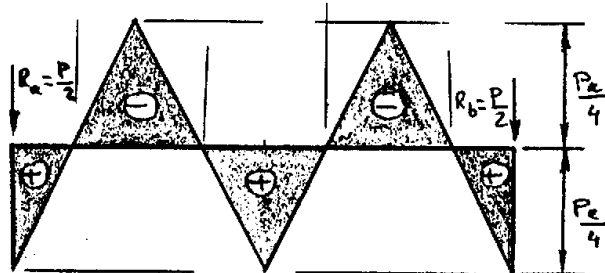
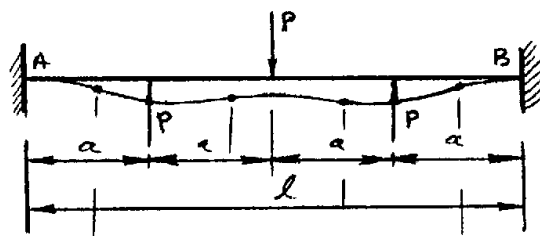
$$= \frac{9 P \frac{1}{4}}{1040 \pi} = \frac{9 P}{4160 \pi}$$

$$P = \frac{1600 \cdot 4160 \pi}{2700} \approx 7'74 \text{ Tm}$$

(MIR - Moscú, nº 503, pag. 177)

Calcular la viga hiperestática de la figura, determinando el valor de P , siendo $l=3$ m. $\sigma_{adm}=1600 \text{ kg/cm}^2$ y la sección de la viga anular, $D=12$ cm, $d=8$ cm.

Solución : De los formularios, y por el método de superposición, se han calculado las reacciones hiperestáticas y el diagrama de momentos flectores (no hay reacciones verticales hiperestáticas).



$$Z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{320} =$$

$$= \frac{130 \pi}{3} ;$$

$$\frac{Pa}{4} = \sigma Z =$$

$$= \frac{1600 \cdot 130 \pi}{3}$$

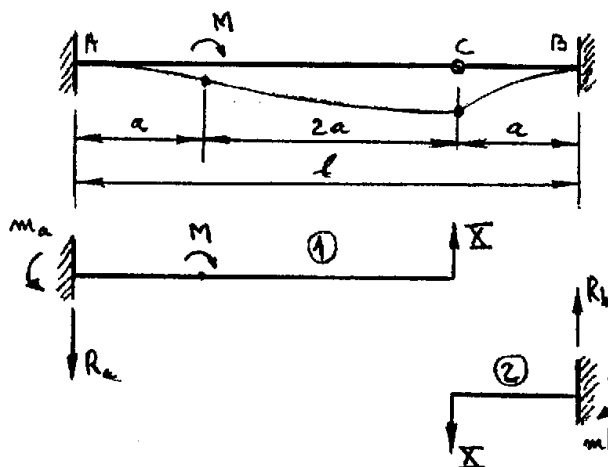
$$P = \frac{6400 \cdot 130 \pi}{3 \cdot 1/4} =$$

$$= \frac{25600 \cdot 130 \pi}{900} \approx 11'62 \text{ Tm.}$$

(MIR - Moscú, nº 510, pag. 177)

Determinar el momento flector máximo de la viga de la figura.

Solución : Sacamos las fórmulas de formularios.



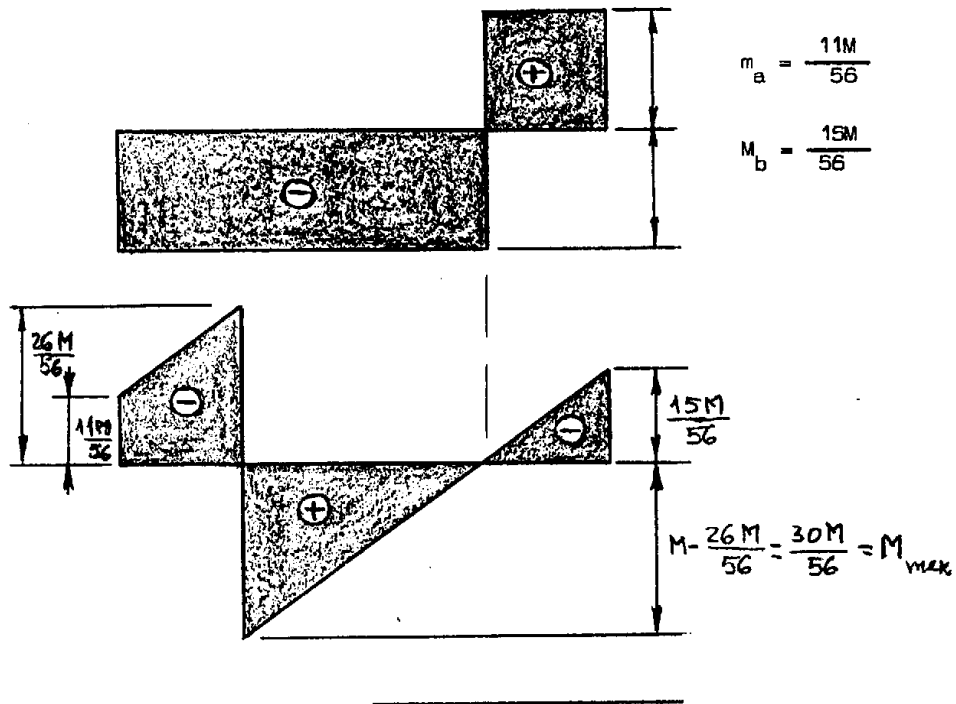
$$f_1 = \frac{M}{2EI} a(6a-a) - \frac{X(3a)^3}{3EI}$$

$$f_2 = \frac{Xa^3}{3EI}$$

$$\text{igualando, } X = \frac{15M}{56a} = R_a = R_b$$

$$M_c = 0 \Rightarrow m_a + \frac{15M}{56a} 3a -$$

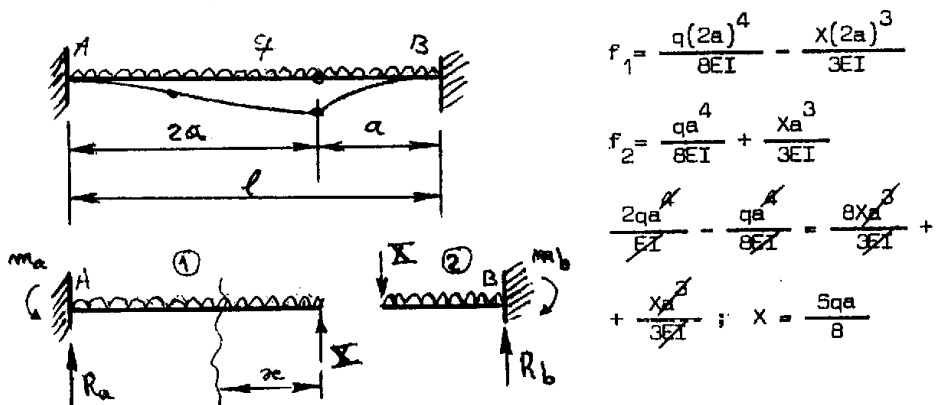
$$- M = 0 ;$$

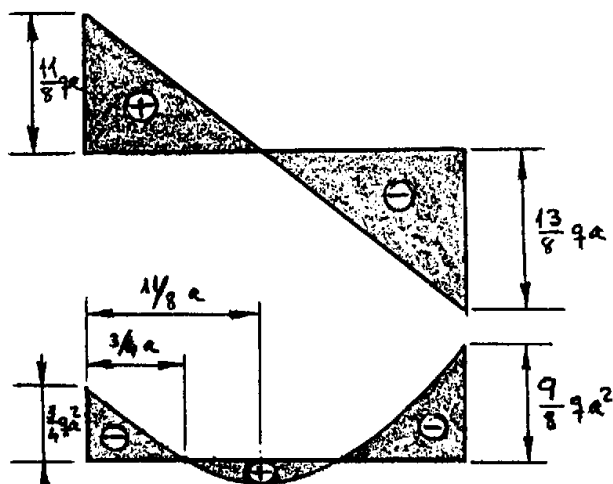


(MIR - Moscú, nº 512, pag. 177)

Determinar el momento flector máximo de la viga de la figura.

Solución : Desglosamos en dos vigas isostáticas, considerando X la reacción común, y aplicamos fórmulas sacadas de formularios, igualando flechas en C





$$R_a = 2qa - \frac{5qa}{8} =$$

$$= \frac{11qa}{8} = R_a ; R_b = 3qa -$$

$$- \frac{11qa}{8} = \frac{13qa}{8} = R_b$$

$$m_a = \frac{q(2a)^2}{2} - \frac{5qa}{8} 2a =$$

$$= \frac{3}{4} qa^2 ; m_b = \frac{9}{8} qa^2$$

$$m_x = \frac{qx^2}{2} - Rx, \text{ parábola}$$

2º grado con pendiente en origen,

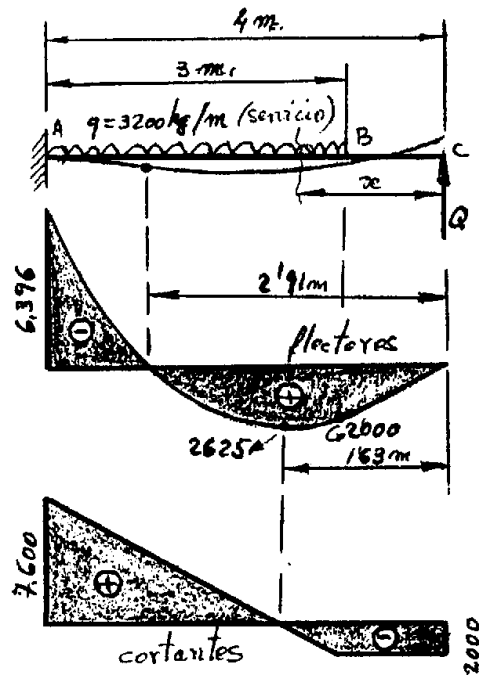
(-X) y máximo para $m_x^1 = 0 = qx - X ; x = 5/8a$

$$m_{x=5/8a} = \frac{q}{2} \frac{25}{64} a^2 - \frac{5qa}{8} \frac{5}{8} a = - \frac{25qa^2}{128} ; \text{ y se anula para}$$

$$m_x = 0 \implies \frac{qx}{2} - X = 0 ; x = \frac{5a}{4}$$

(Escuela Aparejadores Sevilla)

Dada la viga de la figura, en voladizo, calcular la carga Q de servicio que puede soportar, con los siguientes datos: perfil IB-180 (momento resistente 428 cm^3) de acero A-42 (límite elástico 2600 kg/cm^2), $\gamma_s = 1.10$, $\gamma_f = 1.40$ y margen de seguridad, M.S., = 13%; se sabe que en el empotramiento A el momento flector es negativo.



fatiga admisible,

$$\sigma_n = \frac{2600}{\sqrt{s}} = \frac{2600}{1.1} \approx 2.364 \text{ kg/cm}^2$$

$$0.13 = \frac{\sigma_n - \sigma_t}{\sigma_t} = \frac{\sigma_n}{\sigma_t} - 1;$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_t} = 1.13;$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_n}{1.13} = 2.092 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{ft} = 2092 \cdot W = 2092 \cdot 428 =$$

$$= 8953.56 \text{ cmkg} = 8954 \text{ mkg}$$

$$M_{servicio} = \frac{8954}{\sqrt{f}} =$$

$$= \frac{8954}{1.40} \approx 6396 \text{ mkg}$$

$$4Q - \frac{3200 \cdot 3^2}{2} + 6396 = 0; Q \approx 2000 \text{ kg}; R_a = 7600 \text{ kg}$$

$$M_x = Qx - \frac{q(x-1)^2}{2}; M_x = 0 \text{ para } x = \begin{cases} 2.91 \\ 0.34 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

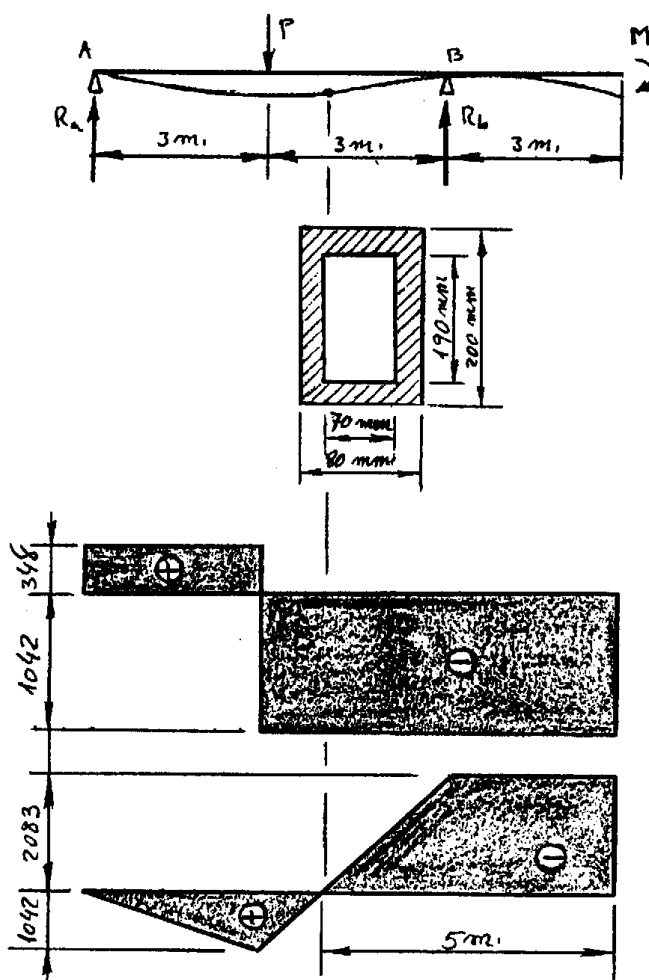
$$M_x' = Q - q(x-1) = 0; x = 1.63; M_{\max} = 2625 \text{ mkg}$$

$$M_{x=1} = Q \cdot 1 = 2000 \text{ mkg}$$

(Escuela Aparejadores - Sevilla)

En la viga de la figura, de sección recta la indicada aparte, se sabe - que a 2 m. de B y a su izquierda, hay un punto de inflexión. Calcular P y M con los datos suplementarios siguientes: acero A-42 de límite elástico 2600 kg/cm^2 ; $\gamma_s = 1.10$; M.S. = 8%; $\gamma_f = 1.4$.

Solución : $\sigma_n = \frac{2600}{1.1} = 2364 \text{ kg/cm}^2$; $1.08 = \sigma_n / \sigma_t$; $\sigma_t = \frac{2364}{1.08} = 2189 \text{ kg/cm}^2$



$$W = \frac{\frac{8.20^3}{12} - \frac{7.19^3}{12}}{10} =$$

$$= 133.2 \text{ cm}^2$$

$$M_{fmax.cálculo} = \sigma_t \cdot W =$$

$$= 2916 \text{ mkg}$$

$$M_{fmax.serv.} = \frac{2916}{1.4} =$$

$$= 2083 \text{ mkg}$$

de las condiciones de momentos flectores nulos - en A y en el lugar dado sacamos:

$$M = M_{fmax} = 2083$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= M + 3P - 6 R_b \\ 0 &= M - 2 R_b \end{aligned} \right\}$$

$$R_b = \frac{2083}{2} = 1042 \text{ kg}$$

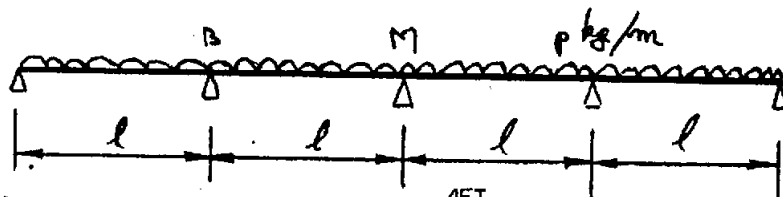
$$P = \frac{6R_b - M}{3} = \frac{6252 - 2083}{3} = 1390 \text{ kg}$$

$$R_a = 1390 - 1042 = 348 \text{ kg}$$

(Ensidesa, pag. 535)

Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura.

Solución :



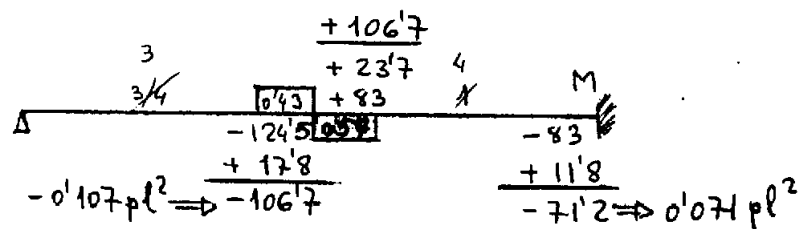
1º) Rigideces todas iguales, $h = \frac{4EI}{l}$

2º) Simplificación por simetría y extremo apoyado (M empotramiento)

3º) Rigidez virtual extremo, $k_o = k (1 - \beta \beta') = 3/4$

4º) Momentos, $\mu = \mu' = \frac{pl^2}{12} = 0.083 pl^2 < > 83$

5º) Momento inicial en B, $\mu_o = \mu + \beta \mu' = 1.5.83 = 124.5$



los diagramas de esfuerzos cortantes, reacciones y momentos flectores - están en Ensidesa.

(Ensidesa, pag. 578).

Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura.

Solución : como antes, simplificamos en extremo, $k_v = k(1 - \beta \beta') = 3/4 k$; pero también simplificamos el vano central, por simetría, con:

$$k_v = k(1 - \beta) = 1/2 k$$

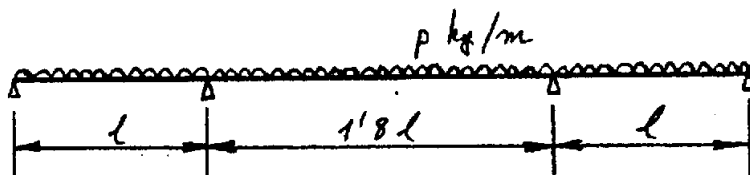
$$k_{\text{ext}} = \frac{4EI}{1} < > 4 ; k_{\text{centro}} = \frac{4EI}{1'81} < > \frac{20}{9}$$

$$\text{por } 3/4 \Rightarrow 3$$

$$\text{por } 1/2 \Rightarrow \frac{10}{9} \approx 1'11$$

$$r_1 = 0'73$$

$$r_2 = 0'27$$



$$\mu_{\text{ext}} = \frac{1}{12} p l^2 = 0'083 p l^2 < > 83$$

$$\mu_{\text{central}} = \frac{1}{12} p (1'81)^2 = 0'27 p l^2 < > 270$$

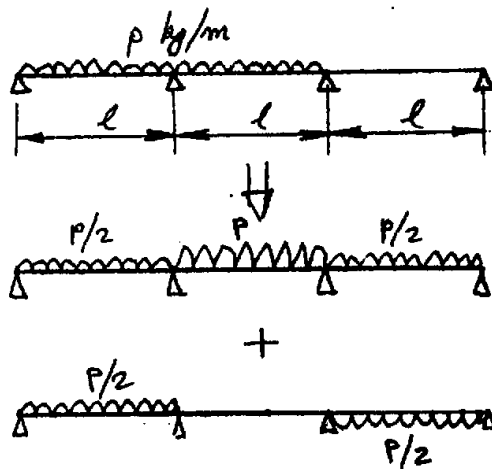
$$\begin{array}{r}
 230'7 \Rightarrow 0'231 p l^2 \\
 - 39'3 \\
 \hline
 191'4 + 270 \\
 \hline
 -124,5 \quad 0'231 \\
 -106,2 \\
 \hline
 -230,7 \Rightarrow 0'231 p l^2
 \end{array}$$

ver reacciones, diagramas esfuerzos cortantes y momentos flectores en Ensidasa.

(Ensidasa, pag. 526)

Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura.

