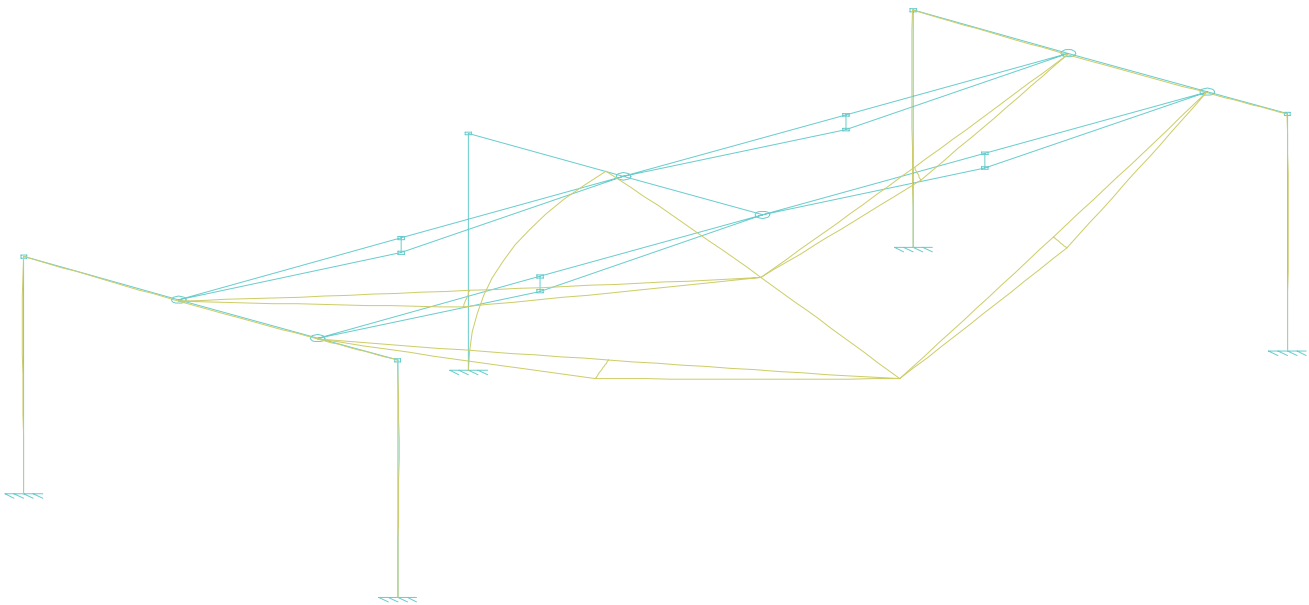


# **TEORÍA DE ARCOS Y MÉTODO DE CROSS APLICADOS AL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS**



**J.A. DÁVILA BAZ, J. PAJÓN PERMUY**

# **TEORÍA DE ARCOS Y MÉTODO DE CROSS APLICADOS AL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS**

**Juán Antonio Dávila Baz**

*Profesor y Catedrático de Mecánica General, Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras*

**Javier Pajón Permuy**

*Profesor Asociado*

**Universidad de Huelva**

HUELVA, 1997

**TEORÍA DE ARCOS Y MÉTODO DE CROSS  
APLICADOS AL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS**

Primera edición 1997.

© Juan Antonio Dávila Baz.

Javier Pajón Permuy.

Edita:

Depósito Legal:

I.S.B.N.:

## PRÓLOGO

Presentamos unos breves apuntes de la Teoría de Arcos y el Método de Cross, recopilados de distintos autores, adaptados al uso de nuestra Escuela y para los alumnos de tercer curso, especialidad de Estructuras e Instalaciones Industriales.

Como recopilación, no hay nada novedoso. Para el planteamiento de las ecuaciones generales en la Teoría de Arcos, hemos seguido casi literalmente a Fernández Casado, Cálculo de Estructuras Reticulares, si bien explicitando más el desarrollo para entendimiento de los alumnos.

Los diversos casos prácticos que hemos resuelto de la Teoría de Arcos, permiten por simple cambio a valores numéricos, resolver la mayoría de los problemas que se puedan proponer.

Para la primera parte del Método de Cross nos hemos basado también en la obra citada de Fernández Casado, pero añadiendo algunos conceptos sobre estructuras traslacionales e intraslacionales y sobre el estudio de estructuras simétricas y antisimétricas. Una segunda parte, en la que se expone la teoría de los apoyos con empotramiento flexibles, la hemos tomado de la obra de J. Calavera y, sin ser propiamente teoría de Cross, amplía los conceptos de rigidez y flexibilidad, sirviendo para el cálculo matricial posterior.

Si bien estos apuntes fueron editados por nosotros en febrero de 1.982, los reeditamos ahora mejorados de presentación; creemos con ello servir a nuestra comunidad estudiantil, a la que van dedicados; de paso, hemos modificado también algunos aspectos y añadido otros.