Solución : rigideces reales iguales, $k = \frac{4EI}{l}$. Descomponemos en acción simétrica y antisimétrica, con las correspondientes simplificaciones:



$$\mu = \frac{Pl^2}{12} = 0.083 pl^2 < > 83;$$

$$\mu' = \frac{P/2l^2}{12} < > 41.5$$

$$41.5 \cdot 1.5 = 62.25$$

$$\text{extremo, } k_v = k(1 - \beta) =$$

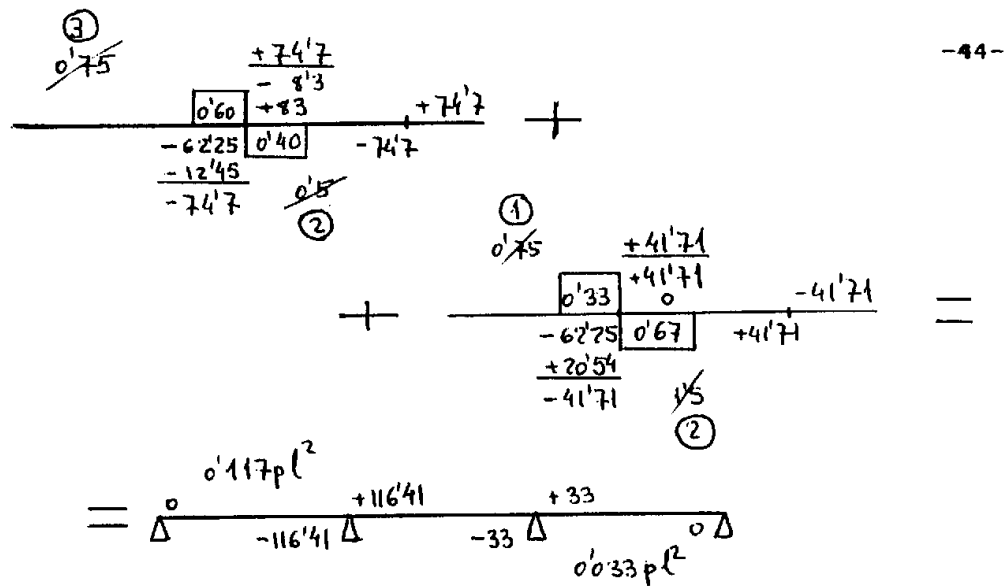
$$= \frac{3}{4} k$$

centro simetría,

$$k_v = k(1 - \beta) = \frac{1}{2} k$$

centro antisimetría,

$$k_v = k(1 + \beta) = 1.5 k$$



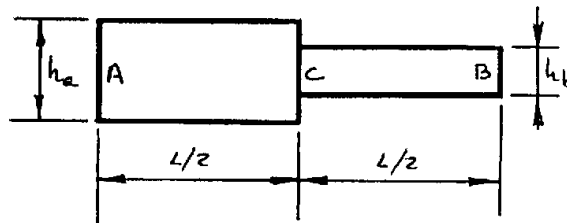
(ver reacciones, diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en Ensidesa).

(M. Vázquez, Resistencia de Materiales, pg. 554)

Determinar el coeficiente de transmisión, β_a , y el de rigidez, k_a , de una viga de sección rectangular, de ancho constante b y de canto h , variable, como muestra la figura. Aplicación: $b = 20$ cm., $h_a = 60$ cm., $h_b = 30$ cm., $L = 4$ m., $E = 2.000.000$ kg/cm².

Solución: Suponemos la viga apoyada en A, empotrada en B según fórmulas de Fernández Casado y con

$$\frac{I_b}{I_a} = \left(\frac{h_b}{h_a} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

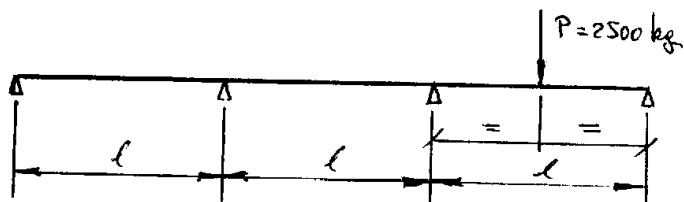


$$\beta_a = \frac{\int_0^L x' \cdot x \cdot r \cdot dx}{\int_0^L x^2 \cdot r \cdot dx} = \frac{\int_0^{L/2} (1-x) \cdot x \cdot (h_b/h_a)^3 \cdot dx + \int_{L/2}^L (1-x) \cdot x \cdot dx}{\int_0^{L/2} x^2 \cdot (h_b/h_a)^3 \cdot dx + \int_{L/2}^L x^2 \cdot dx} =$$

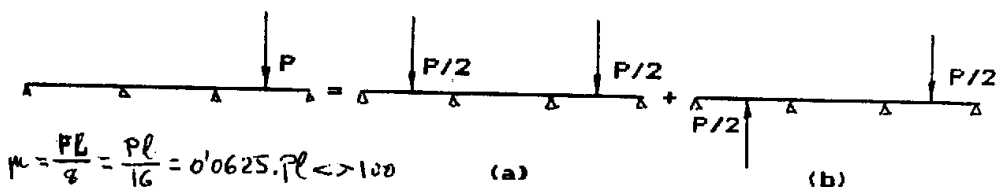
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot \left(\frac{1 \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + \left(\frac{1 \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_{\frac{l}{2}}^l}{\left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{\frac{l}{2}} + \left(\frac{x^3}{3}\right)_{\frac{l}{2}}^l} = \\
 &= \frac{\left[\left(\frac{hb}{ha}\right)^3 + 1\right] \frac{2 \cdot l^3}{24}}{\left[\left(\frac{hb}{ha}\right)^3 + 7\right] \frac{l^3}{24}} = \frac{2(Ia + Ib)}{7 \cdot Ia + Ib} = \frac{6}{19} = 0,316
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ka &= \frac{E \cdot Ia \cdot L}{\int x^2 \cdot r \cdot dx - \beta \int x \cdot r \cdot dx} = \\
 &= \frac{E \cdot Ib \cdot L}{\int_0^{\frac{l}{2}} (1-x) \cdot \left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (1-x) \cdot dx - \beta \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot dx - \beta \int_{\frac{l}{2}}^l x \cdot dx} = \\
 &= \frac{E \cdot Ib \cdot L}{\left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot \frac{3 \cdot l^2}{8} + \frac{l^2}{8} - \beta \left(\frac{hb}{ha}\right)^3 \cdot \frac{l^2}{8} - \beta \frac{3 \cdot l^2}{8}} = \frac{8 \cdot E \cdot Ib}{155} = \\
 &= 4,64 \times 10^8 \text{ cmkg}
 \end{aligned}$$

Resolver mediante el método de Cross la viga de la figura, calculando momentos flectores y reacciones, así como diagramas respectivos.

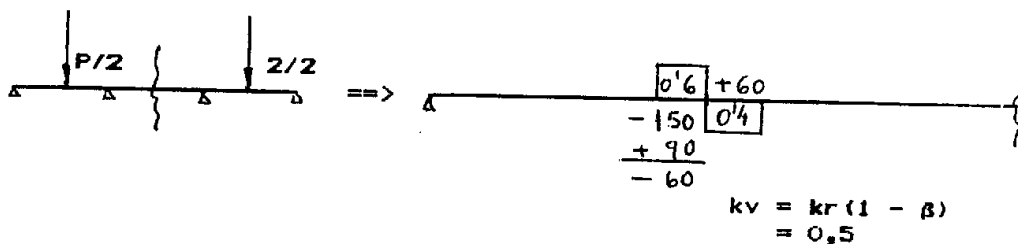


Solución: la descomponemos en simetría y antisimetría mediante el esquema siguiente:



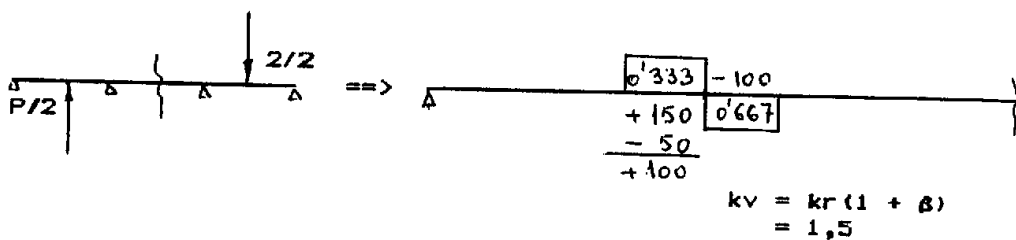
viga (a)

$$k_v = k_r (1 - \beta \beta^2) = 0,75$$

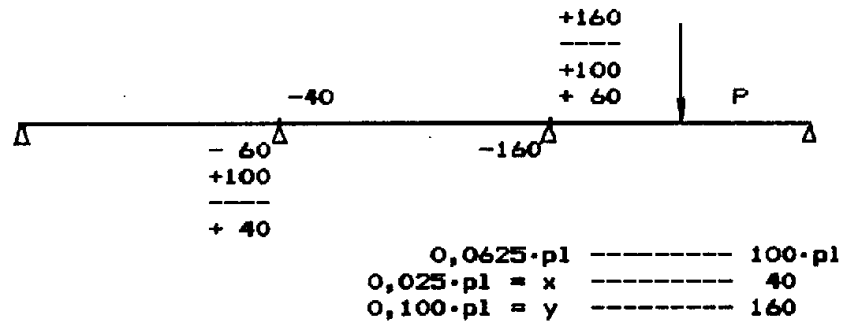


viga (b)

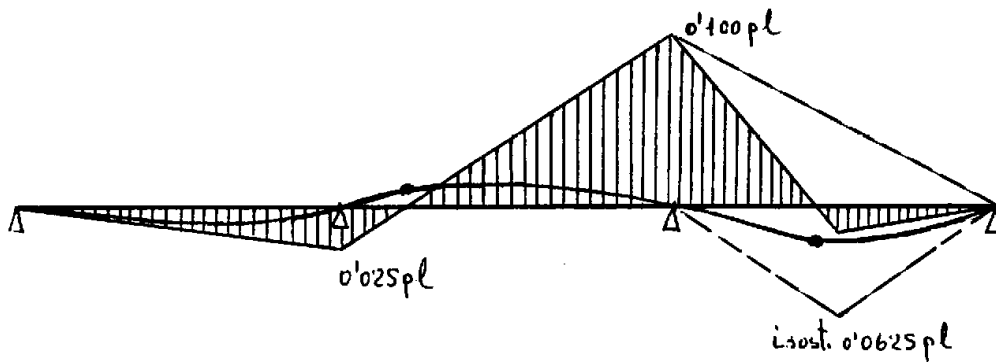
$$k_v = k_r (1 - \beta \beta^2) = 0,75$$



con lo que resultan los momentos finales siguientes:



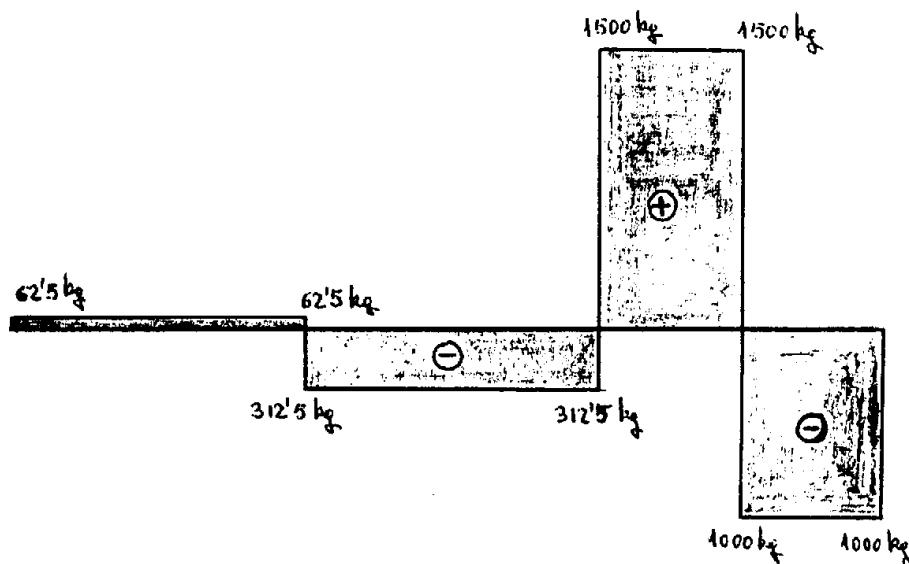
Ya se puede dibujar el diagrama de flectores:



Las reacciones son suma de isostáticas e hiperestáticas y estas últimas en cada barra son suma algebraica de los momentos correspondientes:

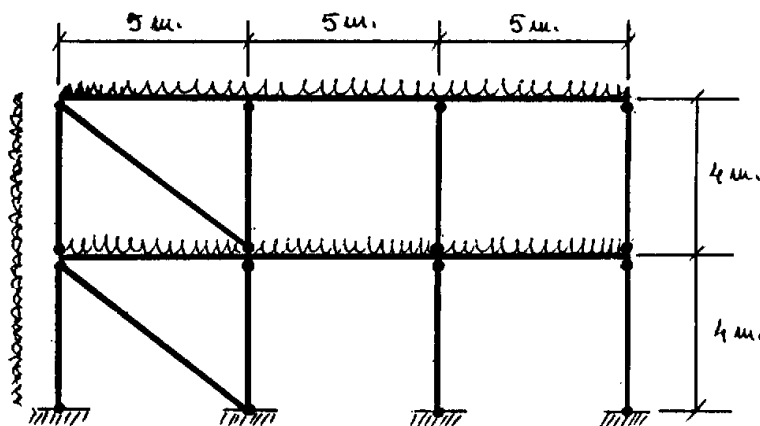
	△	△	△	△
isost.	0	0	0	0
hiper.	↑ 0'025 P	0'025 P ↓ 0'125 P	0'125 P ↑ 0'100 P	0'100 P ↓ 0'0625 P
suma	↑ 0'025 P	0'15 P ↓	0'225 P ↑	0'14 P ↑
x2500	62,5 kg.	375 kg.	1812,5 kg.	1000 kg.

En la página siguiente aparece el diagrama de cortantes:



(Escuela de Arquitectura - Sevilla)

En la estructura de la figura calcular (por Cross y métodos auxiliares de Cremona o similares) los perfiles necesarios. $E = 2.000.000\text{ kg/cm}^2$, $\sigma_t = 1600\text{ kg/cm}^2$. Las barras horizontales son continuas y todos los pilares son doblemente articulados. El efecto de viento es constante y siempre de valor 360 kg/m ; pero en los dinteles se tendrán en cuenta la terna de valores siguientes:

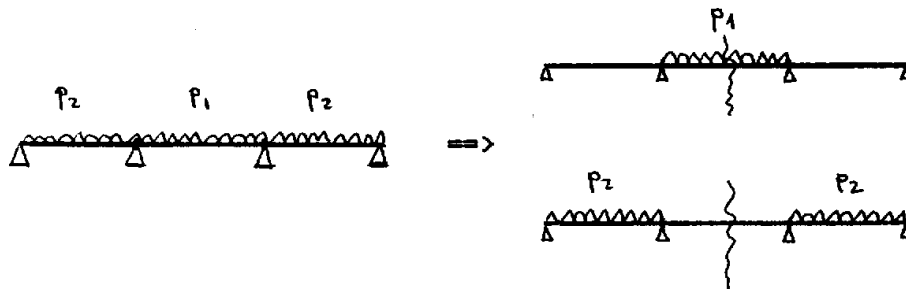


1º) Piso superior 3.260 kg/m , carga uniformemente repartida; piso inferior 4.725 kg/m idem.

2º) Piso superior con 3.260 kg/m en vanos extremos y 1.500 kg/m en central; piso inferior con 4.725 kg/m en vanos extremos y 1.500 kg/m en central; y siempre cargas uniformemente distribuidas.

3º) Piso superior 1.500 kg/m en extremos y 3.260 kg/m en central; piso inferior con 1.500 kg/m en extremos y 4.725 kg/m en central, distribuidas de forma análoga.

Solución: Debido a los tirantes inclinados, la estructura se puede considerar como intraslacional y el efecto del viento actuando solamente en el primer vano izquierdo. En todos los casos las vigas se consideran como de tres vanos, sin acciones axiales, con cargas repartidas. Para normalizar el cálculo tomaremos una viga tipo sobre cuatro apoyos y vanos de igual longitud, con cargas p_1 kg/m en vano central y p_2 kg/m en extremos. Emplearemos superposición y simetría:



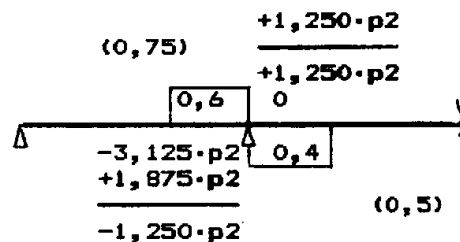
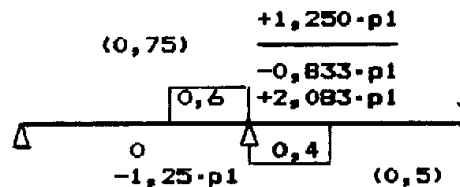
$$\mu_1 = \frac{p_1 \cdot l^2}{12} = \frac{25 \cdot p_1}{12} = 2,083 \cdot p_1$$

$$\mu_2 = \frac{p_2 \cdot l^2}{12} = 2,083 \cdot p_2;$$

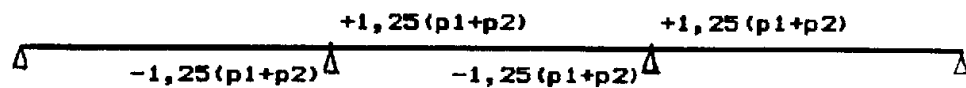
$$2,083 \times 1,5 = 3,125 \cdot p_2$$

$$\text{izquierda: } k_v = k_r (1 - \beta \beta') = 0,75$$

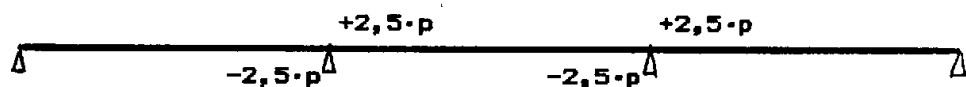
$$\text{centro: } k_v = k_r (1 - \beta) = 0,5$$



suma dinteles para el caso $p_1 \neq p_2$:



y para $p_1 = p_2 = p$ resulta:



Se resumen en un cuadro todos los valores de momentos flectores, con los datos de cada caso, para analizar los más desfavorables:

piso superior:

1º)	$p = 3260$	$2,5 \cdot p$	$8150 \text{ mkg} = 815.000 \text{ cmkg}$
2º y 3º)	$p_1 = 1500$ $p_2 = 3260$	$1,25(p_1+p_2)$	$5950 \text{ mkg} = 595.000 \text{ cmkg}$

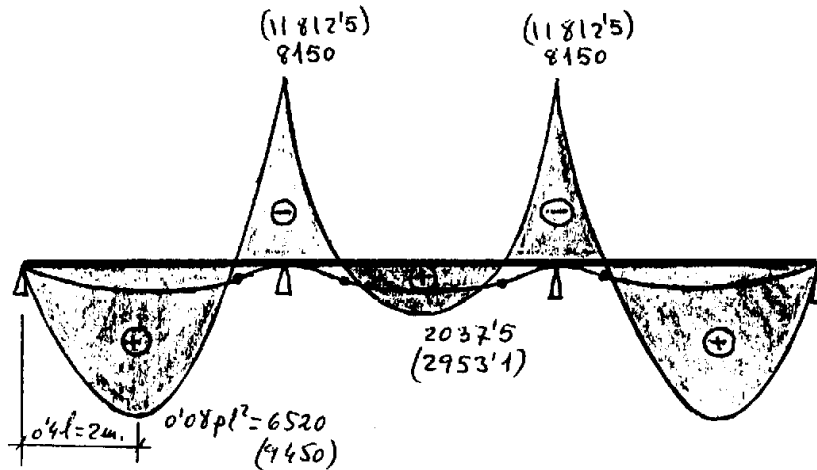
piso inferior:

1º)	$p = 4725$	$2,5 \cdot p$	$11812,5 \text{ mkg} = 1.181.250 \text{ cmkg}$
2º y 3º)	$p_1 = 1500$ $p_2 = 4725$	$1,25(p_1+p_2)$	$7781,5 \text{ mkg} = 778.125 \text{ cmkg}$

Definiremos ambos dinteles con los casos 1°), que son los más desfavorables, dibujando los diagramas de momentos flectores, cortantes y reacciones.

Piso superior: $p = 3260 \text{ kg/m}$

Piso inferior: $p = 4725 \text{ "}$, los mismos cálculos, con valores entre paréntesis

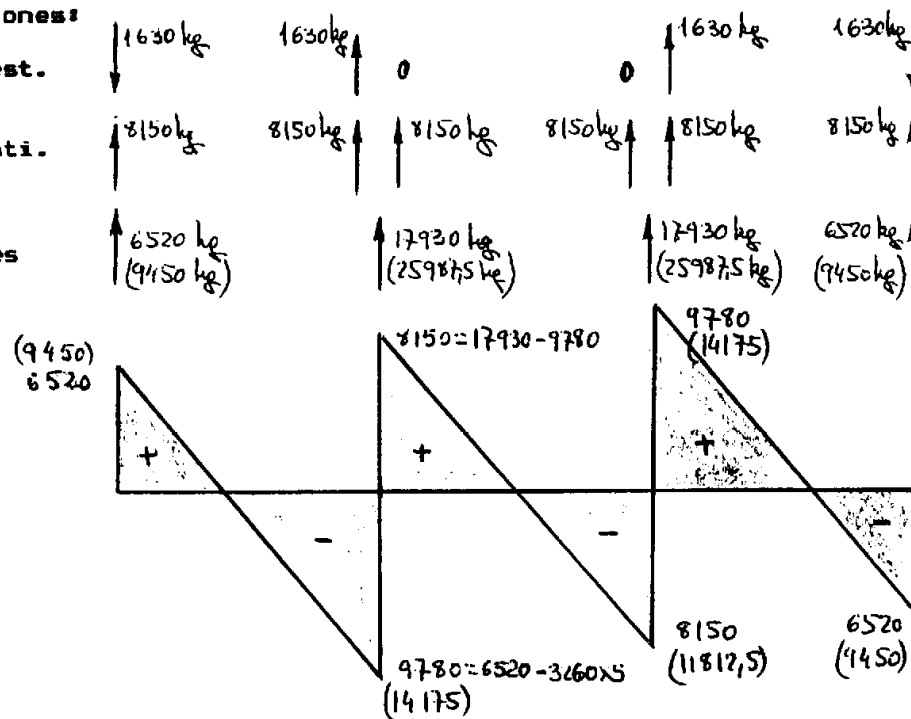


reacciones:

hiperest.

isostáti.

totales

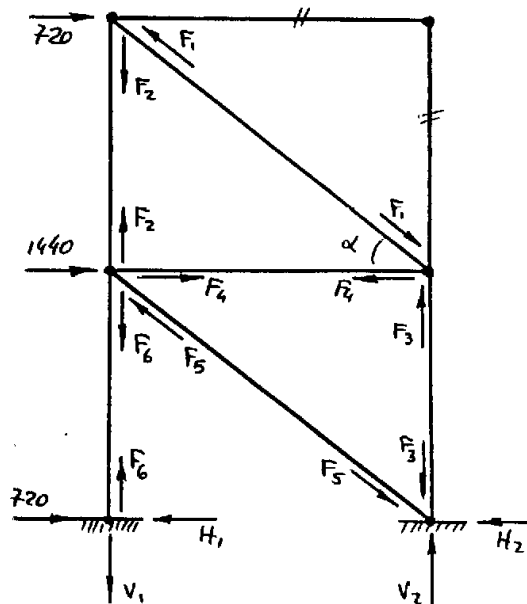


Acción del viento:

Suponiendo que las rios-
tras 5-4, 3-2 absorben el
desplazamiento lateral, la
estructura, como ya se di-
jo, se considera intrasla-
cional. Además, las barras
5-6 y 6-4 no trabajan. Las
acciones del viento pro-
ducen, por un lado, fle-
xión directa en las ba-
rras 1-3, 3-5, con distri-
bución parabólica de va-
lor máximo:

$$M_{\max.} = \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{360 \cdot 4^2}{8}$$

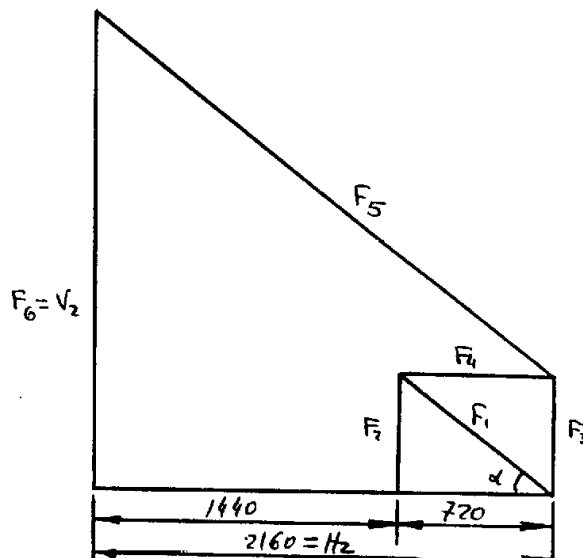
$$= 720 \text{ mkg} = 72.000 \text{ cmkg}$$



Pero las fuerzas concentradas actúan en los nudos 1,3,5.
Calculamos mediante Cremona:

$$H_1 = 720 \text{ kg} ; H_2 = 360 \cdot 8 - 720 = 2.160 \text{ kg}$$

$$\Sigma M_1 = 0 \implies 1440 \cdot 4 + 720 \cdot 8 = V_2 \cdot 5 \implies \uparrow V_2 = 2304 \text{ kg} = V_1 \downarrow$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad F_1 = \frac{720}{\cos \alpha} \approx 922 \text{ kg} \quad ; \quad F_2 = 720 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 576 \text{ kg}$$

$$F_3 = F_2 = 576 \text{ kg} \quad ; \quad F_4 = 720 \text{ kg} \quad ;$$

$$F_5 = \frac{1440 + 720}{\cos \alpha} \approx 2766 \text{ kg} \quad ; \quad F_6 = (1440 + 720) \cdot \operatorname{tg} \alpha + F_2 =$$

$$= 2304 \text{ kg}$$

Ahora ya se pueden dimensionar cada un de las barras:

Dintel superior, flexión directa, momento máximo 815.000 cmkg

$$W = \frac{815.000}{1.600} \approx 509 \text{ cm}^3, \text{ PNI 280, peso 48 kg/m, } p = 3308 \text{ kg/m}$$

$$\text{nuevo momento corregido 827.000 cmkg, } \sigma_t = \frac{827000}{542} \approx 1526 <$$

< 1600, válido

$$\text{flecha máxima, } f = 3'22 \frac{(p/10) \cdot (l/100)^4}{I} \approx 0'88 \text{ cm} <$$

(de Nonnast)

(1/500) = 1 cm, válido

Dintel inferior, flexión directa, momento máximo 1.181.250 cmkg

repitiendo idéntico cálculo se obtiene PNI 320, peso 61'1 kg/m

$p = 4786 \text{ kg/m}$ y el momento corregido $1.196.525 \text{ cmkg}$

$$\sigma_t = \frac{1196525}{782} \approx 1530 < 1600, \text{ válido}$$

flecha máxima $f \approx 0.77 \text{ cm}$, válido.

Para los pilares consideramos el caso más desfavorable, por pisos, tomando los de cada piso todos de la misma dimensión.

En el piso superior el pilar izquierdo soporta 6520 kg de transmisión del dintel, 576 kg negativos de efecto viento y 120 kg peso propio del dintel; en total, 6064 kg . Mientras que el pilar segundo izquierdo soporta 17930 kg de transmisión del dintel y 240 kg del peso propio del mismo dintel; en total 18170 kg y a compresión.

Según la Norma MV 103, artículo 3.4, la longitud de pandeo coincide con la geométrica, $l = 400 \text{ cm}$; tomando dos perfiles en U de 100 y en cajón a tope

$$A = 27 \text{ cm}^2, \quad i_y = 3.75 \text{ cm}, \quad \lambda = 400/3.75 = 107, \quad \omega = 2.22$$

$$\sigma_t = \frac{18170 \cdot 2.22}{27} \approx 1494 < 1600, \text{ válido}$$

El pilar izquierdo del piso superior se debe comprobar ahora a compresión (los referidos 6064 kg anteriores) y flexión por viento (72.000 cmkg que se calcularon más atrás):

$$\sigma_t = \frac{72000}{82.4} + \frac{6064 \cdot 2.22}{27} \approx 1372 < 1600, \text{ válido}$$

En el piso inferior se transmiten los valores del piso superior; también es el pilar segundo izquierdo el más cargado con: 18170 kg que provienen del superior, 25988 kg trasladados del dintel inferior, 306 kg peso propio del dintel y el efecto (F3) de 576 kg del viento; en total 45.040 kg. Tomando la misma solución y con dos U de 160


$$A = 48 \text{ cm}^2, \quad i_y = 5.03 \text{ cm}, \quad \lambda = 400/5.03 = 80, \quad \omega = 1.51$$

$$\sigma_t = \frac{45040 \cdot 1.51}{48} \approx 1416 < 1600, \text{ válido}$$

También ahora se debe comprobar el pilar izquierdo a compresión y flexión combinadas. La compresión vale

$$6064 \text{ (de piso superior)} + 9450 \text{ (de piso inferior)} + 153 \text{ (peso dintel inferior)} - 2304 \text{ (acción del viento, tracción)} = 13.363 \text{ kg}$$

$$\sigma_t = \frac{72000}{232} + \frac{13363 \cdot 1.51}{48} \approx 731 < 1600, \text{ válido}$$

Respecto a las barras de arriostramiento, ambas trabajan a compresión y la fuerza mayor, F5, es de 2766 kg \approx 3000 kg, longitud 6.40 m. Tomaremos dos angulares de lados desiguales en disposición , de 100.50.8, con separación s = 30 mm

$$A = 18 \text{ cm}^2, \quad i_y = 2.93, \quad \lambda = 640/2.93 = 218.4, \quad \omega = 8.05$$

$$\sigma_t = \frac{3000 \cdot 8.05}{18} \approx 1342 < 1600, \text{ válido}$$

(Ensidesa, pág. 686)

Resolver por el método de Cross el pórtico de la figura.

Solución: primeramente, vamos a calcular los valores de reacciones, que más tarde comprobaremos por Cross:

$$k = \frac{12 \cdot h}{11 \cdot s} = 1$$

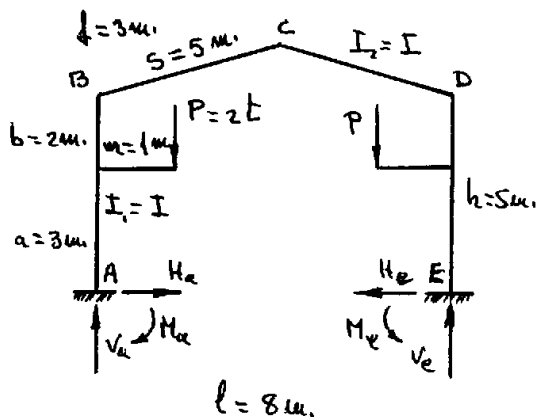
$$\vec{H}_A = \frac{6 \times 2}{5} \cdot \left[\frac{5 \times 10 - 2 \times 7}{260} \right] \approx 0,332 \text{ t}$$

$$\vec{M}_A = \frac{2}{5} \cdot \left[\frac{-45 + 25 \times 23 - 6 \times 48 - 60 \times 3}{260} \right] \approx 0,095 \text{ mt}$$

$$\vec{M}_B = 0,095 - 0,332 \times 5 + 2 = 0,435 \text{ mt.}$$

Para el cálculo por Cross comenzamos calculando los momentos de empotramiento perfecto:

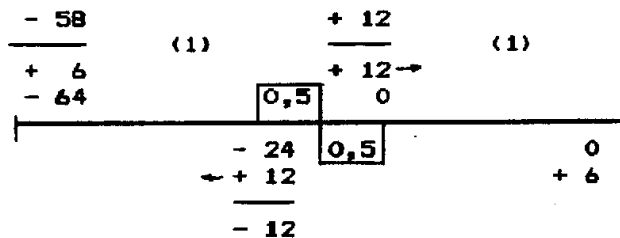
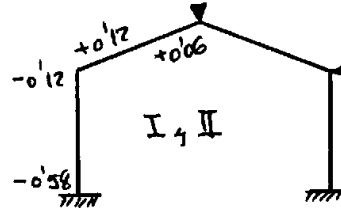
$$\mu_1 = \left[4 \frac{a}{1} - 3 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right] \cdot P \cdot m \approx 0,64 < 64$$



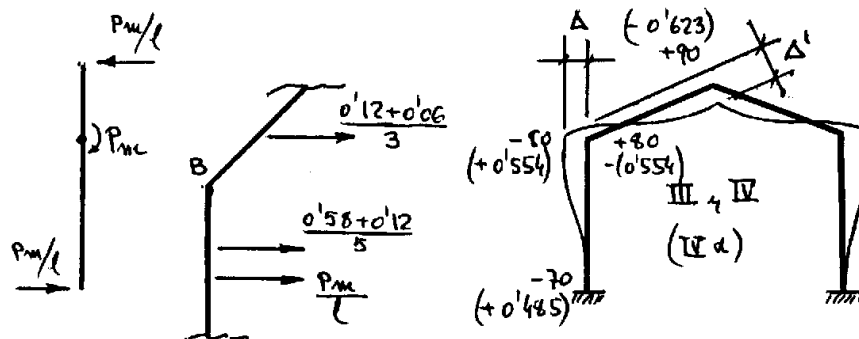
$$\mu_2 = \left[4 \frac{b}{l} - 3 \frac{b^2}{l^2} - 1 \right] \cdot P \cdot a \approx 0,24 < 24$$

El pórtico y las cargas poseen simetría total; las rigideces de pilar y dintel son iguales ($I_1 = I_2 = I$); coeficientes de reparto 0,5.

Etapas I y II:



Existen, además, etapas III y IV; seguimos completamente a Fernández Casado, Cálculo de Estructuras Reticulares, pág. 114:



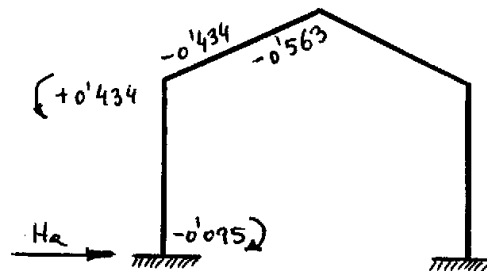
$$\Delta = \Delta' \frac{f}{s} = \frac{3}{5} \Delta' ; \frac{6E \cdot I_p \cdot \Delta}{h^2} < 60 ; \frac{6E \cdot I_d \cdot \Delta'}{s^2} < 60 \frac{5}{3} = 100$$

- 70		+ 80
- 10		- 20
- 60	0,5	+ 100
	- 60	0,5
	- 20	+ 100
	- 80	- 10
		+ 90

	Isostá.	I y II	III y IV α
Pilar	$\frac{P \cdot m}{1} = \frac{2}{5}$	$\frac{0,58 + 0,12}{5}$	$\frac{70 + 80}{5} \alpha$
Dintel	-	$\frac{0,12 + 0,06}{3}$	$\frac{80 + 90}{3} \alpha$
	+ 0,40	+ 0,20	+ 86,6 α

$$\alpha = - 0,0069$$

Multiplicando la etapa IV por α y sumando la II quedan los valores finales:



$$\overrightarrow{H_A} = \frac{P \cdot m}{1} - \frac{0,434 - 0,095}{h} = 0,332 \text{ t}$$

(Ensidesa, pág. 677)

Resolver por el método de Cross el pórtico de la figura.

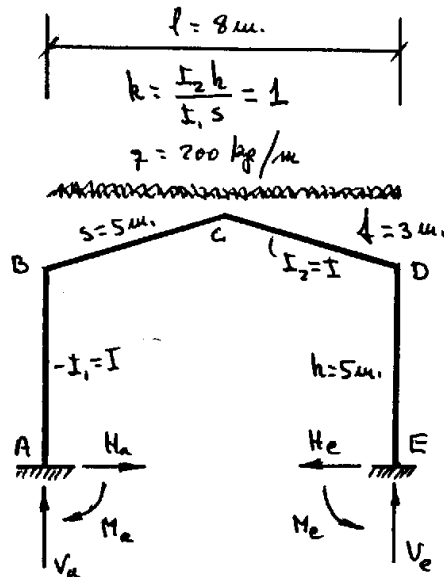
Solución: como en el caso anterior, primeramente vamos a calcular los valores de reacciones, que más tarde comprobaremos por Cross:

$$\begin{aligned} \vec{H}_A = \vec{H}_E &= \frac{200 \times 64}{8} \cdot \frac{38}{260} \approx \\ &\approx 233,85 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_E = \frac{200 \times 64}{48} \cdot \frac{5 \times 85 + 3 \times 27}{260} \approx 518,97 \text{ mkg}$$

$$M_B = M_D = - \frac{200 \times 64}{48} \cdot \frac{5 \times 125 + 9}{260} \approx 650,26 \text{ mkg}$$

$$M_C = \frac{200 \times 64}{8} + 518,97 - 233,85 \times 8 \approx 248,17 \text{ mkg.}$$



Para el cálculo por Cross comenzamos calculando los momentos de empotramiento perfecto en dintel (con simplificación simétrica):

Para las etapas III y IV nos remitimos al problema anterior y al mismo texto de Fernández Casado, págs. 82 y 114:

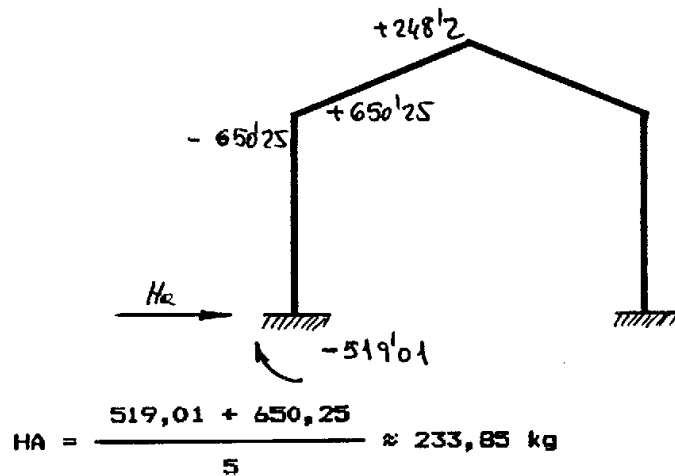
$$\begin{array}{rcl}
 -66,6 & (1) & +133,3 \\
 \hline
 0 & & -133,3 \\
 & & \hline
 & & 0,5 + 266,6 \\
 \hline
 & 0 & 0,5 \\
 & -133,3 & -266,6 \\
 & \hline
 & -133,3 & -66,6 \\
 & & \hline
 & & -333,3
 \end{array}$$

	Isostá.	Etap. II	Etap. IV
Pilar	-	$\frac{66,6 + 133,3}{5}$	$\frac{70 + 80}{5} \alpha$
Dintel	$\frac{p \cdot l^2}{2 \cdot f} = 533,3$	$\frac{133,3 - 333,3}{3}$	$\frac{80 + 90}{3} \alpha$
	- 533,3	-26,6	+ 86,6 α

$$\alpha = 6,46$$

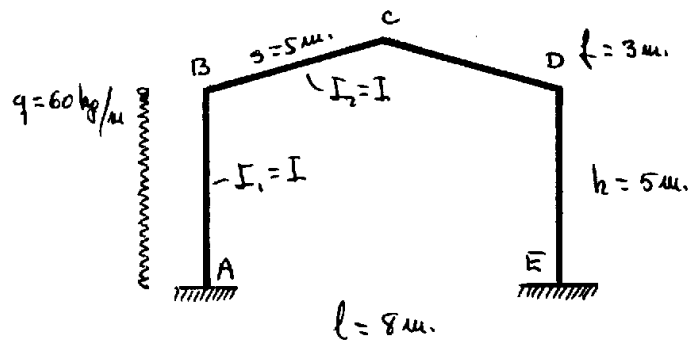
$$\begin{array}{rcl}
 -452,31 & & +516,92 \\
 \hline
 & -516,92 & +581,53
 \end{array}$$

Multiplicando la etapa IV por α y sumando la II quedan los valores finales:

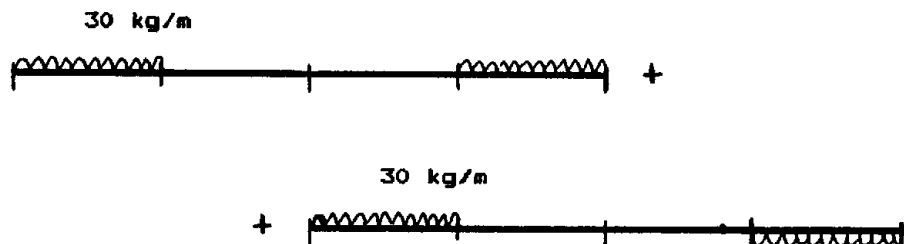


(Ensidesa, pág. 679)

Resolver por el método de Cross el pórtico de la figura.