LOS AUTORES

# ÍNDICE

## CAPÍTULO I. TEORÍA DE ARCOS.

	<u>Pág.</u>
1.1.- Introducción. ....	1
1.2.- Arcos triarticulados. ....	5
1.3.- Arcos simétricos, cargas concentradas. ....	7
1.4.- Arcos simétricos, cargas repartidas. ....	8
1.5.- Arcos, teoría general. ....	9
1.6.- Ecuaciones referidas a los ejes elásticos ....	15
1.7.- Cálculo de los coeficientes de rigidez y trasmisión ....	18
1.8.- Arcos biarticulados simétricos ....	20
1.9.- Arcos simétricos empotrados. ....	24
1.10.- Arcos asimétricos. ....	31

## CAPÍTULO II. MÉTODO DE CROSS.

2.1.- Introducción. ....	33
2.2.- Convenio de signos ....	34
2.3.- La barra doblemente empotrada. ....	35
2.4.- La barra empotrada-apoyada; coeficiente de rigidez y factor de trasmisión. ....	41
2.5.- La barra con empotramiento elástico; giros y desplazamientos. ....	43
2.6.- Giros de las secciones de empotramiento. ....	43
2.7.- Deslizamientos de las secciones de empotramiento. ....	44
2.8.- Caso general. ....	46
2.9.- La barra doblemente apoyada. ....	46
2.10.- Cuadro resumen. ....	47
2.11.- Desplazamientos: grado de traslacionalidad. ....	48
2.12.- Exposición del método de Cross: método indirecto. ....	51
2.12.1.- Etapa primera. ....	51
2.12.2.- Etapa segunda. ....	52
2.12.3.- Etapa tercera: estados fundamental y paramétricos. ....	53
2.12.4.- Etapa cuarta. ....	56
2.12.5.- Comprobaciones finales. ....	57
2.13.- Simetría y antimetría. ....	59
2.14.- Otras simplificaciones. ....	61
2.14.1.- Barras acodadas. ....	62
2.14.2.- Pórticos rectos. ....	62
2.14.3.- Vigas continuas. ....	63
2.14.4.- Distribuciones “tipo”. ....	63
2.14.5.- Simplificaciones en estructuras de edificios. ....	65
2.16.- Barras con empotramientos semirrígidos. ....	68
2.17.- Líneas de influencia mediante el método de Cross. ....	70
2.18.- Apoyos con empotramientos flexibles. ....	80
2.18.1.- Introducción. ....	80
2.18.2.- Rigidez y factor de trasmisión en el caso de empotramientos flexibles. ....	81
2.18.3.- Momentos de empotramiento, barra biempotrada, empotramientos flexibles ambos lados y carga uniformemente repartida. ....	83
2.18.4.- Ídem para cargas cualquiera. ....	84
2.18.5.- Momentos producidos en barras con empotramientos flexibles y traslación de un apoyo. ....	85

2.19.- Resumen del método.

2.20.- Ejemplo.

## CAPÍTULO I

### TEORÍA DE ARCOS

#### 1.1.- Introducción.

Como introducción a la teoría de arcos no somos capaces de evitar la tentación de copiar algunos de los bellos párrafos que Eduardo Torroja dedica a esta forma constructiva en su libro "Razón y ser de los tipos estructurales", libro que, aunque ya de muchos años, no deja de ser magnífico por el entusiasmo casi artístico con que trata los distintos tipos constructivos y que recomendamos al alumno lea alguna vez que caiga en sus manos(\*). Dice así Eduardo Torroja:

"El arco es el mayor invento tensional del arte clásico. El sigue impresionando al vulgo, y la Humanidad ha tardado mucho en acostumbrarse a su fenómeno resistente; prueba de ello es la frecuencia con que la leyenda achaca al diablo su construcción...Si la columna es arquitectura pura, el arco es ingeniería; o mejor dicho, el arco es técnica...Las predilecciones del Arte han sido para el arco; ese arco que nunca duerme, según reza el proverbio árabe...ese arco que, en su encorvamiento vuela sobre el vano y da la sensación de algo

---

(\*).-"Razón y ser de los tipos estructurales", E.Torroja Miret, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1991 (reedición moderna).

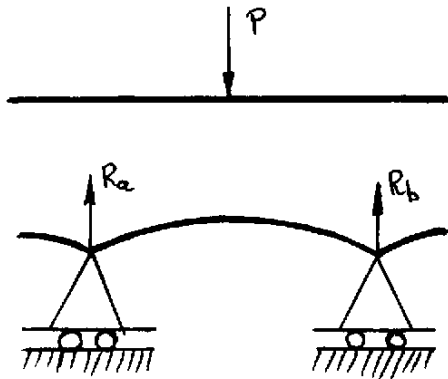
más dramáticamente tensional que la columna... va siempre unido a la idea de esfuerzo por resistir, de salto por dominar la distancia. Por eso es el elegido para proclamar los honores de la victoria.

Construir un arco no es tan sencillo como poner una columna: para construir el arco hace falta sostener todas y cada una de sus dovelas hasta colocar la clave, sólo entonces entra el arco en acción y se realiza el equilibrio". Hasta aquí Eduardo Torroja.

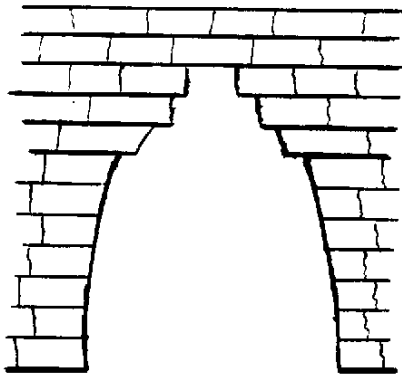
Cualquier estructura curva, apoyada en sus extremos y soportando una carga que la haga trabajar principalmente a compresión, o lo que es equivalente, que produce empujes oblicuos en los arranques, se llama arco. Se supone que su plano de curvatura es también un plano de simetría para cada una de las secciones transversales y que las fuerzas externas aplicadas al arco actúan solamente en aquel plano de simetría. En tales condiciones, la deformación tendrá lugar en ese plano y el problema de análisis será bidimensional.

Si la sección transversal del arco no es simétrica con respecto al plano de curvatura, o si las cargas se aplican normalmente a este plano, se producirá torsión y entonces la barra no se puede considerar propiamente como un arco. En todo lo que sigue no se tendrán en cuenta las condiciones que conducen a la torsión.