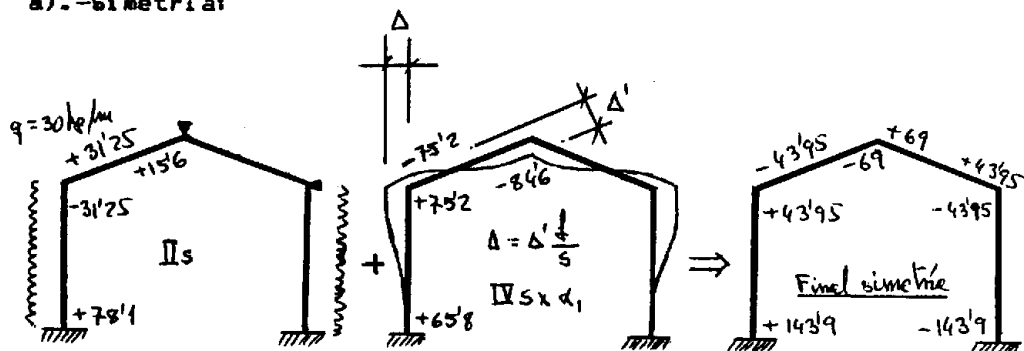


Solución: Siguiendo, como en los dos casos anteriores, a Fernández Casado, empleamos combinación de simetría y antisimetría:

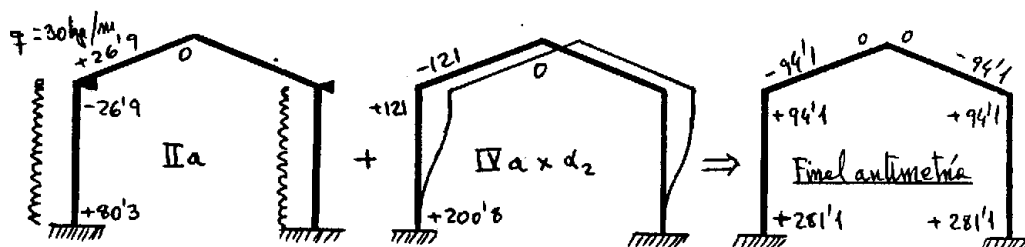


Vamos resolviendo con arreglo a los siguientes esquemas, cuyos cross están más abajo:

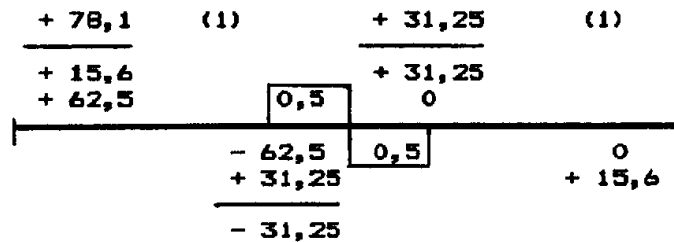
a). - Simetría:



b). - Antisimetría:



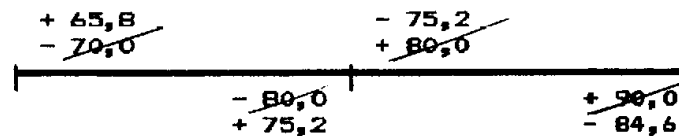
Para la etapa II calculamos los momentos de empotramiento perfecto del pilar, $p = p' = (p \cdot h^2)/12 = (30 \times 5^2)/12 = 62,5$ mkg, resultando el cross siguiente:



Para las etapas III y IV nos remitimos a los dos problemas anteriores o al texto del Fernández Casado:

	Isostá.	Etapa II	Etapa IV
Pilar	$\frac{30 \times 5}{2}$	$\frac{78,1 - 31,25}{5}$	$\frac{70 + 80}{5} \alpha 1$
Dintel	-	$\frac{31,25 + 15,60}{3}$	$\frac{80 + 90}{3} \alpha 1$
	+ 75,00	+ 6,25	86,7 $\alpha 1$

$$\alpha 1 = - 0,94$$



Para la antimetria el clave es articulación y pasamos a rigideces virtuales:

$$\begin{array}{rcl}
 + 80,3 & (1) & + 26,9 & (0,75) \\
 + 17,8 & \cancel{(1)} & + 26,9 & \cancel{(1)} \\
 + 62,5 & & 0 & \\
 \hline
 & 0,57 & & \\
 \hline
 - 62,5 & & 0,43 & \\
 + 35,6 & & & \\
 \hline
 - 26,9 & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$k_v = k(1 - \beta\beta') = 3/4$$

Las etapas III y IV antisimétricas son:

$$\frac{6E \cdot I_p \cdot \Delta}{h^2} = 0,24 E \cdot I_p \cdot \Delta < 24$$

$$\begin{array}{rcl}
 +200,8 & & -121,0 \\
 + 17,1 & (1) & - 10,3 & (0,75) \\
 \hline
 - 6,9 & \cancel{(1)} & - 10,3 & \cancel{(1)} \\
 + 24,0 & & 0 & \\
 \hline
 & 0,57 & & \\
 \hline
 + 24,0 & & 0,43 & \\
 - 13,7 & & & \\
 \hline
 + 10,3 & & & \\
 +121,0 & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

	Isostá.	Etapas II	Etapas IV
Pilar	$2x \frac{30 \times 5}{2}$	$2x \frac{80,3 - 26,9}{5}$	$2x \frac{17,1 + 10,3}{5} \alpha_2$
	+ 150,0	- 21,36	- 10,96 α_2

$$\alpha_2 = 11,74$$

Sumando simetría y antimetría se obtiene el resultado final, cuyos valores salen del mismo orden que por las fórmulas del prontuario de Ensidesa:

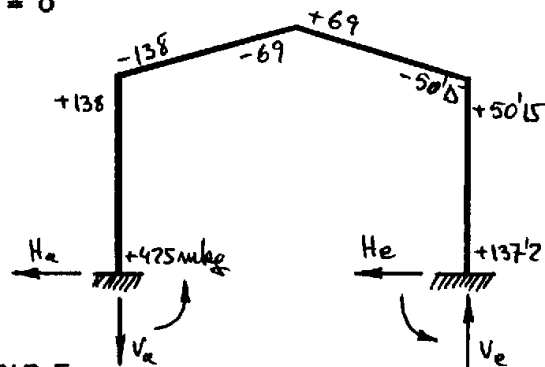
$$\Sigma M_A = 0$$

$$425 + 137,2 + 8 \cdot V_E - \frac{60 \times 25}{2} = 0$$

$$V_E = 23,4 = V_A$$

$$H_E = \frac{137,2 + 50,15}{5} = 37,5$$

$$H_A = \frac{425 + 138}{5} + \frac{60 \times 5}{2} = 262,5$$

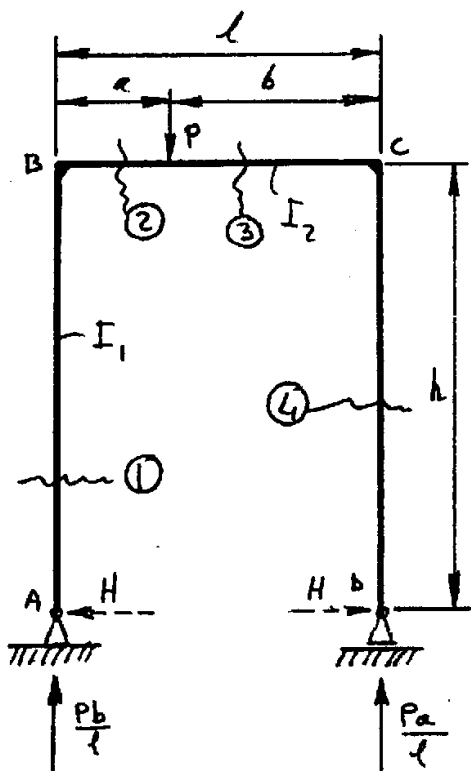


(Wittenbauer, II n° 237, pág.38) (Ver otra solución del mismo problema en el citado Wittenbauer.)

Determinar, por el método de Castigliano, el desplazamiento de la articulación móvil D del pórtico de la figura.

Solución: las reacciones verticales son isostáticas y sus valores se calculan fácilmente; para el desplazamiento colocamos la fuerza de trazos H (infinitesimal), que luego anularemos en las integrales:

$$M_1 = H \cdot x \quad ; \quad \frac{\partial M_1}{\partial H} = x \quad ; \quad M_4 = M_1 = H \cdot x$$



$$M_2 = Hh + \frac{Pb}{l} x; \quad \frac{\partial M_2}{\partial H} = h$$

$$M_3 = Hh - P(x-a) + \frac{Pb}{l} x;$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial H} = h; \text{ anulando } H:$$

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \delta = \frac{-1}{EI_2} \int_a^l P(x-a) h dx +$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \int_0^a \frac{Pbh}{l} x dx =$$

$$= \frac{-1}{EI_2} Ph \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^l +$$

$$+ \frac{Pbh}{2EI_2} \frac{l^2}{2} = \frac{Ph}{2EI_2} (-b^2 + bl) =$$

$$= \frac{pab}{2EI_2}$$

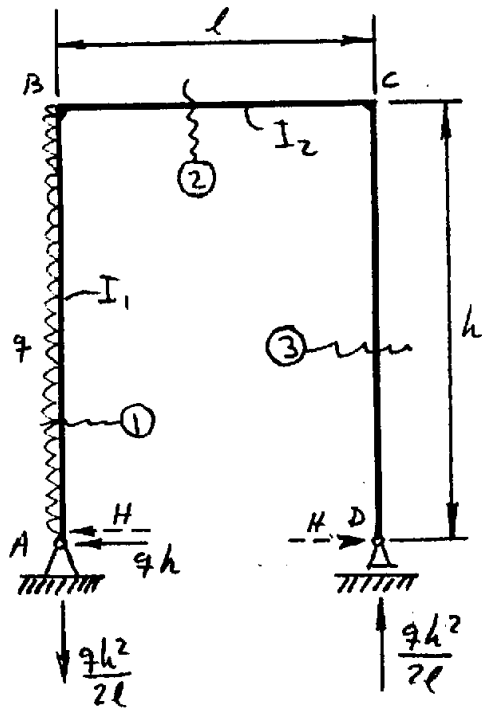
(Wittembaner, II, nº 238, pag. 38) (Ver otra solución en Witt.)

Determinar el desplazamiento de la articulación móvil D del pórtico de la figura.

Solución : Se opera idénticamente al anterior:

$$M_1 = (qh + H) x - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial H} = x$$



$$M_2 = (qh + H)h - \frac{qh^2}{2} - \frac{qh^2}{2l}x;$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial H} = h; \quad H = 0$$

$$M_3 = Hx$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial H} = x$$

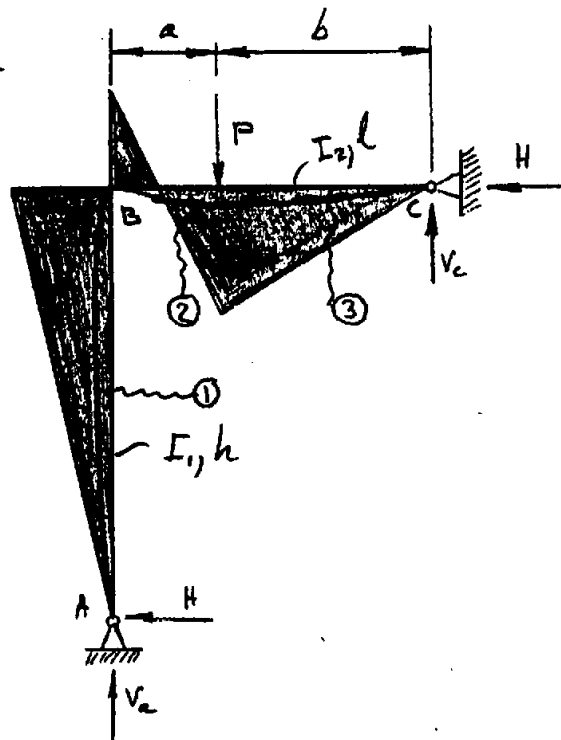
$$\begin{aligned} \delta = \frac{\partial U}{\partial H} &= \frac{1}{EI_1} \int_0^h (qh x^2 - \frac{qx^3}{2}) dx + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \int_0^l (qh^3 - \frac{qh^3}{2} - \frac{qh^3}{2l}x) dx = \\ &= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{qh^4}{3} - \frac{qh^4}{8} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left(\frac{qh^3 l}{2} - \frac{qh^3 l}{4} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{5qh^4}{24EI_1} + \frac{6qh^3 l}{24EI_2} = \frac{qh^3 l}{23EI_2} \left(5 \frac{I_2 h}{I_1 l} + 6 \right)$$

(Wittembaner, I, nº 435, pag. 74)

Hallar las reacciones y momento flector máximo de la figura, en el dintel.

Solución : (ver otra solución en el propio Wittembaner). Resolvemos por Castigliano.



$$V_a + V_c = P ; \quad M_c = 0 ;$$

$$Pb + Hh - V_a l = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial H} = \frac{h}{l}$$

$$M_1 \Big|_c^h = Hx ; \quad \frac{\partial M_1}{\partial H} = x$$

$$M_2 \Big|_0^a = Hh - V_a x ;$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial H} = h - x \frac{\partial V_a}{\partial H} = \frac{h}{l} (1-x)$$

$$M_2 \Big|_0^a = Hh - V_a x ; \quad \frac{\partial M_2}{\partial H} = h - x \frac{\partial V_a}{\partial H} = \frac{h}{l} (1-x)$$

$$M_3 \Big|_a^b = Hh + P(x-a) - V_a x ; \quad \frac{\partial M_3}{\partial H} = h - x \frac{\partial V_a}{\partial H} = \frac{h}{l} (1-x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 = \frac{1}{I_1} \int_0^h Hx^2 dx + \frac{1}{I_2} \int_0^a (Hh - V_a x) \frac{h}{l} (1-x) dx + \frac{1}{I_2} \int_a^l [Hh +$$

$$+ P(x-a) - V_a x] \cdot \frac{h}{l} (1-x) dx ;$$

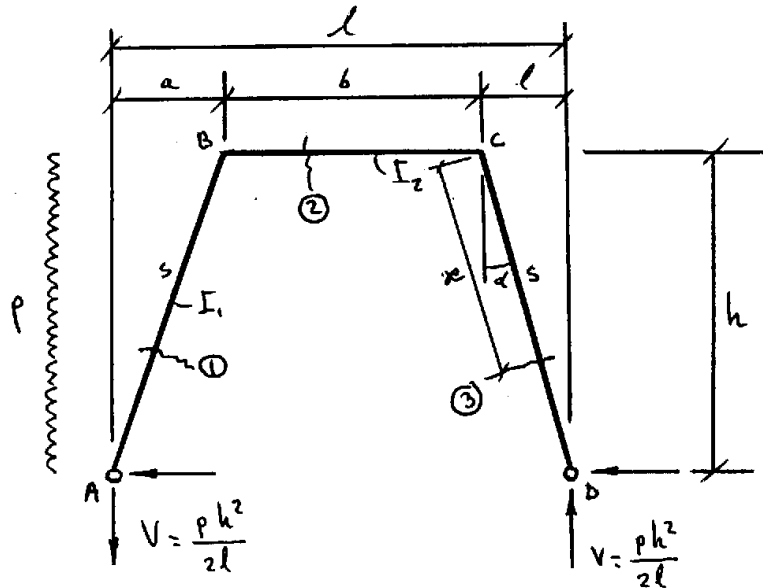
$$0 = \frac{Hh^3}{3I_1} + \frac{h}{lI_2} \int_0^l (Hh - V_a x) (1-x) dx + \frac{Ph}{lI_2} \int_a^l (1x - x^2 - al + ax) dx = \dots\dots$$

operando y sustituyendo V_a por su valor de (1) $0 =$

$$= H \cdot 2hl^2(k+1) - 2Pal^2 + Pa^2(2l+b); \text{ luego:}$$

$$H = \frac{Pab(1+b)}{2hl^2(k+1)} \text{ y el resto se obtiene ya facilmente como en Wittembaner.}$$

Resolver el pórtico del catálogo de Ensidesa, pág. 648, primer caso, según figura.



Solución:

$$\sum V = 0 \quad ; \quad |V_a| = |V_d| = V \quad ; \quad k = \frac{12 \cdot s}{11 \cdot b}$$

$$\sum H = 0 \quad ; \quad H_a + H_d = p \cdot h \quad (\alpha)$$

$$\sum M_a = 0 \quad ; \quad \frac{p \cdot h^2}{2} = V \cdot l \quad ; \quad V = \frac{p \cdot h^2}{2 \cdot l}$$

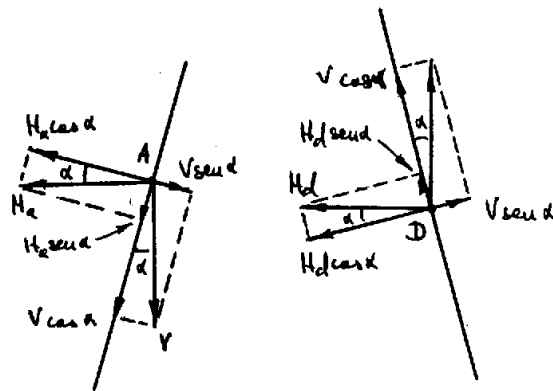
p es la carga unitaria en vertical; la total, $p \cdot h$, se distribuye sobre el pilar inclinado, s , según una distribución unitaria $(p \cdot h)/s$; y, por lo tanto, según una distribución unitaria normal a s de valor 1

$$\frac{p \cdot h}{s} \cdot \cos \alpha = \frac{p \cdot h^2}{s^2}$$

El sistema es hiperestático de primer grado; y para aplicar Castigliano, derivando respecto de H_a , de la ecuación (α) deducimos:

$$1 + \frac{\partial H_d}{\partial H_a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H_d}{\partial H_a} = -1$$

Tomamos momentos sucesivamente respecto de las secciones (1), (2) y (3) de la figura superior, para lo cual en la figura adjunta se desarrollan las descomposiciones de fuerzas en barras inclinadas.



$$M_1 = (V \cdot \sin \alpha - H_a \cdot \cos \alpha)x + \frac{p \cdot h^2}{s^2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{V \cdot a - H_a \cdot h}{s} x + \frac{p \cdot h^2 \cdot x^2}{2 \cdot s^2}$$

$$; \quad \frac{\partial M_1}{\partial H_a} = - \frac{h \cdot x}{s}$$

$$M_2 = V \cdot (a + x) - H_a \cdot h + \frac{p \cdot h^2}{2} \quad ; \quad \frac{\partial M_2}{\partial H_a} = -h$$

$$M3 = - (hd \cdot \cos \alpha - V \cdot \sin \alpha) x = \frac{V \cdot a - Hd \cdot h}{s} \cdot x \quad ;$$

$$; \quad \frac{\partial M3}{\partial Ha} = \left(- \frac{h-x}{s} \right) \cdot (-1)$$

Nota.-Hemos tomado M3 primero en sentido contrario a los M1 y M2, respecto de la rama inferior derecha, cambiando luego de signo para integrar desde 0 hasta s por la parte superior.

$$0 = \frac{\partial U}{\partial Ha} = \int_0^s \left[\frac{(Ha \cdot h^2 - V \cdot a \cdot h) x^2}{s^2 \cdot E \cdot I1} - \frac{p \cdot h^3 \cdot x^3}{2s^3 \cdot E \cdot I1} \right] dx +$$

$$+ \int_0^h \frac{Ha \cdot h^2 - V(a+x)h - (p \cdot h^3)/2}{E \cdot I2} dx + \int_0^s \frac{V \cdot a \cdot h - Hd \cdot h^2}{s^2 \cdot E \cdot I1} x^2 \cdot dx$$

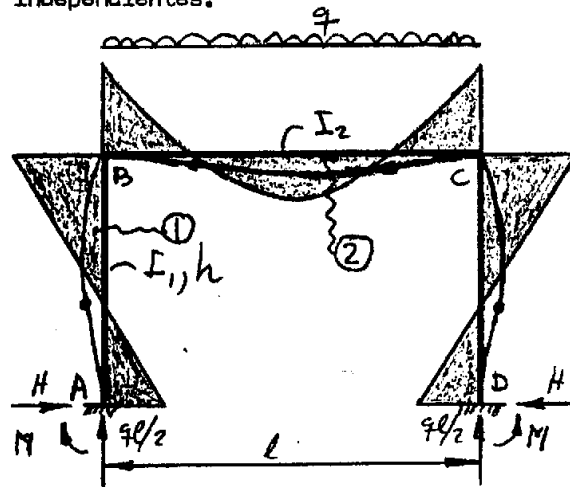
resolviendo, con $V = \frac{p \cdot h^2}{2 \cdot l}$ y $Hd = p \cdot h - Ha$

se obtienen finalmente los valores:

$$Ha = \frac{p \cdot h}{8} \cdot \frac{11 \cdot k + 18}{2 \cdot k + 3} \quad ; \quad Hd = \frac{p \cdot h}{8} \cdot \frac{5 \cdot k + 6}{2 \cdot k + 3}$$

Resolver el pórtico de la figura, calculando las fórmulas y diagrama de momentos flectores y haciendo luego aplicación de cálculo perfiles para $h = 3\text{m.}$, $l = 5\text{m.}$, $q = 350\text{ kg/m.}$, $I_1 = 1.5 I_2$ y $G_t = 1200\text{ kg/cm}^2$.