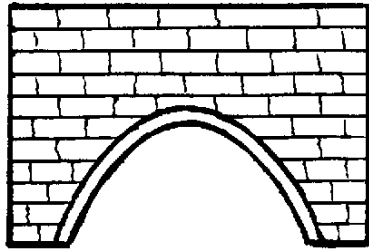


No siempre una estructura curva se comporta como un arco; por ejemplo, en la figura adjunta, al permitir la libre dilatación, el arco se comporta como una viga, ya que las reacciones serán necesariamente verticales. El trabajo principal del arco es la compresión. Otro ejemplo puede ilustrar el falso arco: para el técnico el arco pretende ser un antifunicular de las cargas; es decir, una pieza curva que, resistiendo solo o principalmente a compresión, transmita los pesos propios, y los que sobre él inciden, a dos apoyos distanciados entre sí. Nada tiene que ver con el arco el forma-

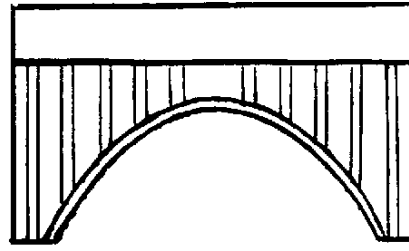


do por ménsulas en voladizo, complementado, en todo caso, con un sillar o dintel central apoyando sobre los extremos de esas ménsulas (figura esquemática al lado).

Conviene también distinguir dos clases de arcos: arco enjutado y arco exento; en el primero la flexión del propio arco está impedida por el muro macizo acompañante (ver figura en pág. siguiente); por el contrario, el arco exento debe considerarse como puro arco desde un punto de vista tensional y la directriz puede acortarse por efecto de la flexión-compresión, cambiando de forma ligeramente. Aquel se suele construir en piedra y éste en hormigón o acero.



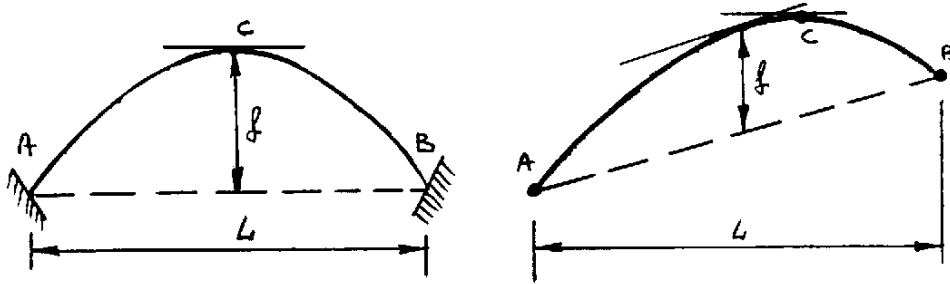
arco enjutado



arco exento

En general, para que un arco se comporte como tal es esencial que los extremos, ambos, articulados o empotrados, no se desplacen al aplicar las cargas; de otra forma no puede ponerse en juego la verdadera acción resistente del arco (los asientos permanentes, no previstos, de los estribos, debidos a malas condiciones de la cimentación, han conducido al fallo de muchas estructuras en forma de arcos). Es típico del arco dar empujes horizontales sobre los apoyos; y requieren siempre una buena cimentación. Aún así, en los cálculos se tendrá en cuenta esos asientos citados porque la teoría será completamente general.

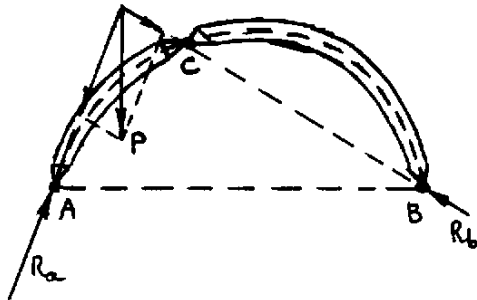
De los arcos ilustrados en la pág. siguiente el primero es simétrico y el segundo asimétrico. El punto más alto,  $c$ , de la directriz del arco se denomina clave y la línea  $AB$ , que une los puntos de apoyo, se llama línea de arranque; la distancia horizontal entre apoyos,  $L$ , se llama luz del arco y la máxima distancia vertical desde la línea de arranque a la directriz,  $f$ , se denomina flecha.



Como quiera que en el caso de empotramiento, y en cada extremo del arco, podrán existir tres reacciones (horizontal, vertical y momento), el caso más hiperestático, con doble empotramiento, tendrá un máximo de seis reacciones y tendrá tres incógnitas superabundantes. El arco doblemente articulado dos reacciones en cada apoyo y, por tanto, una incógnita superabundante. Comenzamos el estudio por un arco triarticulado, que veremos es isostático.

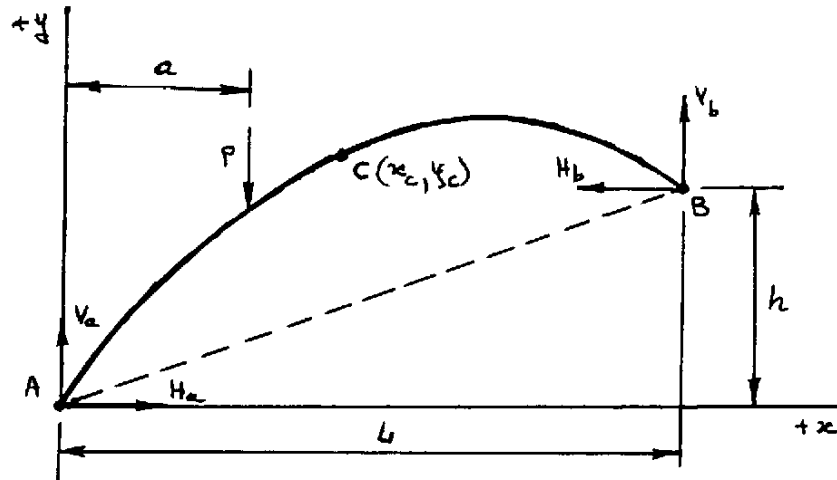
1.2.-

Arcos triarticulados.- No forman, en realidad, teoría especial, al poderse resolver con los conocimientos de la isostática, como vamos a ver, pero los incluimos aquí por hacer un cuerpo homogéneo de doctrina.



En el arco de la figura, articulado en A, B y C, sometido a una acción exterior, P, al considerar el momento nulo en C, y tomando la parte CB, obliga a que la reacción en B tenga la dirección BC; y como quiera que Ra y Rb se han de cortar en la

línea de acción de  $P$ , nos da una solución gráfica definida. Para resolver analíticamente un arco asimétrico, siendo la ecuación de su directriz  $f(x,y) = 0$ , o bien  $y = f(x)$ , y teniendo por coordenadas de la articulación en  $C$  los valores  $(x_c, y_c)$  procederemos del siguiente modo:



$$H_a = H_b = H \quad [1] ; \quad V_b \cdot L + H_b \cdot h - P \cdot a = 0 \quad [3]$$

$$V_a + V_b - P = 0 \quad [2] ; \quad H_b \cdot (y_c - h) - V_b \cdot (L - x_c) = 0 \quad [4]$$

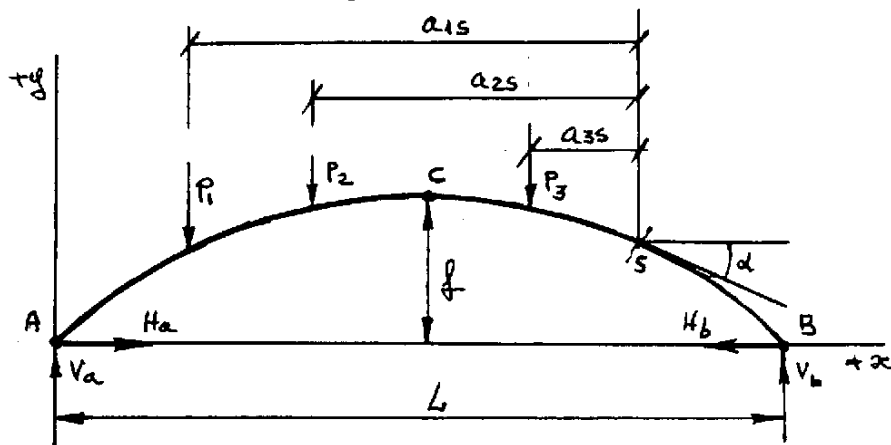
Si la carga  $P$  estuviese entre  $C$  y  $B$ , la "a" se tomaría como distancia horizontal de  $P$  a  $B$ . Si consideramos el sistema anterior (resuélvase como ejercicio) con  $h = 0$ , es decir, como arco simétrico,  $C(L/2, f)$  las reacciones verticales salen con el mismo valor de las de una viga doblemente apoyada en  $A$  y  $B$  sometida a la carga  $P$ , es decir:

$$V_a = \frac{P}{L} (L - a) \quad , \quad V_b = \frac{P}{L} \cdot a$$

$$\text{y el empuje:} \quad H = \frac{P \cdot a}{2 \cdot f} \quad [\alpha]$$

1.3.- Arcos triarticulados simétricos, varias cargas concentradas.-

Sea el arco de la figura, sometido a las cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . Por lo expuesto más arriba, podemos calcular las reacciones  $V_a$  y  $V_b$  (que serán idénticas a las de una viga apoyada en A y B) y  $H_a = H_b = H$ , que las calcularemos mediante la suma de la ecuación [a] a cada una de las cargas  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , no olvidando que para la carga  $P_3$ , situada a la derecha de C, la "a" es la distancia de B a dicha carga.



Para calcular el momento en una sección S de coordenadas  $(x, y)$ , siendo la ecuación de la directriz  $y = f(x)$  ó  $f(x, y) = 0$ , procederemos:

$$M_s = x \cdot V_a - y \cdot H - \overbrace{(P_1 \cdot a_{1s} + P_2 \cdot a_{2s} + P_3 \cdot a_{3s})}^{M_i} = x \cdot V_a - y \cdot H - M_i$$

habiendo llamado  $M_i$  al momento flector en la sección considerada de las cargas exteriores. Para calcular la compresión,  $N$ , y la cortadura,  $T$ , en dicha sección, tendremos:

$$Y_s = V_a - P_1 + P_2 + P_3 \quad ; \quad X_s = H \quad ; \quad \operatorname{tga} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$N = Y_s \cdot \operatorname{sen} \alpha + X_s \cdot \operatorname{cos} \alpha = [V_a - (P_1 + P_2 + P_3)] \operatorname{sen} \alpha + H \operatorname{cos} \alpha$$

$$T = Y_s \cdot \operatorname{cos} \alpha - X_s \cdot \operatorname{sen} \alpha = [V_a - (P_1 + P_2 + P_3)] \operatorname{cos} \alpha - H \operatorname{sen} \alpha$$