Solución : Por simetría, las reacciones verticales valen $V_1 = V_2 = \frac{ql}{2}$;
y H y M son independientes.



$$M_1 = M - Hx$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial H} = -x ; \quad \frac{\partial M_1}{\partial M} = 1$$

$$M_2 = M - Hh - \frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}x$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial H} = -h ; \quad \frac{\partial M_2}{\partial M} = 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 = \frac{1}{EI_1} \int_0^h (-Mx + Hx^2) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} (-Mh + Hh^2 + \frac{qhx^2}{2} - \frac{qlhx}{2}) dx$$

$$0 = \frac{I_2 h}{I_1 l} \left(-M \frac{l^2}{2} + \frac{Hh^2}{3} \right) + \frac{1}{l^2} \left(-Mh \frac{l^2}{2} + Hh^2 \frac{l^2}{2} + \frac{qh}{2} \frac{l^3}{24} - \right.$$

$$\left. - \frac{qlh}{2} \frac{l^2}{8} \right)$$

$$\frac{M}{2} (k+1) = Hh \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{ql^2}{24} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0 = \frac{2}{EI_1} \int_0^h (M+hx) dx + \frac{2}{EI_2} \int_0^{e/2} (M+Hh - \frac{qx^2}{2} + \frac{q1}{2} x) dx$$

$$0 = \frac{I_2 h}{I_1} (Mh - \frac{Hh^2}{2}) + \frac{1}{I_2} (\frac{Ml}{2} - \frac{Hh^2}{2} - \frac{q}{2} \frac{l^3}{24} + \frac{q1}{2} \frac{l^2}{8}) ;$$

$$M (k + \frac{1}{2}) = H h (\frac{k}{2} + \frac{1}{2}) - \frac{q1^2}{24} \quad (2)$$

Resolviendo entre (1) y (2): $12 M (k+1) - 4 H h (2k+3) = - q1^2 \quad (1')$

$$12 M (2k+1) - 12 H h (k+1) = - q1^2 \quad (2')$$

$$12 M k = 4 H h k ; 3 M = H h$$

llevando a (1') $M = \frac{q1^2}{12(k+2)} \quad H = \frac{q1^2}{4h(k+2)} \quad k = \frac{I_2 \cdot 3}{1'5 I_1} = 0'4$

sustituyendo ahora valores numéricos: $M = M_A = M_D = \frac{q1^2}{12(k+2)} =$

$$= \frac{350 \cdot 2500}{12 \cdot 2'4} \approx 301382 \text{ cmkg}$$

$H = \frac{350 \cdot 25}{12 \cdot 2'4} \approx 304 \text{ kg}; \quad M_B = M_A - Hh = 301382 - 304 \times 300 = - 601818 \text{ cmkg}$

(aprox. $2 M_A$)

momento central dintel = $601818 + \frac{350 \cdot 2'5 \cdot 250}{2} - \frac{350 \cdot 5 \cdot 250}{2} =$

$= - 481557 \text{ cmkg};$ es máximo el empotramiento; luego $W = \frac{601818}{1200} =$

$= 50'68 \text{ cm}^3;$ tomamos PN120 $\begin{cases} I = 328 \text{ cm}^4 \\ \text{peso} = 11'15 \text{ kg/cm} \end{cases}$

pilar 1'5 $I = 492 \text{ cm}^4;$ tomamos PN140, $I = 573 \text{ cm}^4$

comprobación del dintel: $350 + 11'15 = 361'15 \text{ kg/m}; \quad Q = 361'15 \cdot 5 = 1806 \text{ kg};$

$\frac{Q}{2} = 903 \text{ kg}$

$$k = \frac{328.3}{573.5} = 0.57 ; \quad M_{\max} = \frac{q l^2}{6(k+2)} = \frac{361.15 \cdot 2500}{6 \cdot 2.57} = 64307 \text{ cmkg};$$

$$W = \frac{64307}{1200} = 53.6 \text{ cm}^3, \text{ vale PN 120; los pilares los calculamos a pandeo, para comprobar:}$$

$$\sigma = \frac{P \omega}{\pi} ; \quad \lambda = \frac{h}{r_{\min}} = \frac{300}{1.40} \approx 214.29 \Rightarrow \omega = 7.80;$$

$$\sigma = \frac{903 \cdot 7.80}{18.3} = 385 \text{ kg/cm}^2 < 1200, \text{ luego vale PN 140; WPN14} =$$

$$= 81.9 \text{ cm}^3.$$

$$\frac{64307 \text{ cmkg}}{81.9} = 785.18 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{\text{total}} = \sigma_{\text{pandeo}} + \sigma_{\text{flexión}} = 385 + 785 =$$

$$= 1170 < 1200.$$

Resolver la primera parte del mismo problema anterior por Cross.

Solución : con los datos anteriores las rigideces son:

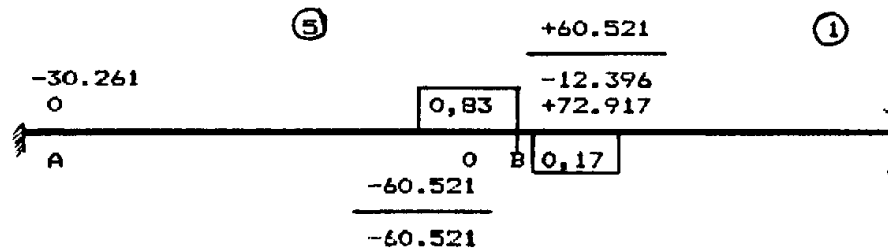
$$k_p = \frac{4EI_1}{h} = \frac{4E1.5I_2}{3} = 2EI_2$$

$$K_d = \frac{4EI_2}{5} = 0.8EI_2 ; \text{ rigidez virtual, por simetría: } k_v = K(1-\beta) =$$

$$= 0.4EI_2$$

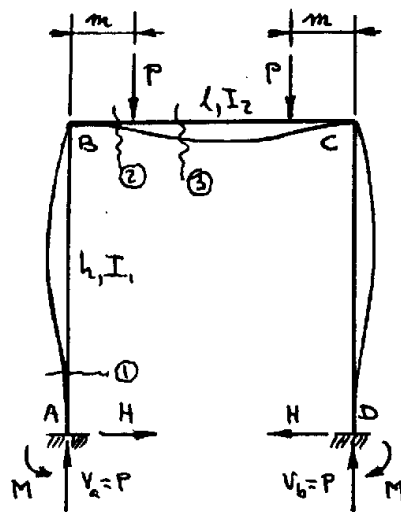
$$\text{relación entre ambos : } k_p : k_d = 5 : 1 \Rightarrow 0.83 \text{ y } 0.17$$

$$\mu = \mu' = \frac{1}{12} p l^2 = \frac{350 \cdot 25}{12} = 729.17 \text{ cmkg}$$



Nota.-Si se toman los coeficientes de reparto más aproximados, salen los resultados más exactos.

Resolver el pórtico de Ensidesa, pág.670, 22 caso, según figura adjunta.



Solución:

por simetría, $V_a = V_d = V = P$;

$H_a = H_d = H$; pero agotamos todas las ecuaciones de la estática y el sistema es hiperestático de 2º grado y con las incógnitas independientes entre sí.

$$M_1 = M + H \cdot x$$

$$M_2 = M + H \cdot h - P \cdot x$$

$$M_3 = M + H \cdot h - P \cdot x + P(x - m) = \\ = M + H \cdot h - Pm$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M} = \frac{\partial M_2}{\partial M} = \frac{\partial M_3}{\partial M} = 1$$

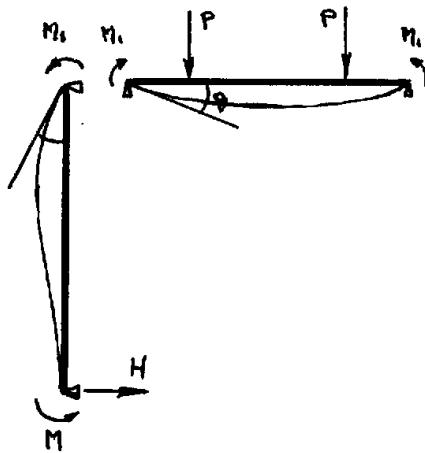
$$0 = \frac{\partial U}{\partial M} = 2 \int_0^h \frac{H + Mx}{E \cdot I_1} dx + 2 \int_0^m \frac{M + Hh - Px}{E \cdot I_2} dx + \\ + 2 \int_m^l \frac{M + Hh - Pm}{E \cdot I_2} dx = \frac{Hh}{I_1} + \frac{Hh^2}{2 \cdot I_2} + \int_0^m \frac{2M + Hh}{I_2} dx - \int_0^m \frac{Px}{I_2} dx -$$

$$-\int_m^{1/2} \frac{Pm}{I_2} dx = \frac{Mh}{I_1} + \frac{Hh^2}{2 \cdot I_1} + \frac{M \cdot 1}{2 \cdot I_2} + \frac{Hh \cdot 1}{2 \cdot I_2} - \frac{P \cdot m^2}{2 \cdot I_2} -$$

$$-\frac{Pm}{I_2} \left[\frac{1}{2} - m \right] = 0 \quad ; \quad \text{con } k = \frac{I_2 \cdot h}{I_1 \cdot 1} \quad \text{y multiplicando por}$$

2·I₂ y dividiendo por 1 queda:

$$M(2k + 1) + Hh(k + 1) = \frac{Pm}{1} (1 - m) \quad (\alpha)$$



Resolviendo ahora la igualdad de ángulos de las dos vigas adjuntas (ver ángulos en formularios):

$$\theta_{\text{dintel}} = \frac{M1 \cdot 1}{2E \cdot I_2} + \frac{Pm(1 - m)}{2E \cdot I_2}$$

$$\theta_{\text{pilar}} = -\frac{M1 \cdot h}{3E \cdot I_1} + \frac{Hh}{6E \cdot I_1}$$

$$M1 + M + Hh = 0$$

$$\theta_d = \theta_p \implies \frac{3 \cdot M1 \cdot 1 + 3Pm(1 - m)}{I_2} = \frac{-2 \cdot M1 \cdot h + Hh}{I_1} ;$$

$$3M1 + \frac{3Pm(1 - m)}{1} = (-2 \cdot M1 + M)k ;$$

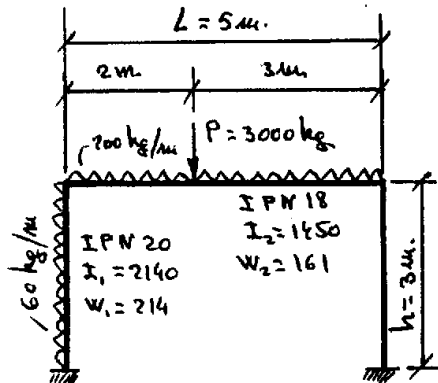
$$\frac{3Pm(1 - m)}{1} = M(3 + 3k) + Hh(3 + 2k) \quad (\beta)$$

Resolviendo las ecuaciones (α) y (β) sale:

$$M = -\frac{Pm(1 - m)}{1(k + 2)} , \quad H = \frac{3Pm(1 - m)}{h1(k + 2)}$$

Como comentario, se debe aclarar que el ejemplo precedente muestra un caso en el cual se ha empleado una sola ecuación de Castigliano y se ha usado de otra, que ha surgido de la igualdad de ángulos, más fácil, si se tienen a mano los formularios correspondientes.

Dimensionar el pórtico de la figura adjunta, con las dimensiones y cargas (ya ponderadas) que figuran en la misma. Tómese σ ad. 1600 kg/cm².



Solución: De tanteos previos, no indicados aquí, se adoptan los perfiles reseñados en la misma figura; y se comprueban con el formulario de Ensidesa, indicando las páginas correspondientes de cada parte parcial de cálculo por separado, sumando luego todos los valores obtenidos.

$$k = \frac{I_2 \cdot h}{I_1 \cdot l} = 0,41 \quad ; \quad k + 2 = 2,41$$

$$6k + 1 = 3,46 \quad ; \quad 2k + 3 = 3,82$$

19).- carga uniformemente repartida en dintel, $q = 200 \text{ kg/m}$

$$\vec{H}_a = 173 \text{ kg} = \vec{H}_d$$

$$\vec{V}_a = 500 \text{ kg} = \vec{V}_d \quad (\text{Ensidesa, pág. 669})$$

$$\vec{M}_a = 173 \text{ mkg} = \vec{M}_d$$

20).- carga uniformemente repartida en pilar izquierdo, $q = 60 \text{ kg/m}$

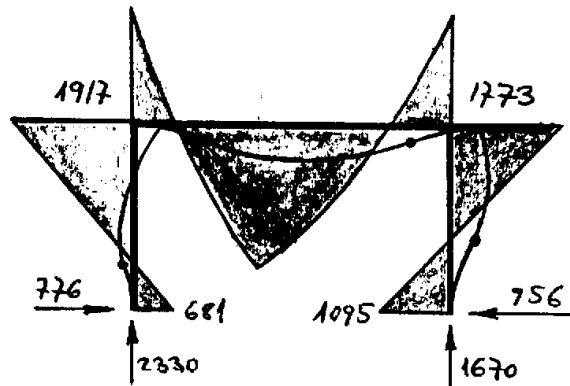
$$\vec{V}_a = 13 \text{ kg} = \vec{V}_d$$

$$\begin{aligned} \overleftarrow{H_d} &= 36 \text{ kg} & ; & & \overleftarrow{H_a} &= 144 \text{ kg} & & (\text{Ensidesa, pág. 669}) \\ \overleftarrow{M_a} &= 135 \text{ mkg} & ; & & \overleftarrow{M_d} &= 71 \text{ mkg} \end{aligned}$$

32).- carga puntual en dintel, $P = 3.000 \text{ kg}$:

$$\begin{aligned} \uparrow V_a &= 1842 \text{ kg} & ; & & \uparrow V_d &= 1156 \text{ kg} \\ \overleftarrow{M_a} &= 643 \text{ mkg} & ; & & \overleftarrow{M_d} &= 851 \text{ mkg} & & (\text{Ensidesa, pág. 670}) \\ \rightarrow H_a &= 747 \text{ kg} = \overleftarrow{H_d} \end{aligned}$$

En la figura adjunta se indican todos los valores totales obtenidos y el diagrama de momentos flectores y deformada.



Se pasa ya a calcular las tensiones reales de trabajo:

$$\text{dintel} \quad \sigma_t = \frac{191700}{161} \approx 1191 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{para } i = 1,71, \quad \lambda = \frac{500}{1,71} = 292, \text{ valor que no entra en tablas de}$$

pandeo, pero que podemos despreciar en primera aproximación, debido al pequeño valor de las cargas laterales.

$$\text{Para los dos pilares, } i = 1,87, \quad \lambda = \frac{300}{1,87} = 160,4 \quad \omega = 4,54$$

$$\text{pilar dcho.} \quad \sigma_t = \frac{177300}{214} + \frac{1670 \times 4,54}{33,5} = 1055 \text{ kg/cm}^2$$

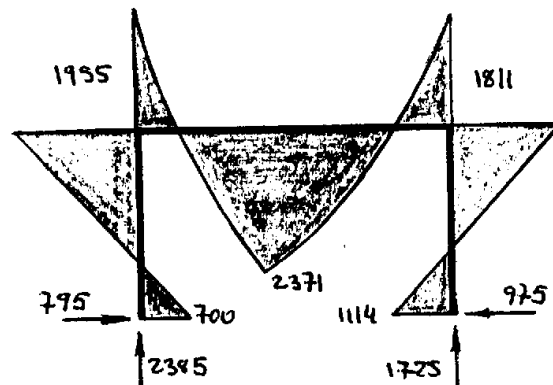
pilar izdo. $\sigma_t = \frac{191700}{214} + \frac{2330 \times 4,54}{33,5} = 1211 \text{ kg/cm}^2$

Si queremos también comprobar con el peso propio de los perfiles incluidos:

caso 19, 200 \Rightarrow 222 kg/m;

$\vec{H}_a = 192 \text{ kg} = \vec{H}_d$; $\vec{V}_a = 555 \text{ kg} = \vec{V}_d$; $\vec{M}_a = 192 \text{ mkg} = \vec{M}_d$

casos 29 y 39 no cambian! a las reacciones verticales hay que sumarles el peso propio de los pilares, 66 kg cada uno. Con lo cual se representa el nuevo diagrama de valores, calculando también el momento flector en el centro del dintel (que resulta mayor que en los extremos).



dintel, $\sigma_t = \frac{195500}{161} \approx 1214 \text{ kg/cm}^2$, pero en el centro

$\sigma_{\max} = \frac{237100}{161} = 1473 \text{ kg/cm}^2$

pilar dcho. $\sigma_t = \frac{181100}{214} + \frac{1725 \times 4,54}{33,5} = 1080 \text{ kg/cm}^2$

pilar izdo. $\sigma_t = \frac{195500}{214} + \frac{2385 \times 4,54}{33,5} = 1237 \text{ kg/cm}^2$

Una manifestación de que en Estructuras caben muchas

soluciones y de que se deben estudiar las más convenientes, la vamos a ver intercambiando los perfiles, colocando en dintel PNI 20 y en pilares PNI 18, con lo que se logrará: 1º) mejor aprovechamiento del material, acercándonos más a la tensión teórica; 2º) disminuir peso de estructura, y por lo tanto precio de coste, ya que $2 \times 3 \text{ m.} \times \text{IPN } 20 + 5 \text{ m.} \times \text{IPN } 18 > 2 \times 3 \text{ m.} \times \text{IPN } 18 + 5 \text{ m.} \times \text{IPN } 20$; 3º) disminuir la flecha del dintel.

1º) dintel $q = 200 \text{ kg/m}$:

$$\vec{H}_a = 145 \text{ kg} = \vec{H}_d$$

$$\uparrow V_a = 500 \text{ kg} = \uparrow V_d$$

$$\curvearrowright M_a = 145 \text{ mkg} = \curvearrowright M_d$$

2º) pilar izdo. $q = 60 \text{ kg/m}$

$$\uparrow V_a = 15 \text{ kg} = \uparrow V_d$$

$$\leftarrow H_d = 37 \text{ kg} ; \vec{H}_a = 143 \text{ kg}$$

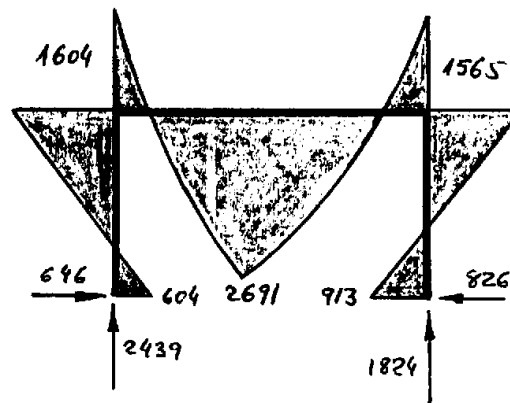
$$\curvearrowright M_a = 127,5 \text{ mkg} ; \curvearrowright M_d = 67 \text{ mkg}$$

3º) carga dintel $P = 3000 \text{ kg}$

$$\uparrow V_a = 1823 \text{ kg} ; \uparrow V_d = 1177 \text{ kg}$$

$$\curvearrowright M_a = 568 \text{ mkg} ; \curvearrowright M_d = 682 \text{ mkg}$$

$$\vec{H}_a = 625 = \vec{H}_d$$



En el diagrama de flectores arriba adjunto van ya los valores con peso de estructura incluido; los valores finales de trabajo son:

$$\text{dintel, } \sigma_t = \frac{269100}{214} \approx 1257 < 1600$$

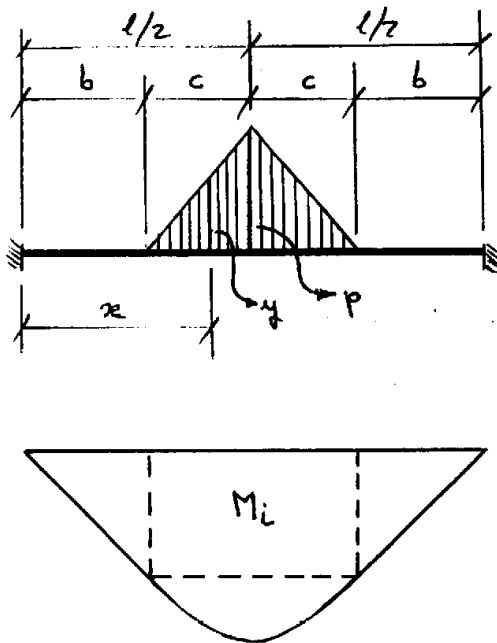
$$\text{pilares, } = 300/1,71 = 175,4 \quad w = 5,29$$

$$\text{izdo. } \sigma_t = \frac{160400}{161} + \frac{2439 \times 5,29}{27,9} = 1459 < 1600$$

$$\text{decho. } \sigma_t = \frac{156500}{161} + \frac{1824 \times 5,29}{27,9} = 1318 < 1600$$

Aun se podía estudiar la solución, muchas veces adoptada, de pilares con dos perfiles en U; en el presente caso, con dos perfiles PNU 18 sale solución válida, pero más cara; dicha solución se toma para grandes valores del pandeo, al aumentar enormemente el radio de giro.

Calcular los momentos de empotramiento de la viga de la figura, caso n° 12 del apéndice, pág. 460, Fernández Casado, Estructuras.