1.4.- Arcos triarticulados simétricos, carga repartida.- Si en la misma figura anterior consideramos una carga repartida,  $p \cdot a$ , a partir del origen izquierdo, concentrada, por tanto, a  $a/2$  del origen, y hacemos  $a/L = \Gamma$ , obtenemos:

$$V_b = \frac{p \cdot a}{L} \cdot \frac{a}{2} = \frac{p \cdot L \cdot \Gamma^2}{2}$$

$$V_a = \frac{p \cdot a}{L} \cdot \left[ L - \frac{a}{2} \right] = p \cdot L \cdot \Gamma \left[ 1 - \frac{\Gamma}{2} \right]$$

$$H = \frac{p \cdot a}{2 \cdot f} \cdot \frac{a}{2} = \frac{p \cdot L^2 \cdot \Gamma^2}{4 \cdot f}, \quad \text{con } \Gamma \leq 1/2$$

Si  $\Gamma = 1/2$ , carga repartida sobre la mitad del arco:

$$V_b = (p \cdot L)/8 \quad V_a = (3 \cdot p \cdot L)/8 \quad H = (p \cdot L^2)/(16 \cdot f)$$

Si  $\Gamma = 1$ , carga repartida sobre todo el arco:

$$V_b = (p \cdot L)/2 \quad V_a = (p \cdot L)/2 \quad H = (p \cdot L^2)/(8 \cdot f)$$

La última fórmula se ha de calcular tomando momentos respecto de  $c$ , clave del arco, y no mediante la  $[\alpha]$  que se expuso anteriormente, que limita la carga a la mitad izquierda; por eso hemos escrito más arriba la limitación  $\Gamma \leq 1/2$  para  $H$ .

También se podía haber obtenido la  $V_b$  última sumando el efecto de dos mitades,  $\Gamma = 1/2$ , que son coincidentes de signos:

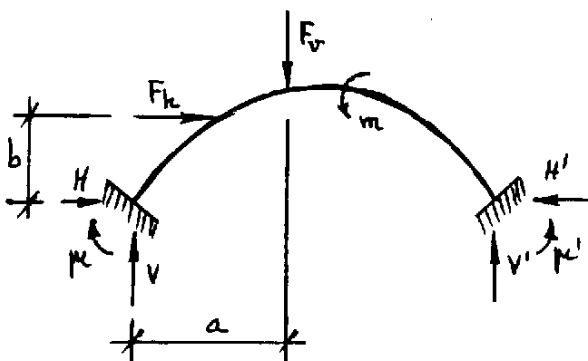
$$H = \frac{p \cdot L^2}{16 \cdot f} + \frac{p \cdot L^2}{16 \cdot f} = \frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

Los momentos flectores, compresión y cortadura en una sección, s, se calcularán como quedó expuesto en las cargas concentradas, con la variante de carga repartida.

1.5.-

Arcos, teoría general.- Como se expresó en la introducción, podremos tener un máximo de seis incógnitas y un grado de hiperestaticidad de tres, siendo el cálculo de estas reacciones lo esencial para el dimensionamiento del arco.

En la figura se ha considerado un arco sometido a unas acciones exteriores genéricas,  $F_h$ ,  $F_v$  y  $m$ . Se han escrito las tres ecuaciones fundamentales de la estática,



$$[5] \quad V + V' + \Sigma F_v = 0$$

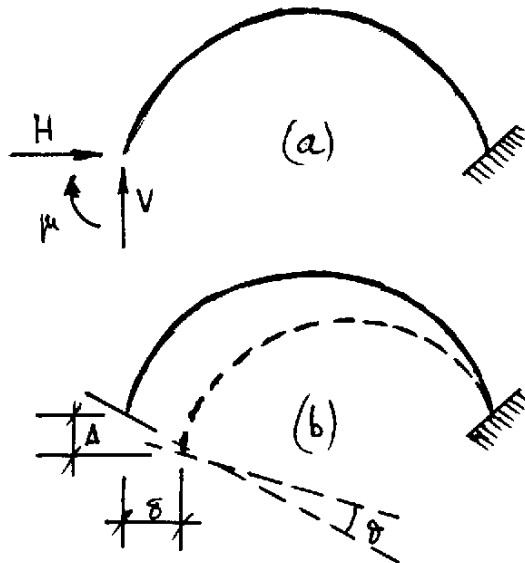
$$[6] \quad H + H' + \Sigma F_h = 0$$

$$[7] \quad \mu + \mu' + V' \cdot L + \Sigma F_v \cdot a + \Sigma F_h \cdot b + \Sigma m = 0$$

considerando sumas algebraicas y signos implícitos; será necesario obtener otras tres ecuaciones, que denominamos complementarias, para resolver el problema completo.

Estas ecuaciones complementarias denotan la hiperestaticidad

de la estructura y se obtienen expresando la influencia restrictiva que la sustentación ejerce en las deformaciones de



la estructura; para esto dejamos virtualmente dicha estructura en el grado de libertad que corresponde al isostatismo de la figura adjunta (a), como viga en voladizo; es lo mismo que hacíamos en otras estructuras hiperestáticas, liberando ligaduras hasta convertirlas en isostáticas. Obtenemos en estas condiciones las deformaciones de la estructura (b)

y ahora estableceremos las ecuaciones complementarias igualando las deformaciones totales, en las que figuran las reacciones  $H$ ,  $V$ ,  $\mu$ , a los valores que imponga la sustentación en cada caso.

Por ejemplo, para empotramiento perfecto:  $\Delta = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\theta = 0$ ; y para articulación en el mismo extremo izquierdo:  $\Delta = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\theta \neq 0$ ; etc..

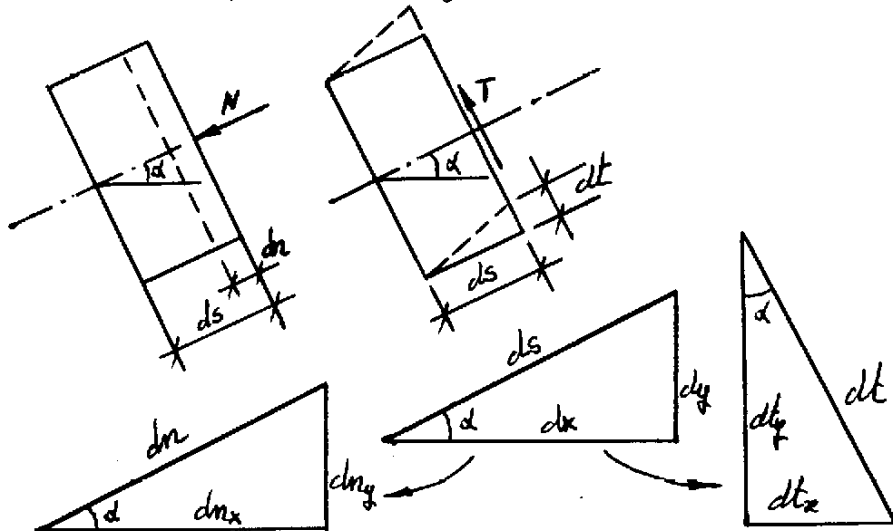
Para resolver en el arco el problema del isostatismo virtual podríamos haber seguido caminos distintos: como viga isostática con apoyo fijo en un extremo y deslizante en el otro; o cortando por clave y considerar dos mitades en voladizo, etc..

El problema (b), cálculo de las deformaciones  $\Delta$ ,  $\delta$ ,  $\theta$ , lo



resolvemos aplicando los principios de las piezas prismáticas de gran radio de curvatura. Teniendo en cuenta la continuidad de la estructura, aplicaremos el análisis infinitesimal, estudiando las deformaciones en un elemento de directriz entre dos secciones infinitamente próximas, descomponiendo el movimiento relativo de ambas secciones en giro debido al par flector, desplazamiento paralelo (sin giro) por el esfuerzo de compresión y corrimiento transversal (también sin giro) por el esfuerzo de cortadura.

Las figuras correspondientes están aquí abajo. El esfuerzo normal,  $N$ , provoca un desplazamiento  $dn = (N/AE) \cdot ds$ ; y, análogamente, el de cortadura,  $T$ , otro  $dt = (T/AG) \cdot ds$ ; de donde sacamos, con las semejanzas señaladas en cada caso:



$$\frac{dn}{ds} = \frac{dnx}{dx} = \frac{dny}{dy}$$

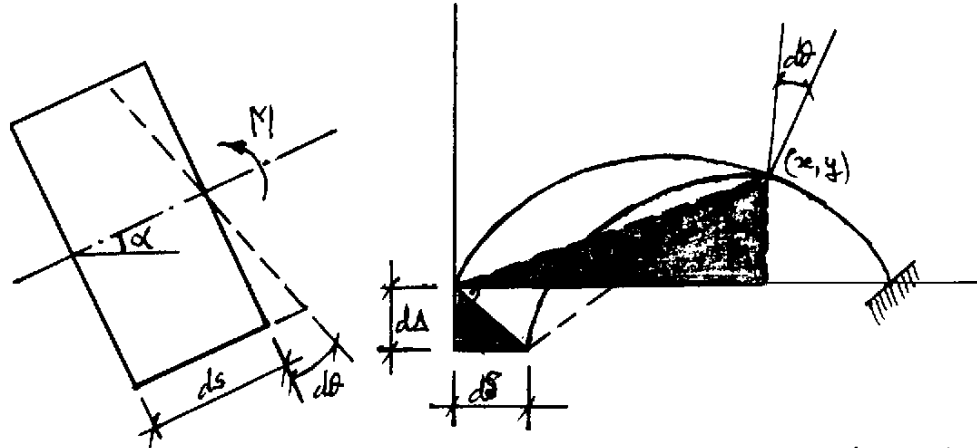
$$\frac{dt}{ds} = \frac{dtx}{dy} = \frac{dty}{dx}$$

$$dnx + dtx = \frac{N}{A \cdot E} \cdot dx + \frac{T}{A \cdot G} \cdot dy$$

$$dny + dty = \frac{N}{A \cdot E} \cdot dy + \frac{T}{A \cdot G} \cdot dx$$

En cuanto al giro, éste provoca además del propio giro,

desplazamientos horizontal y vertical, como observamos en la figura siguiente:



$$(x/d\Delta) = (y/d\delta) = (1/d\theta) \implies d\delta = y \cdot d\theta \quad ; \quad d\Delta = x \cdot d\theta$$

valiendo el giro:

$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds$$

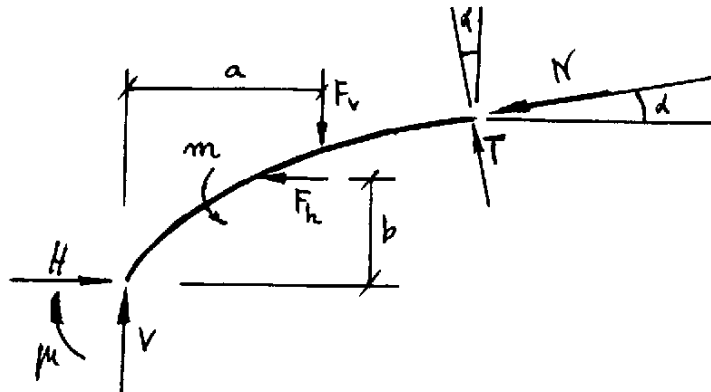
y siendo  $(x, y)$  las coordenadas de la sección en estudio; los triángulos sombreados son semejantes por lados perpendiculares, al considerar el triángulo isósceles de ángulo agudo  $d\theta$ , que tiende a cero. Resumiendo todas las deformaciones, e integrando a lo largo del arco completo, podemos escribir:

$$\theta = \int_s \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds \quad [8]$$

$$\Delta = \int_s \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds + \int_s \frac{N}{E \cdot A} \cdot dy + \int_s \frac{T}{G \cdot A} \cdot dx \quad [9]$$

$$\delta = \int_s \frac{M}{E \cdot I} \cdot y \cdot ds + \int_s \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx + \int_s \frac{T}{G \cdot A} \cdot dy \quad [10]$$