Solución:

$$m = \frac{[M_i](x) - (M_i)[x]}{(x)[x] - (x')[x]} L$$

reacciones isostáticas:

$$R_a = R_b = \frac{pc}{2}$$

$$y = \frac{p}{c} (x - b) \text{ ; momento}$$

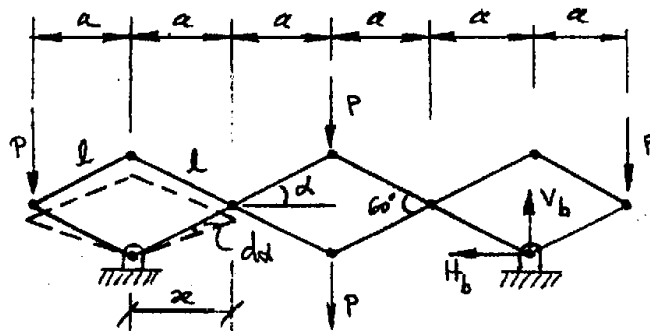
del área parcial =

$$= \frac{p (x - b)}{2c}$$

$$\begin{aligned}
 (M_1) &= 2 \int_0^b R_a x \, dx + 2 \int_b^{\ell/2} \left[R_a x - \frac{P(x-b)^3}{6c} \right] dx = 2 \int_0^{\ell/2} R_a x \, dx - 2 \int_0^{\ell/2} \frac{P(x-b)^3}{6c} dx \\
 &= 2 \left[\frac{Pc}{2} \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ell/2} - \frac{P}{3c} \left[\frac{(x-b)^4}{4} \right]_b^{\ell/2} = \frac{Pc\ell^2}{8} - \frac{Pc^3}{12} = \frac{Pc}{24} (3\ell^2 - 2c^2) \\
 (x) &= (x') = \frac{1^2}{2} ; [x] = \frac{1^3}{3} ; [x'] = \frac{1^3}{6} \\
 [M_1] &= \frac{1}{2} \cdot (M_1) = \frac{Pc\ell}{48} (3\ell^2 - 2c^2)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (M_1) \\ (x) \\ [M_1] \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{sustituyendo, sale} \\ \mu = \frac{Pc\ell}{24} \left(3 - 2 \frac{c^2}{\ell^2} \right) \\ \mu' \text{ por simetría sale} \\ \text{igual y signo contrario} \end{array}$$

(De Timoshenko y Young)

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, calcular las reacciones de la estructura de la figura adjunta; todos los nudos son articulados.



Solución : Por simetría y cálculo directo evidente, $V_a = V_b = 2P \uparrow$

Liberando el nudo B, manteniendo la horizontal AB sin variación de altura y dando a la estructura el movimiento virtual indicado: (V_b no trabaja, - desplazamiento nulo)

$$y_2 = 1 \operatorname{sen} \alpha ; \quad dy_2 = 1 \cos \alpha \cdot d\alpha , \quad \text{desplaz. de las dos fuerzas P} \\ \text{extremos}$$

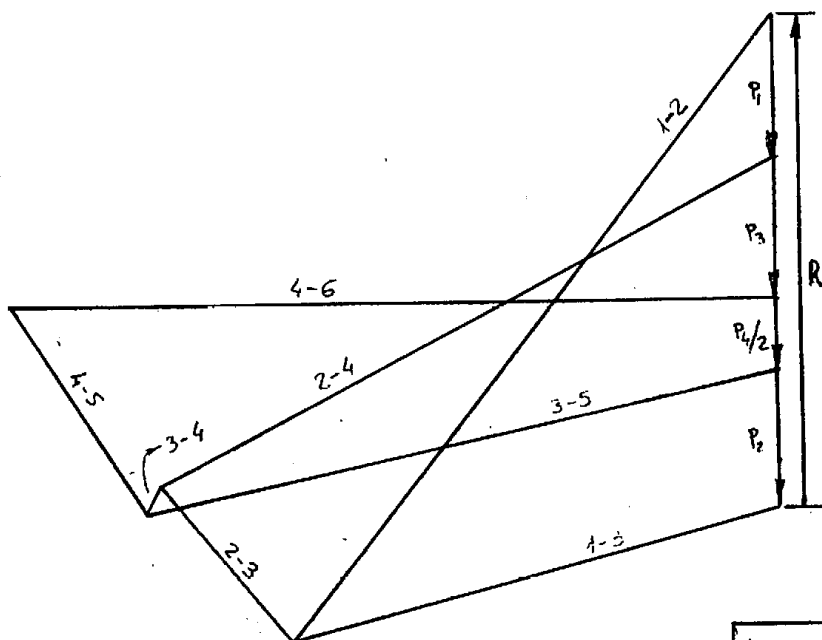
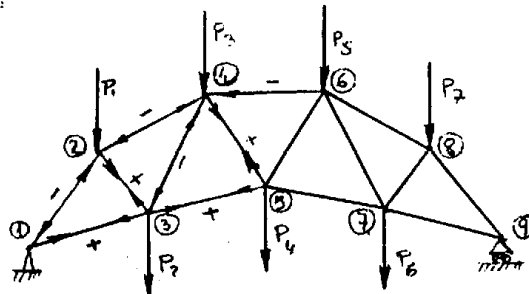
$$y_1 = 2 \operatorname{sen} \alpha ; \quad dy_1 = 2 \cos \alpha \cdot d\alpha ; \quad \text{desplaz. de la fuerza P supe-} \\ \text{rior}$$

$$x = 1 \cos \alpha ; \quad dx = -1 \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha ; \quad \overline{AB} = 4x ; \quad d\overline{AB} = \{4 \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha\}$$

$$P \cdot 2 \cos \alpha \cdot d\alpha + 2 P \cos \alpha \cdot d\alpha - H_b \cdot 4 \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha = 0 ;$$

$$H_b = \operatorname{ctg} 30^\circ , \quad P = P \sqrt{3}$$

Dibujar el diagrama de Cremona de la cercha de nudos de la figura, calculando las tensiones para $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = P_7 = 1.000 \text{ Kg.}$

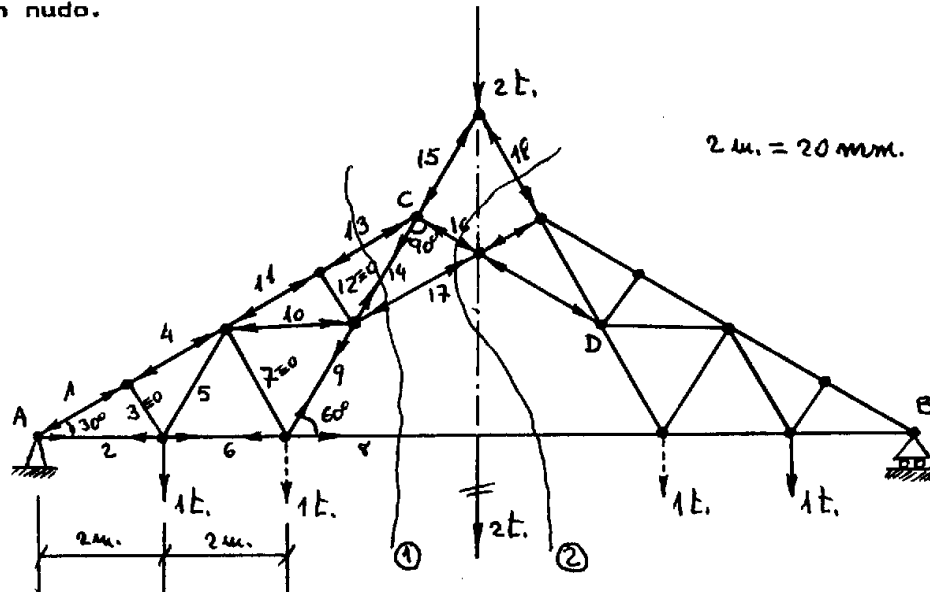


Se ha resuelto únicamente media cercha, siendo el resto simétrico.
+ tracción, - compresión

barra	estado	kg
1-2	-	5.580
1-3	+	3.500
2-3	+	1.640
2-4	-	4.860
3-4	-	225
3-5	+	4.490
4-5	+	1.770
4-6	-	5.312

(Escuela de Arquitectura - Sevilla)

Resolver gráficamente la estructura de la figura, definida con las dimensiones señaladas; la fuerza inferior de 2 t. no actúa en nudo.



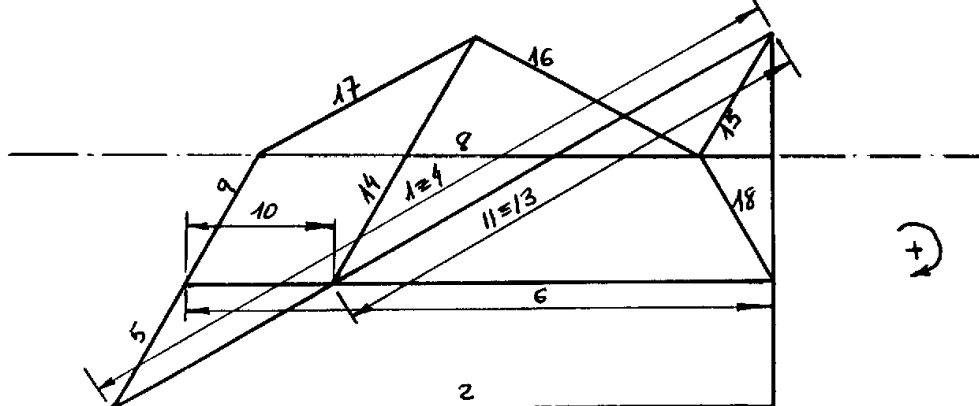
nota.- Por simetría, $R_a = R_b = 3 \text{ t.}$; por Cremona no se puede resolver directamente y hay que recurrir a Ritter, con las dos secciones, (1) y (2), indicadas; la fuerza inferior de 2 t. se traslada a los dos nudos adyacentes, 1 t. en cada uno. Las distancias se toman a escala.

$$\sum M_c = 0 ; S_{17} \times 10 + S_B \times 35 - 1 \times 20 - 1 \times 40 + 3 \times 60 = 0$$

$$S_{17} = 2 \text{ t. (compresión)}$$

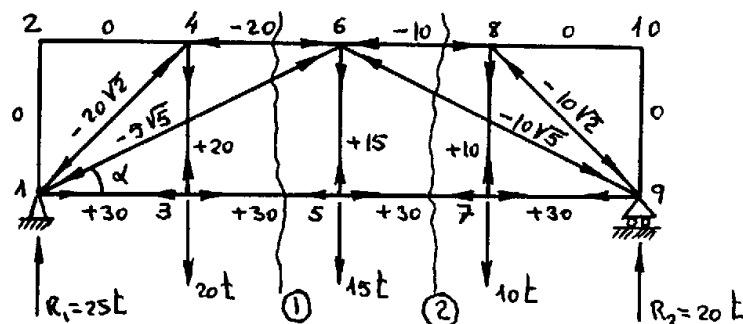
$$\sum M_d = 0 ; S_{17} \times 20 - S_B \times 17.5 + 1 \times 10 + 1 \times 30 - 3 \times 50 = 0$$

$$S_B = -4 \text{ t. (tracción)}$$



(Norris y Wilbur, pág. 158, g)

Resolver la estructura de la figura y comprobar posteriormente por el procedimiento de las estructuras complejas, cambiando de lugar el mismo número de barras.



Solución: $r = 3$; $b = 17$; $n = 10$; $2n - 3 = b$; isostática interna y externa.

Una vez calculadas las reacciones ($R_1 = 25 \text{ t.}$, $R_2 = 20 \text{ t.}$) hemos de proceder a usar de las secciones 1 y 2, con lo cual:

$$\sum M_6 = 0 ; F(3-5) = 30 \text{ t. (tracción)}$$

$$\sum M_1 = 0 ; F(4-6) = 20 \text{ t. (compresión)}$$

$$\sum M_6 = 0 ; F(5-7) = 30 \text{ t. (tracción)}$$

$$\sum M_9 = 0 ; F(6-8) = 10 \text{ t. (compresión)}$$

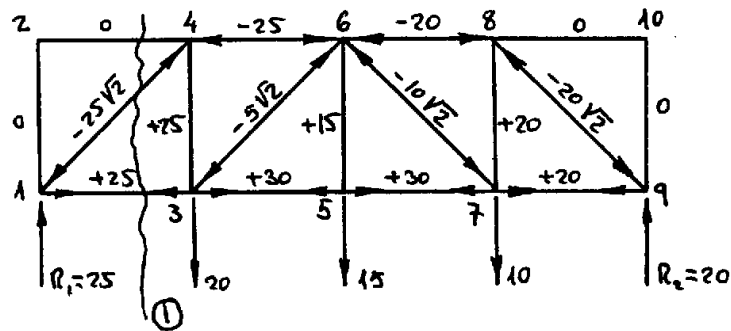
del nudo 3, $F(1-3) = 30 \text{ t. (trac.)}$ y $F(3-4) = 20 \text{ t. (trac.)}$

del nudo 4, $F(2-4) = 0$ y $F(1-4) = 20\sqrt{2} \text{ t. (compresión)}$

por lo tanto, $F(1-2) = 0$

y siguiendo en el orden de nudos $7 - 8 - 5 - 1 - 9$ resultan los valores de la figura sin dificultad alguna.

Para proceder ahora como si se tratase de una estructura compleja, eliminamos las barras 1-6, 6-9 y cambiamos por la estructura de la página siguiente, caso I.



Dada la regularidad de la figura, resolvemos por Cremona, dando previamente la sección 1 (evidentemente, las reacciones son las mismas):

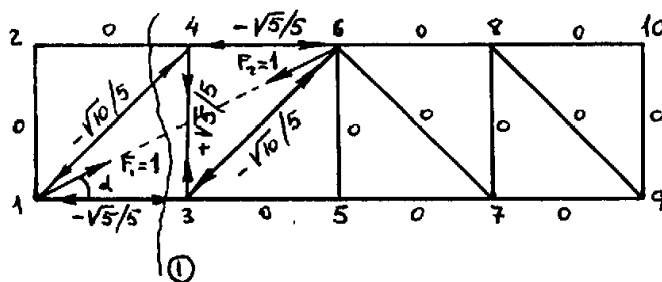
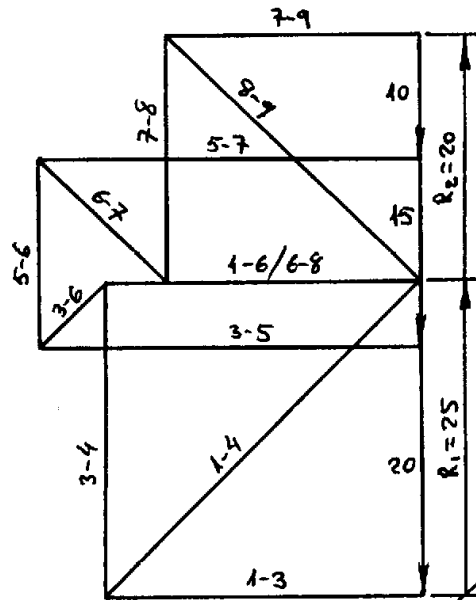
$$\sum M_1 = 0 ; F(2-4) = 0 ;$$

$$\text{luego } F(1-2) = 0 ;$$

y lo mismo

$$F(8-10) = F(9-10) = 0$$

Los valores se indican en la figura adjunta; y ahora resolvemos las dos estructuras siguientes, casos II y III:



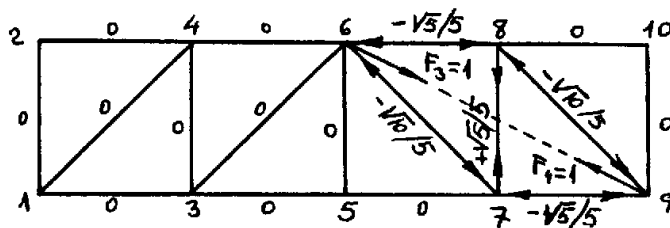
Caso II

$$\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} L = 1/2$$

caso III



Como se observa, ambas son idénticas al caso I pero sometidas a las fuerzas unitarias indicadas en cada caso. El caso III no se resuelve, pues es simétrico al II; en ambos no existen reacciones.

Comenzamos por la sección 1, $\Sigma M_1 = 0$; $F(2-4) = F(1-2) = 0$

Nudo 1:

$$\frac{1}{\sin 135^\circ} = \frac{F(1-3)}{\sin 45^\circ} = \frac{F(1-4)}{\sin 45^\circ}$$

$$F(1-3) = \sqrt{5}/5 \quad F(1-4) = \sqrt{10}/5$$

El resto se hace fácilmente por triangulación, nudos 4 - 3 - 6

Del equilibrio de las tres estructuras escribimos:

$$\text{barra 3-6} \implies -5\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{5} A + 0 = 0 \quad ; \quad A = -5\sqrt{5}$$

$$\text{barra 8-9} \implies -10\sqrt{2} + 0 - \frac{\sqrt{10}}{5} B = 0 \quad ; \quad B = -\sqrt{10}/5$$

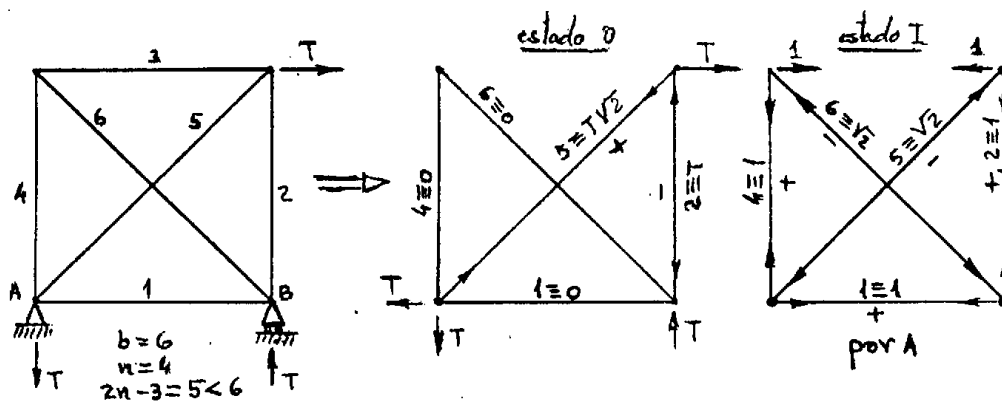
Y ahora se confecciona el cuadro de la página siguiente, con los resultados finales que aparecen en la última columna, y

que se comprueba coinciden con los hallados por el primer procedimiento.

(1) barras	(2) est. I	(3) est. II	(4) IIxA	(5) est. III	(6) IIIxB	(7) I + IIA + IIIB
1-2	0	0	0	0	0	0
1-3	+25	$-\sqrt{5}/5$	+5	0	0	+30
1-4	$-25\sqrt{2}$	$-\sqrt{10}/5$	$+5\sqrt{2}$	0	0	$-20\sqrt{2}$
2-4	0	0	0	0	0	0
3-4	+25	$+\sqrt{5}/5$	-5	0	0	+20
3-5	+30	0	0	0	0	+30
3-6	$-5\sqrt{2}$	$-\sqrt{10}/5$	$+5\sqrt{2}$	0	0	0
4-6	-25	$-\sqrt{5}/5$	+5	0	0	-20
5-6	+15	0	0	0	0	+15
5-7	+30	0	0	0	0	+30
6-7	$-10\sqrt{2}$	0	0	$-\sqrt{10}/5$	$+10\sqrt{2}$	0
6-8	-20	0	0	$-\sqrt{5}/5$	+10	-10
7-8	+20	0	0	$+\sqrt{5}/5$	-10	+10
7-9	+20	0	0	$-\sqrt{5}/5$	+10	+30
8-9	$-20\sqrt{2}$	0	0	$-\sqrt{10}/5$	$+10\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
8-10	0	0	0	0	0	0
9-10	0	0	0	0	0	0
1-6	0	+1	$-5\sqrt{5}$	0	0	$-5\sqrt{5}$
6-9	0	0	0	+1	$-10\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$

(De Timoshenko y Young)

Aplicando el PTV a las estructuras de nudos articulados hiperestáticos, calcular las tensiones en todas las barras (de la misma sección) de la figura adjunta.