En estas tres ecuaciones complementarias no figuran explícitamente las reacciones que venimos buscando. Para ello aislamos la parte izquierda del arco, hasta la sección en estudio:



$$M = \mu + V \cdot x + H \cdot y + \overbrace{\Sigma F_v \cdot (x - a) + \Sigma F_h \cdot (y - b) + \Sigma m}^{M_i}$$

$$N = H \cdot \cos \alpha + V \cdot \sin \alpha + \overbrace{\Sigma F_h \cdot \cos \alpha + \Sigma F_v \cdot \sin \alpha}^{N_i}$$

$$T = H \cdot \sin \alpha + V \cdot \cos \alpha + \overbrace{\Sigma F_h \cdot \sin \alpha + \Sigma F_v \cdot \cos \alpha}^{T_i}$$

Hemos agrupado entre llaves los valores isostáticos, es decir, los que corresponden a la viga curva en voladizo de igual luz y sometida a las mismas cargas exteriores; colocando estas valores en las ecuaciones [8], [9] y [10], y con las simplificaciones que luego se indican, resulta:

$$E \cdot \Theta = \int_s Mi \cdot \frac{ds}{I} + \mu \int_s \frac{ds}{I} + V \int_s x \cdot \frac{ds}{I} + H \int_s y \cdot \frac{ds}{I} \quad [8']$$

$$E \cdot \Delta = \int_s Mi \cdot x \cdot \frac{ds}{I} + \mu \int_s x \cdot \frac{ds}{I} + V \int_s x^2 \cdot \frac{ds}{I} + H \int_s x \cdot y \cdot \frac{ds}{I} \quad [9']$$

$$E \cdot \delta = \int_s Mi \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + \mu \int_s y \cdot \frac{ds}{I} + V \int_s x \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + H \left[ \int_s y^2 \cdot \frac{ds}{I} + \int_s \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds \right] + \int_s \frac{V \cdot \sin \alpha + N_i}{A} \cdot \cos \alpha \cdot ds \quad [10']$$

en las cuales se han tenido en cuenta las siguientes simplificaciones e hipótesis: 1) despreciar todos los efectos

del esfuerzo cortante,  $T$ , (últimos sumandos de las ecuaciones [9] y [10]) los cuales solo tienen importancia en los arcos gruesos muy rebajados; 2) prescindir en el cálculo de del efecto de la compresión,  $N$ , (segundo sumando de la ecuación [9]) el cual solo se tendrá en cuenta en los arcos muy peraltados; 3) sustituir en la segunda integral de [10]  $dx$  por  $ds \cdot \cos \alpha$ .

Es decir, que mientras las ecuaciones [8], [9] y [10] son generales, las últimas solo valen para los casos prácticos de arcos no gruesos y poco peraltados.

La aplicación de estas últimas ecuaciones a cada caso particular consistirá en dar a las tres deformaciones totales que aparecen en los primeros miembros los valores que impongan las condiciones de sustentación, como ya dijimos más atrás; en particular, tendremos:

- 1) Arcos empotrados en sus dos extremos,  $\Theta = \Delta = \delta = 0$ .
- 2) Arcos doblemente articulados,  $\Theta \neq 0$  y, además, también  $\mu = \Delta = \delta = 0$ .
- 3) Estudio del efecto de un asiento vertical dado,  $\Delta, \Delta \neq 0$ , y  $\Theta = \delta = 0$ .
- 4) Efecto de una variación térmica conocida,  $\delta = \alpha \cdot L \cdot t$ , sin acciones exteriores y  $\Theta = \Delta = 0$ .

Esto último se consigue mediante el artificio de dejar al arco que se desplace libremente, conservando el paralelismo de las secciones, para imponer luego un sistema de fuerzas que lo haga retornar a la posición inicial.

1.6.- Ecuaciones referidas a los ejes elásticos.- Fijándonos en las ecuaciones [8'], [9'] y en la última equivalente de la [10'], que se analizará en la pág. sig., se observa que hay una serie de integrales que son independientes de las cargas, solo función de la ecuación de la directriz del arco, y que se pueden, por tanto, calcular para una directriz dada, invariables para distintos tipos de sollicitaciones exteriores.

Pero hay más, fijándonos en la forma matemática de esas integrales, en las que intervienen momentos estáticos y de segundo orden del conjunto  $(ds/I)$ ; si definimos tal expresión  $(ds/I)$  como "un peso diferencial,  $ds$ , relacionado con su capacidad elástica,  $I$ , peso elástico", las referidas fórmulas pueden simplificarse si tomamos como ejes coordenados los ejes principales de elasticidad de la estructura, definiendo como tales coordenadas de los "pesos elásticos":

$$X_o = \frac{\int_s x \cdot \frac{ds}{I}}{\int_s \frac{ds}{I}} \qquad Y_o = \frac{\int_s y \cdot \frac{ds}{I}}{\int_s \frac{ds}{I}}$$

El concepto de peso elástico es similar, según se ve, al c.d.g. de un cuerpo, pero en lugar de relacionar "pesos gravitatorios", relaciona longitudes de un arco y momentos de inercia.