Descomponemos en las dos isostáticas indicadas, en las que se calculan fácilmente las tensiones y signos indicados.

$$N_i = N_{oi} + A N_{Ii} ; \quad A_i = \frac{N_{Ii} L_i}{E A_i} ; \quad 1.0. \sum_{i=1}^6 N_{Ii} \Delta_i = \sum_{i=1}^6 N_{Ii} \frac{L_i}{A_i} (N_{oi} + A N_{Ii})$$

$$A = - \frac{\sum_{i=1}^6 L_i N_{oi} N_{Ii}}{\sum_{i=1}^6 L_i N_{Ii}^2} , \quad A = 0.396$$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Barras	L_i	N_{oi}	N_{Ii}	$L_i N_{oi} N_{Ii}$	$L_i N_{Ii}^2$	$N_{oi} + A N_{Ii}$
1	l	-	+1	-	+ l	+0.396T
2	l	-T	+1	- lT	+ l	-0.604T
3	l	-	+1	-	+ l	+0.396T
4	l	-	+1	-	+ l	+0.396T
5	$l\sqrt{2}$	+ $T\sqrt{2}$	- $\sqrt{2}$	- $2\sqrt{2}lT$	+ $2\sqrt{2}l$	+0.854T
6	$l\sqrt{2}$	-	- $\sqrt{2}$	-	+ $2\sqrt{2}l$	-0.560T
				$-(1+2\sqrt{2})lT$	$(4+4\sqrt{2})l$	

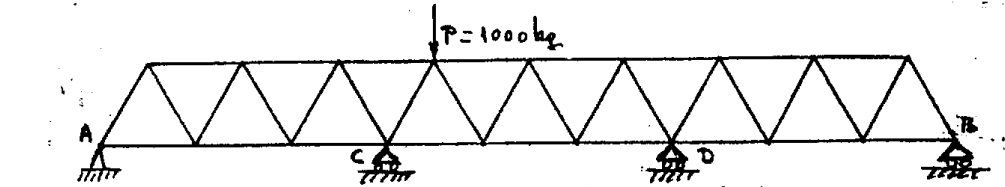
$$A = \frac{1+2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} T =$$

$$\approx 0.396 T$$

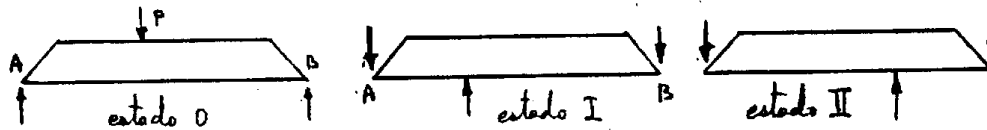
Nota.- Véase el mismo problema resuelto matricialmente en pág. 153.

[Timoshenko y Young, nº1, pag.316]

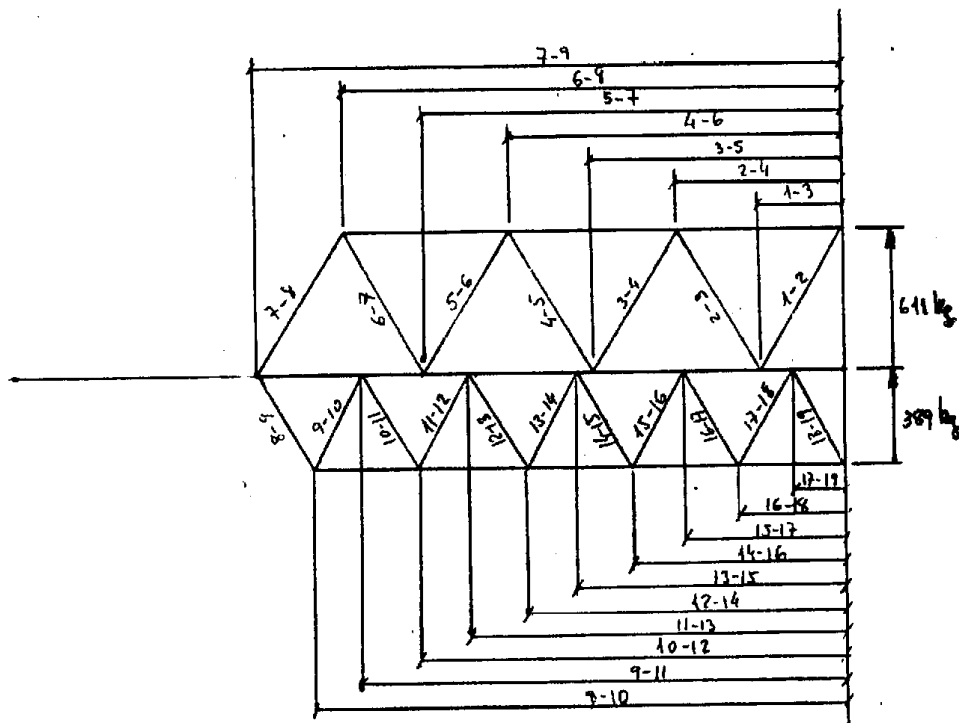
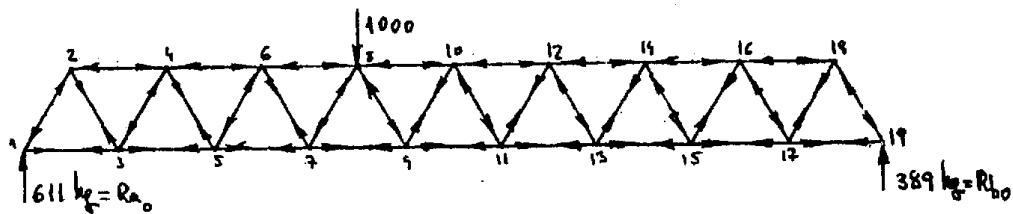
Calcular las reacciones de la cercha de la figura, aplicando el P.T.V..



Primeramente, descomponemos en las tres isostáticas siguientes

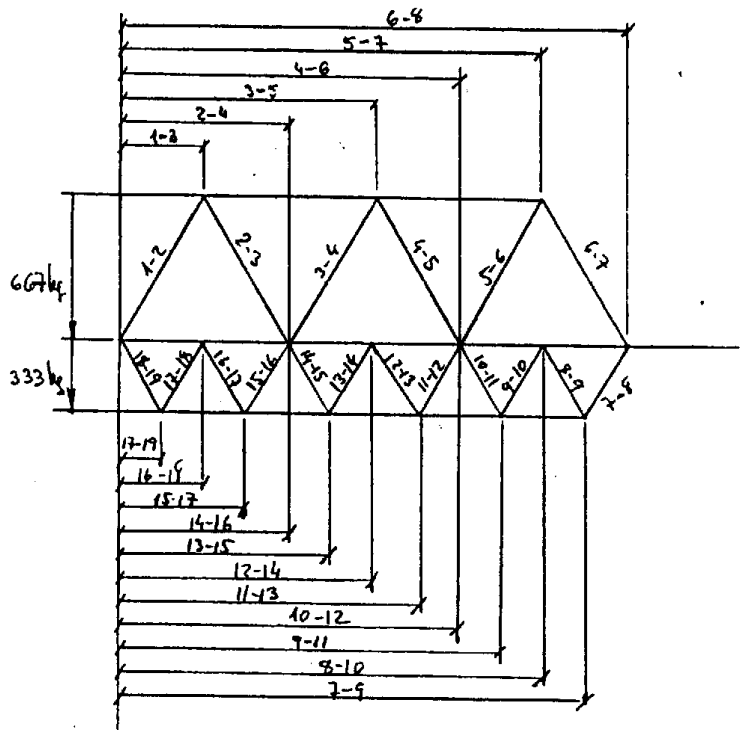
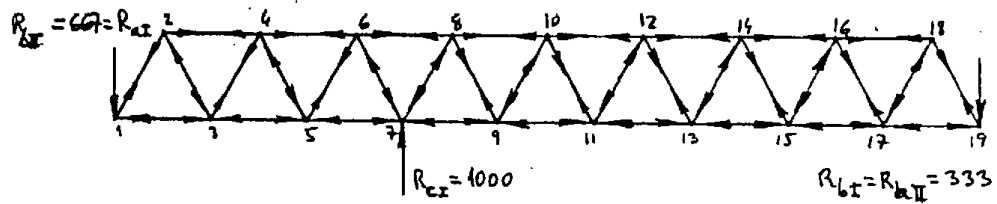


Y a continuación resolvemos cada cercha independiente, aplicando Cremona (se ha de tener en cuenta que el estado II es el simétrico del I)



Los valores de las fuerzas se calculan más exactamente por razones geométricas, aprovechando los triángulos equiláteros; así se confecciona el cuadro de la pag. sig..

Estados I y II (simétricos):



barras	estado 0	estado I	estado II	
1- 2	- 706	+ 770	+ 385	$\sum N_1^I (N_1^0 + AN_1^I + BN_1^{II}) = 0$ $\sum N_1^{II} (N_1^0 + AN_1^I + BN_1^{II}) = 0$
1- 3	+ 353	- 385	- 193	
2- 3	+ 706	- 770	- 385	
2- 4	- 706	+ 770	+ 385	
3- 4	- 706	+ 770	+ 385	$\sum N_1^I N_1^0 = - 39.135.828$ $\sum N_1^{II} N_1^0 = - 34.242.478$
3- 5	+ 1059	- 1155	- 578	
4- 5	+ 706	- 770	- 385	
4- 6	- 1412	+ 1540	+ 770	
5- 6	- 706	+ 770	+ 385	$\sum N_1^{I^2} = \sum N_1^{II^2} = + 37.581.969$
5- 7	+ 1765	- 1925	- 963	
6- 7	+ 706	- 770	- 385	
6- 8	- 2118	+ 2310	+ 1155	
7- 8	- 706	- 385	+ 385	$\sum N_1^I N_1^{II} = + 30.802.407$
7- 9	+ 2471	- 2118	- 1348	
8- 9	- 449	+ 385	- 385	
8-10	- 2245	+ 1925	+ 1540	
9-10	+ 449	- 385	+ 385	
9-11	+ 2021	- 1733	- 1733	
10-11	- 449	+ 345	- 385	
10-12	- 1796	+ 1540	+ 1925	
11-12	+ 449	- 385	+ 385	
11-13	+ 1572	- 1348	- 2118	
12-13	- 449	+ 385	- 385	
12-14	- 1347	+ 1155	+ 2310	
13-14	+ 449	- 385	- 770	
13-15	+ 1123	- 963	- 1925	
14-15	- 449	+ 385	+ 770	
14-16	- 898	+ 770	+ 1540	
15-16	+ 449	- 385	- 770	
15-17	+ 674	- 578	- 1155	
16-17	- 449	+ 385	+ 770	
16-18	- 449	+ 385	+ 770	
17-18	+ 449	- 385	- 770	
17-19	+ 225	- 193	- 385	
18-19	- 449	+ 385	+ 770	

Dividiendo por 10^6 las ecuaciones, sacamos, aproximadamente :

$$\left. \begin{array}{l} 37'6A + 30'8B = 39'1 \\ 30'8A + 37'6B = 34'2 \end{array} \right\} \quad A = \frac{\begin{vmatrix} 39'1 & 30'8 \\ 34'2 & 37'6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 37'6 & 30'8 \\ 30'8 & 37'6 \end{vmatrix}} = \frac{416'8}{465'12} \approx 0'896$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 37'6 & 39'1 \\ 30'8 & 34'2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 37'6 & 30'8 \\ 30'8 & 37'6 \end{vmatrix}} = \frac{81'64}{465'12} \approx 0'176$$

Reacciones finales : $R_c = 896 \text{ Kg} \uparrow$

$R_d = 176 \text{ Kg} \uparrow$

$R_a = 611 - 667 \times 0'896 - 333 \times 0'176 = -45 \downarrow$

$R_b = 389 - 333 \times 0'896 - 667 \times 0'176 = -27 \downarrow$

Si el extremo B fuese articulado, habría que considerar un tercer estado:



Evidentemente, no afectaría sino a las barras 1-3, 3-5, 5-7, ..., 17-19 y se podría resolver fácilmente : (todas esas barras con 1.000 compresión)

$$\left. \begin{array}{l} \sum N_i^I (N_i^0 + AN_i^I + BN_i^{II} + CN_i^{III}) = 0 \\ \sum N_i^{II} (N_i^0 + AN_i^I + BN_i^{II} + CN_i^{III}) = 0 \\ \sum N_i^{III} (N_i^0 + AN_i^I + BN_i^{II} + CN_i^{III}) = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \sum N_i^I N_i^{III} = + 10.398.000 \\ \sum N_i^{II} N_i^{III} = + 10.398.000 \\ \sum N_i^{III}{}^2 = 9.000.000 \\ \sum N_i^0 N_i^{III} = - 11.263.000 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} 37'6A + 30'8B + 10'4C &= 39'1 \\ 30'8A + 37'6B + 10'4C &= 34'2 \\ 10'4A + 10'4B + 9'0C &= 11'3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3'62A + 2'96B + C &= 3'76 \\ 2'96A + 3'62B + C &= 3'29 \\ A + B + 0'87C &= 1'09 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 3'76 & 2'96 & 1 \\ 3'29 & 3'62 & 1 \\ 1'09 & 1 & 0'87 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3'62 & 2'96 & 1 \\ 2'96 & 3'62 & 1 \\ 1 & 1 & 0'87 \end{vmatrix}} = \frac{2'180}{2'458} \approx 0'887$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 3'62 & 3'76 & 1 \\ 2'96 & 3'29 & 1 \\ 1 & 1'09 & 0'87 \end{vmatrix}}{2'458} = \frac{0'429}{2'458} \approx 0'175$$

$$C = \frac{1'09 - 0'887 - 0'175}{0'87} = 0'032$$

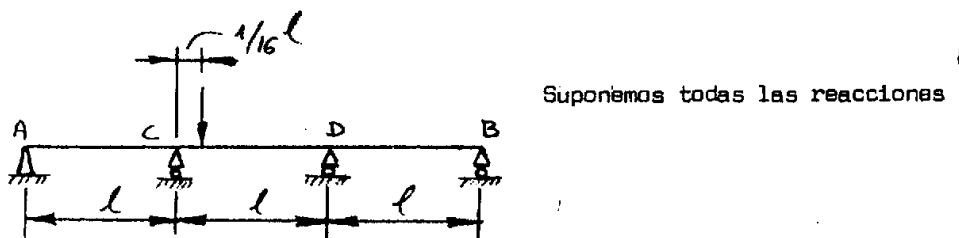
$$R_c = 887 \text{ Kg} \downarrow$$

$$R_d = 175 \text{ Kg} \uparrow$$

$$R_{av} = 611 - 667 \times 0'887 - 333 \times 0'175 = -39 \downarrow, \quad R_{aH} = 32 \rightarrow$$

$$R_{bv} = 389 - 333 \times 0'887 - 667 \times 0'175 = -23 \downarrow, \quad R_{bH} = 32 \leftarrow$$

Como comprobación aproximada de la cercha precedente, resolver la viga de la figura, aplicando la ecuación universal de la elástica



$$(1) \quad R_a + R_b + R_c + R_d = P$$

$$(2) \quad M_A = 0; R_c \cdot 1 + R_d \cdot 21 + R_b \cdot 31 = P \frac{7}{6} \cdot 1; \quad 6R_c + 12R_d + 18R_b = 7P \quad (2)$$

$EIf_x = EIf_0 + EI \theta_0 x + \sum P \frac{(x-a)^3}{3!}$; que con $f_0 = 0 = f_c = f_d = f_b$, aplicando sucesivamente a C, D y B, obtenemos:

$$x = 1 \Rightarrow 0 = EI \theta_0 \cdot 1 + R_a \frac{1^3}{6} \Rightarrow EI \theta_0 \cdot 21 + \frac{R_a 1^3}{3} = 0 \quad (\alpha_1);$$

$$EI \theta_0 \cdot 31 + R_a \frac{1^3}{2} = 0 \quad (\alpha_2)$$

$$x = 21 \Rightarrow 0 = EI \theta_0 \cdot 21 + R_a \frac{81^3}{6} + R_c \frac{1^3}{6} - \frac{P}{6} \frac{5 \cdot 1^3}{3} \quad (3)$$

$$x = 31 \Rightarrow 0 = EI \theta_0 \cdot 31 + R_a \frac{271^3}{6} + R_c \frac{81^3}{6} + R_d \frac{1^3}{6} - \frac{P}{6} \frac{11 \cdot 1^3}{3} \quad (4)$$

llevando (α_1) a (3), (α_2) a (4) y operando con todos convenientemente, - se llega a

$$1296 R_a + 216 R_c = 125 P \quad (3')$$

$$5184 R_a + 1728 R_c + 216 R_d = 1331 P \quad (4')$$

$$\text{reduciendo la (3')} \times 4 \text{ y la (4)} \Rightarrow 288 R_c + 72 R_d = 277 P \quad (5)$$

$$(1) \times 1296 \text{ y la (3)} \Rightarrow 1296 R_b + 1080 R_c + 1296 R_d = 1171 P$$

$$(2) \times 72 \quad \underline{1296 R_b + 432 R_c + 864 R_d = 504 P}$$

$$648 R_c + 432 R_d = 667 P \quad (6)$$

$$\text{y con la (5)} \quad 288 R_c + 72 R_d = 277 P \quad (5)$$

$$\text{finalmente, reduciendo la (6)} \times 4 \text{ y la (5)} \times 9, \quad R_d = \frac{35}{216} P \approx 0.162 P = R_d$$

$$\text{sacando ya, sucesivamente,} \quad R_c = 0.921 P$$

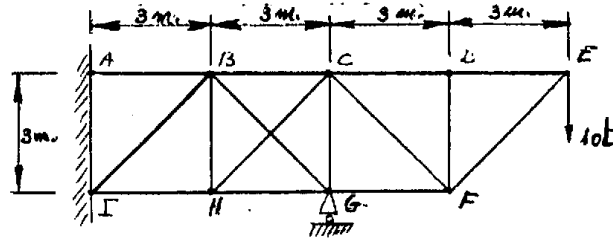
$$R_b = -0.026 P$$

$$R_a = -0.057 P$$

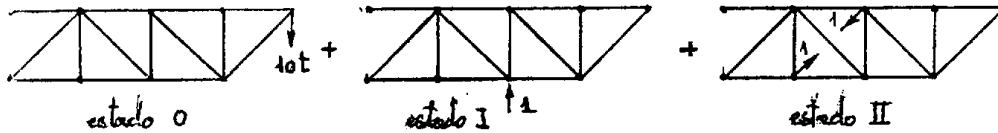
que se ve no se diferencian grandemente de los valores de los obtenidos para la cercha.

(Timoshenko y Young, nº 3, pag. 316)

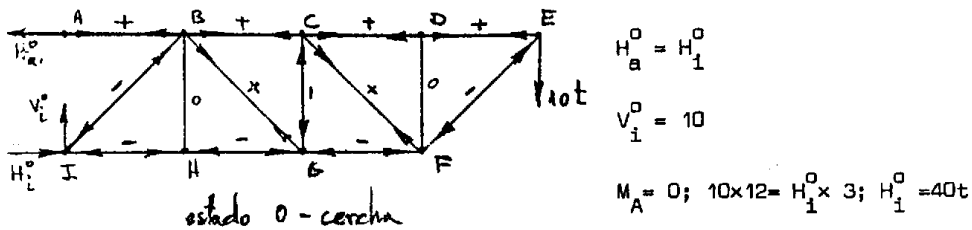
Calcular la reacción X en el apoyo G de la estructura de la figura, empleando el método del P.T.V.. La sección de todas las barras es $A = 12'9 \text{ cm}^2$; — $E = 2'1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.



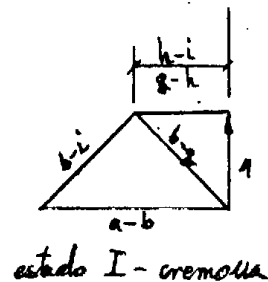
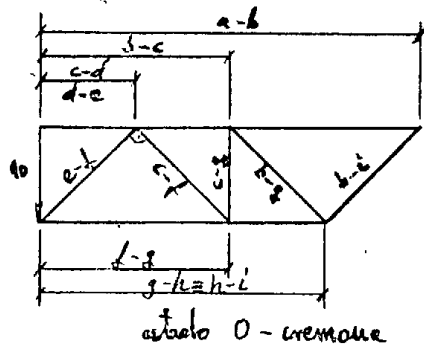
Solución : Primeramente descomponemos en tres isostáticos :



a continuación resolvemos cada cercha por Cremona : (Ves tensiones en cuadro posterior)



(Las tensiones se calculan por razones geométricas, analizando los cremones)



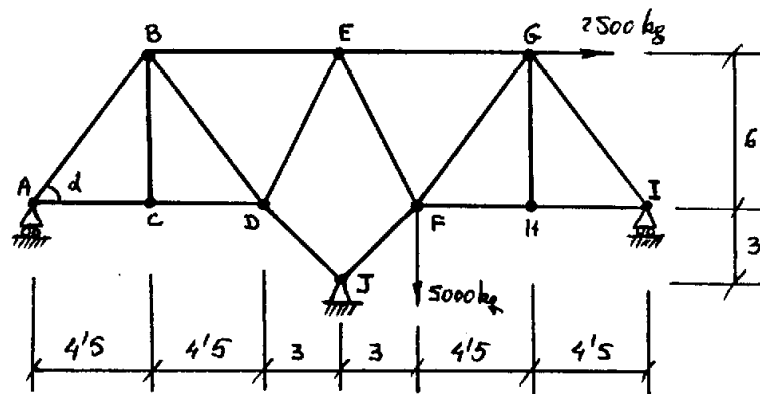
$$A = \frac{\begin{vmatrix} 196'569 & -2'707 \\ -34'142 & 4'828 \\ 11'657 & -2'707 \\ -2'707 & 4'828 \\ 11'657 & 196'569 \\ -2'707 & -34'142 \end{vmatrix}}{63'608} = \frac{1041'458}{63'608} \approx 16'373; \text{ luego } X_G = 16'373 \text{ t}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 196'569 & -2'707 \\ -34'142 & 4'828 \\ 11'657 & -2'707 \\ -2'707 & 4'828 \\ 11'657 & 196'569 \\ -2'707 & -34'142 \end{vmatrix}}{63'608} = \frac{134'119}{63'608} \approx 2'109$$

La tensión de cada barra es ahora $N_1^0 + AN_1^I + BN_1^{II}$

(Norris y Wilbur, prob. 4.5.d, pág.161)

Calcular las tensiones en todas las barras de la estructura adjunta.



Solución:

primeramente se estudia las condiciones de estabilidad y determinación:

$$b = 16, \quad n = 10, \quad r = 4, \quad b + r = 20 = 2n = 20$$

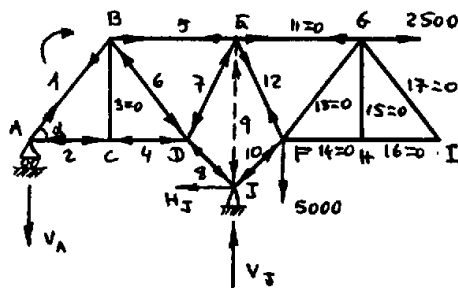
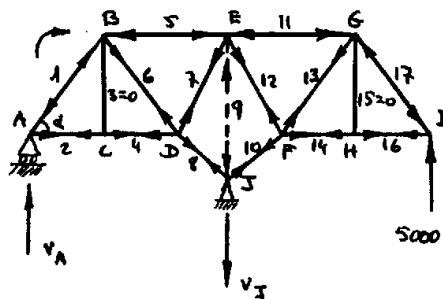
$$b = 2n - 3, \quad 16 < 2 \times 10 - 3 = 17$$

Luego, la estructura, sin apoyos, es inestable, es un mecanismo; el conjunto es estable y determinado, hiperestático exterior de grado uno.

Se coloca una barra virtual entre los nudos E y J y se resuelve el sistema hiperestático de grado uno ($17 + 4 = 21 > 2n = 20$), desdoblado en dos estructuras, según el esquema de la página siguiente, con la condición de que en la barra EJ la suma de tensiones del primer estado (cargas reales y liberación de un apoyo de manera a dejar la estructura isostática) y la de un múltiplo del segundo (la misma anterior, sin las cargas reales, y una carga ficticia en el apoyo suprimido) sean cero, es decir, tal que

$$\sum N + \lambda \sum AN = 0 \quad (a)$$

Los dos cremonas están resueltos sucesivamente (ver página siguiente); en el primero las barras 13 y siguientes no trabajan; en el segundo se aplica una fuerza de 5.000 kg en el nudo I.

Estado 0Estado I

En la primera, $H_J = 2500$

$$\sum M_J = 0 ; V_A \cdot 12 = 5000 \times 3 + 2500 \times 9$$

$$V_A = 3.125 \downarrow ; V_J = 8.125 \uparrow$$

En la segunda:

$$\sum M_A = 0 ; V_J = 10.000 \downarrow ; V_A = 5.000 \uparrow$$

En la página 103 se ha confeccionado una cuadro con las tensiones en todas las barras y en los Estados 0 y I, este último multiplicado por el valor de A (una vez hallado) y la suma total.

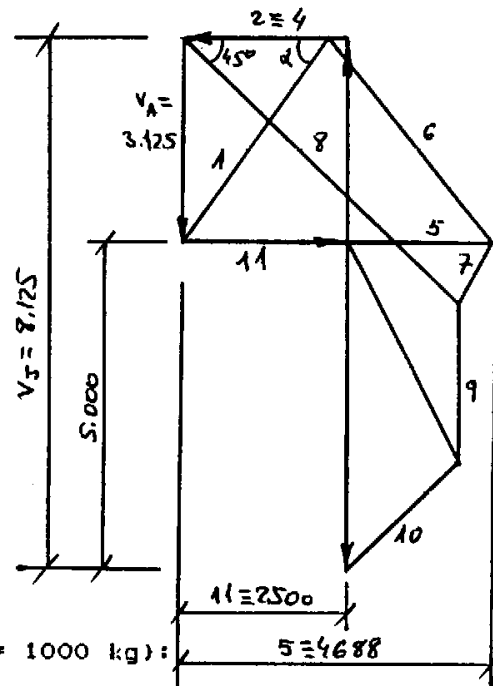
El valor de A se calcula de la ecuación (α):

$$- 2350 - A \cdot 3350 = 0 ; A = -0,7$$

Cremona del estado 0: (10 mm = 1000 kg)

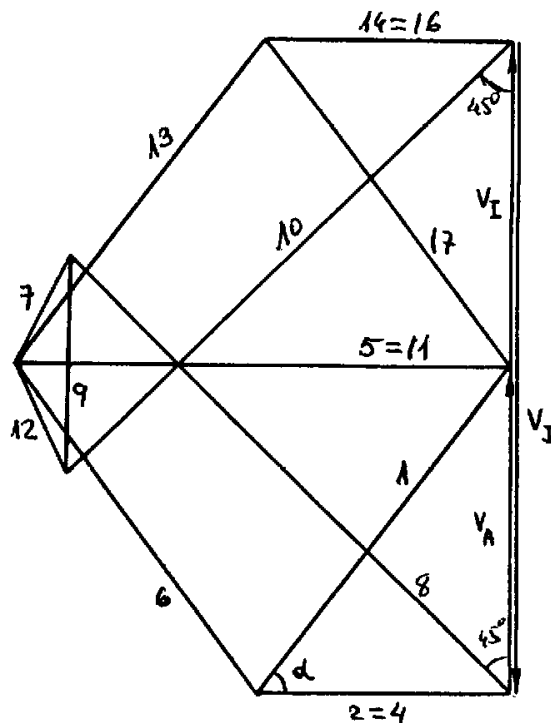
$$\operatorname{tg} \alpha = 6/4,5 \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = 0,8 \quad ; \quad \cos \alpha = 0,6$$

1	+ 3125/sen α = 3906
2	- F1 · cos α = 2344
3	0
4	2344
5	+ 2344 × 2 = 4688
6	- 3906
7	- 1150
8	- 5900
9	- 2350
10	- 2350
11	+ 2500
12	+ 3750
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0



Cremona del Estado I (10 mm = 1000 kg):

1	- 6250 (5000/sen α)
2	+ 3750 (6250 · cos α)
3	0
4	+ 3750
5	- 7500
6	+ 6250
7	+ 1900
8	+ 9400
9	- 3350
10	+ 9400
11	- 7500
12	+ 1900
13	+ 6250
14	+ 3750
15	0
16	+ 3750
17	- 6250



Se confecciona el siguiente cuadro de barras y tensiones:

(1) barras	(2) Estado 0	(3) Estado I	(4) Estado I-A	(5)=(2)+(4) total
1	+ 3906	- 6250	+ 4375	+ 8281
2	- 2344	+ 3750	- 2625	- 4969
3	0	0	0	0
4	- 2344	+ 3750	- 2625	- 4969
5	+ 4688	- 7500	+ 5250	+ 9938
6	- 3906	+ 6250	- 4375	- 8281
7	- 1150	+ 1900	- 1330	- 2480
8	- 5900	+ 9400	- 6580	-12480
9	- 2350	- 3350	+ 2350	0
10	- 2350	+ 9400	- 6580	- 8930
11	+ 2500	- 7500	+ 5250	+ 7750
12	+ 3750	+ 1900	- 1330	+ 2420
13	0	+ 6250	- 4375	- 4375
14	0	+ 3750	- 2625	- 2625
15	0	0	0	0
16	0	+ 3750	- 2625	- 2625
17	0	- 6250	+ 4375	+ 4375

Las reacciones finales resultan ser:

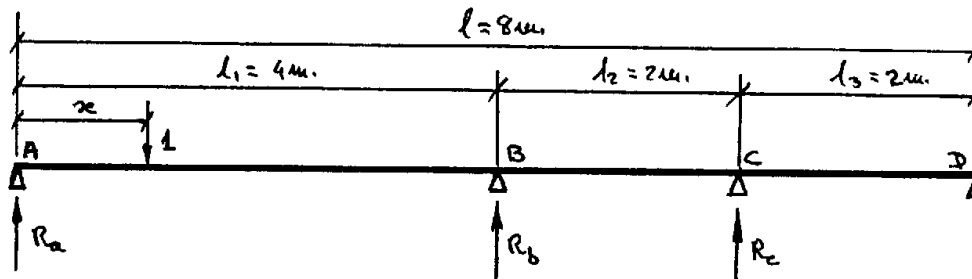
$$N_L = \downarrow 5.000 \times 0.7 = \downarrow 3.500$$

$$V_L = \uparrow 8.125 + \uparrow 10.000 \times 0.7 = \uparrow 15.125$$

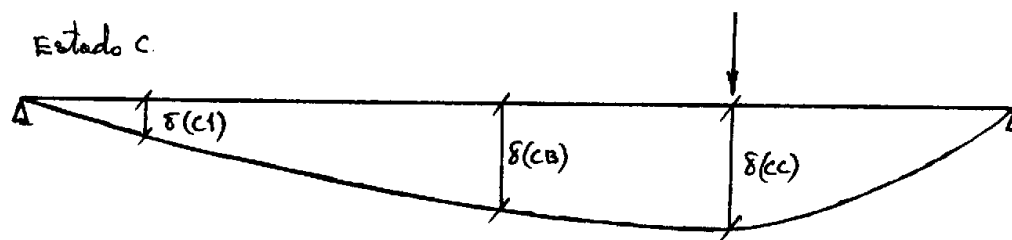
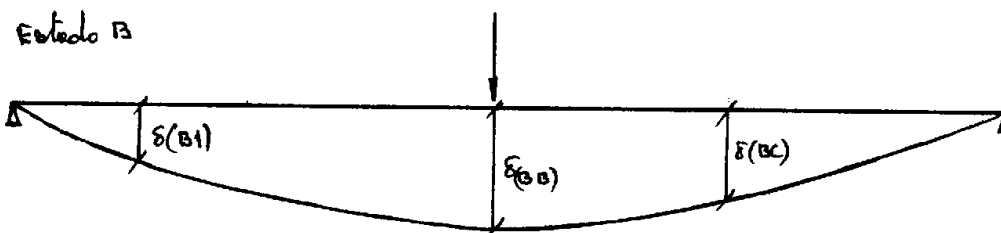
$$H_L = \overleftarrow{2.500}$$

$$V_A = \downarrow 3.125 + \downarrow 5.000 \times 0.7 = \downarrow 6.625$$

Calcular las líneas de influencia, dibujándolas a escala apropiada, de las reacciones R_a , R_b y R_c de la viga adjunta.



Se comienza calculando las L.d.I. de R_b y R_c , tomando dos estados virtuales tal y como se muestran aquí abajo; aplicando el teorema de reciprocidad entre cada uno de los estados virtuales y la viga propuesta, resulta:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado B:} \quad 1 \cdot \delta(B1) - R_b \cdot \delta(BB) - R_c \cdot \delta(BC) = 1 \cdot 0 \\ \text{Estado C:} \quad 1 \cdot \delta(C1) - R_b \cdot \delta(CB) - R_c \cdot \delta(CC) = 1 \cdot 0 \end{array} \right\}$$

Sistema equivalente al siguiente, del que se deducen las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} R_b \cdot \delta(BB) + R_c \cdot \delta(BC) &= \delta(B1) \\ R_b \cdot \delta(CB) + R_c \cdot \delta(CC) &= \delta(C1) \end{aligned} \right\}$$

$$R_b = \frac{\begin{vmatrix} \delta(B1) & \delta(BC) \\ \delta(C1) & \delta(CC) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta(BB) & \delta(BC) \\ \delta(CB) & \delta(CC) \end{vmatrix}} = \frac{\delta(B1) \cdot \delta(CC) - \delta(C1) \cdot \delta(BC)}{\delta(BB) \cdot \delta(CC) - \delta(CB) \cdot \delta(BC)} =$$

$$= K1 \cdot \delta(B1) - K2 \cdot \delta(C1)$$

$$R_b = \frac{\begin{vmatrix} \delta(BB) & \delta(B1) \\ \delta(CB) & \delta(C1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta(BB) & \delta(BC) \\ \delta(CB) & \delta(CC) \end{vmatrix}} = \frac{\delta(BB) \cdot \delta(C1) - \delta(CB) \cdot \delta(B1)}{\delta(BB) \cdot \delta(CC) - \delta(CB) \cdot \delta(BC)} =$$

$$= K3 \cdot \delta(C1) - K4 \cdot \delta(B1)$$

Los valores de $\delta(B1)$ y $\delta(C1)$ son los de la elástica de las vigas B y C respectivamente, que se toman de los formularios de ENSIDESAT:

viga B: $f(BD)$ es simétrica de $f(AD)$, con $1-x$ en lugar de x .

$$f_{AB} = \frac{P \cdot l^2 \cdot x}{16EI} \left[1 - \frac{4x^2}{3l^2} \right] ; \quad f_{BD} = \frac{P \cdot l^2 \cdot (1-x)}{16EI} \left[1 - \frac{4(1-x)^2}{3l^2} \right]$$

viga C: ($a = 6$; $b = 2$)

$$f_{AC} = \frac{Plbx}{6EI} \left[1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right]$$

$$f_{CD} = \frac{Pla(1-x)}{6EI} \left[1 - \frac{a^2}{l^2} - \frac{(1-x)^2}{l^2} \right]$$

Para calcular las constantes, $\delta(BB)$, $\delta(CC)$, etc., basta en las ecuaciones anteriores sustituir cada valor de x ; por ejemplo, $\delta(BB)$ se obtendrá de la primera con $x = 4$, $\delta(CC)$ de la tercera con $x = 6$, y así sucesivamente. Los resultados obtenidos son:

$$\delta(BB) = \frac{32}{3EI} \quad ; \quad \delta(CC) = \frac{6}{EI} \quad ; \quad \delta(BC) = \frac{22}{3EI} = \delta(CB)$$

$$K1 = \frac{27}{46} EI \quad ; \quad K2 = \frac{33}{46} EI = K4 \quad ; \quad K3 = \frac{48}{46} EI$$

Con lo cual, las L.d.I. de Rb y Rc son, respectivamente:

$$Rb \begin{vmatrix} B \\ A \end{vmatrix} = \frac{27P1^2x}{46 \cdot 16} \cdot \left[1 - \frac{4x^2}{31^2} \right] - \frac{33P1bx}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{b^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} \right]$$

$$Rb \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} = \frac{27P1^2(1-x)}{46 \cdot 16} \cdot \left[1 - \frac{4(1-x^2)}{31^2} \right] - \frac{33P1bx}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{b^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} \right]$$

$$Rb \begin{vmatrix} D \\ C \end{vmatrix} = \frac{27P1^2(1-x)}{46 \cdot 16} \cdot \left[1 - \frac{4(1-x^2)}{31^2} \right] - \frac{33P1a(1-x)}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{1^2} - \frac{(1-x)^2}{1^2} \right]$$

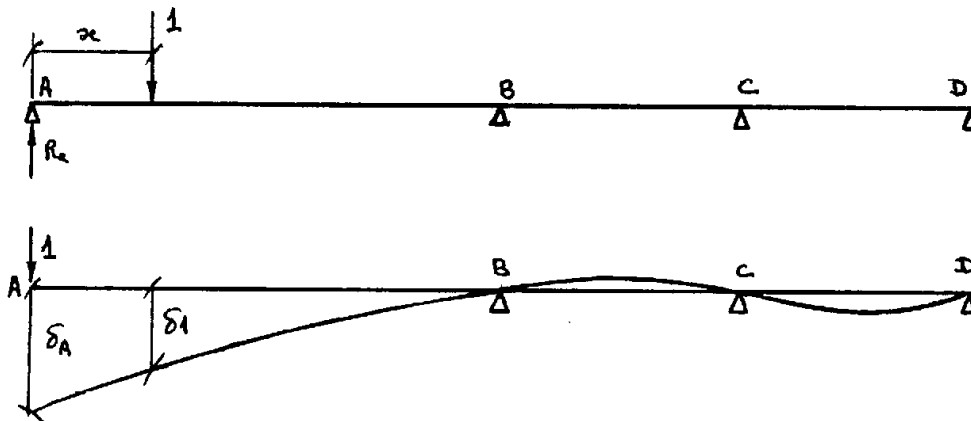
$$Rc \begin{vmatrix} B \\ A \end{vmatrix} = \frac{48P1bx}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{b^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} \right] - \frac{33P1^2x}{46 \cdot 16} \cdot \left[1 - \frac{4x^2}{31^2} \right]$$

$$Rc \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} = \frac{48P1bx}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{b^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} \right] - \frac{33P1^2(1-x)}{46 \cdot 16} \cdot \left[1 - \frac{4(1-x^2)}{31^2} \right]$$

$$R_c \left| \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. = \frac{48P1b(1-x)}{46 \cdot 6} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{1^2} - \frac{(1-x^2)}{1^2} \right] -$$

$$- \frac{33P1^2(1-x)}{46 \cdot 12} \cdot \left[1 - \frac{4(1-x^2)}{31^2} \right]$$

Una vez calculadas todas estas L.d.I., dando valores sucesivos a x , se forma el cuadro que aparece en la página 108, y con aquellos valores se dibujan las gráficas que aparecen en la página 109; resta por calcular la L.d.I. de R_a , para lo cual aplicamos el PTV entre la viga propuesta y la que resulta de suprimir el apoyo A y hacer actuar en él una fuerza unitaria:



De dicho principio del PTV se deduce:

$$1 \cdot \delta_1 - R_a \cdot \delta_a = 0 \quad ; \quad R_a = \frac{\delta_1}{\delta_a}$$

Tomando momentos en el punto D:

$$R_a \cdot 1 + R_b \cdot (12 + 13) + R_c \cdot 13 - 1 \cdot (1 - x) = 0$$

$$R_a = \frac{(1-x)}{1} - R_b \frac{12+13}{1} - R_c \frac{13}{1} \quad \text{=====>}$$

$$K_5 = (12 + 13)/1 = 4/8 = 1/2 \quad ; \quad K_6 = 13/1 = 1/4$$

$$Ra \begin{vmatrix} B \\ A \end{vmatrix} = \frac{1-x}{1} - \left[Rb \begin{vmatrix} P \\ A \end{vmatrix} \cdot K5 \right] - \left[Rc \begin{vmatrix} D \\ A \end{vmatrix} \cdot K6 \right]$$

$$Ra \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} = \frac{1-x}{1} - \left[Rb \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} \cdot K5 \right] - \left[Rc \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} \cdot K6 \right]$$

$$Ra \begin{vmatrix} D \\ C \end{vmatrix} = \frac{1-x}{1} - \left[Rb \begin{vmatrix} D \\ C \end{vmatrix} \cdot K5 \right] - \left[Rc \begin{vmatrix} D \\ C \end{vmatrix} \cdot K6 \right]$$

Ahora ya se está en condiciones de confeccionar el cuadro anunciado más arriba, incluyendo los valores de Ra:

x	Rb	Rc	Ra
0,00	0,000	0,000	1,000
0,25	0,138	- 0,064	0,915
0,50	0,274	- 0,128	0,832
0,75	0,407	- 0,188	0,749
1,00	0,535	- 0,244	0,664
1,25	0,635	- 0,294	0,589
1,50	0,767	- 0,336	0,512
1,75	0,868	- 0,369	0,439
2,00	0,956	- 0,391	0,369
2,25	1,030	- 0,401	0,303
2,50	1,088	- 0,397	0,242
2,75	1,128	- 0,378	0,186
3,00	1,147	- 0,342	0,135
3,25	1,148	- 0,288	0,094
3,50	1,124	- 0,213	0,053
3,75	1,075	- 0,113	0,023
4,00	1,000	0,000	0,000
4,25	0,897	0,142	- 0,015
4,50	0,773	0,296	- 0,023
4,75	0,635	0,457	- 0,026
5,00	0,491	0,614	- 0,024
5,25	0,348	0,756	- 0,017
5,50	0,214	0,876	- 0,013
5,75	0,095	0,958	- 0,006
6,00	0,000	1,000	0,000
6,25	- 0,060	0,990	0,004
6,50	- 0,100	0,930	0,007
6,75	- 0,124	0,840	0,008
7,00	- 0,125	0,711	0,008
7,25	- 0,105	0,557	0,007
7,50	- 0,076	0,382	0,005
7,75	- 0,040	0,194	0,002
8,00	0,000	0,000	0,000