Antes de trasladar a los nuevos ejes, hagamos una nueva simplificación: para arcos rebajados la compresión,  $N$ , puede admitirse como solo función de  $H$ , puesto que no suelen trabajar a esfuerzos horizontales,  $F_h$ , y las componentes de las  $V$  y  $F_v$  suelen ser pequeñas. Con esta hipótesis, y aún

igualando la proyección horizontal de la compresión al empuje, es decir,  $H = N \cdot \cos \alpha = N \cdot (dx/ds)$ , la expresión [10'] queda modificada convenientemente, resultando

$$E \cdot \delta = \int_S Mi \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + \mu \int_S y \cdot \frac{ds}{I} + v \int_S x \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + H \left[ \int_S y^2 \frac{ds}{I} + \int_S \frac{ds}{A} \right]$$

Y aun en la mayoría de las aplicaciones prácticas se desprecia también el segundo sumando del corchete.

Ahora ya, y puesto que los nuevos ejes son principales de inercia, se anulan los momentos estáticos de primer orden y centrífugos, quedando finalmente.

$$\int_S x \cdot \frac{ds}{I} = 0 \quad ; \quad \int_S y \cdot \frac{ds}{I} = 0 \quad ; \quad \int_S x \cdot y \cdot \frac{ds}{I} = 0$$

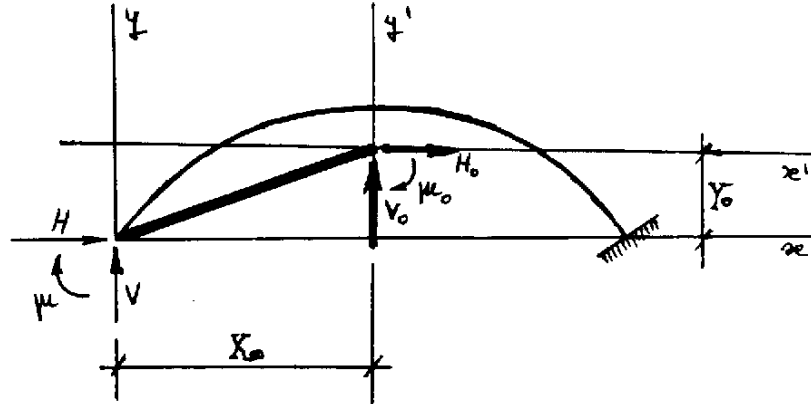
$$E \cdot \theta_0 = \int_S Mi \cdot \frac{ds}{I} + \mu_0 \int_S \frac{ds}{I} \quad [8'']$$

$$E \cdot \Delta_0 = \int_S Mi \cdot x \cdot \frac{ds}{I} + v \int_S x^2 \cdot \frac{ds}{I} \quad [9'']$$

$$E \cdot \delta_0 = \int_S Mi \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + H \left[ \int_S y^2 \cdot \frac{ds}{I} + \int_S \frac{ds}{A} \right] \quad [10'']$$

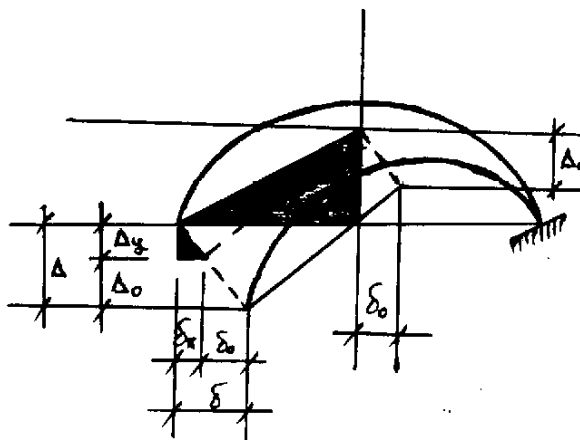
El centro elástico forma, pues, parte de la estructura, tiene existencia tan real como el c.d.g. de un cuerpo físico; y se ha de trasladar a él la sustentación izquierda del arco. Por consiguiente, y para no alterar la continuidad física, es preciso imaginar una barra de rigidez infinita, tal y como se ve en la figura de la página siguiente, que enlace el nuevo origen de coordenadas con la extremidad libertada del arco; tal barra, al no deformarse ni alterar las condiciones físicas

del arco, tendrá en su extremo unas reacciones virtuales ligadas por las relaciones:



$$H = H_0 \quad ; \quad V = V_0 \quad ; \quad \mu = \mu_0 + V \cdot X_0 + H \cdot Y_0 \quad [11]$$

Tampoco los desplazamientos virtuales, que hemos escrito atrás,  $\Theta_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\Delta_0$ , del centro elástico serán los mismos del extremo liberado; su relación la hallamos en la figura siguiente, en donde se han señalado todas las deformaciones; evidentemente, como la barra no se deforma,  $\Theta_0 = \Theta$ ; además, de la semejanza de los triángulos sombreados sacamos:



$$\frac{x_0}{\Delta y} = \frac{y_0}{\delta x} = \frac{1}{\Theta}$$

$$\Delta y = X_0 \cdot \Theta \quad ; \quad \delta x = Y_0 \cdot \delta$$

$$\Theta_0 = \Theta \quad [12]$$

$$\Delta_0 = \Delta + X_0 \cdot \Theta \quad [13]$$

$$\delta_0 = \delta + Y_0 \cdot \Theta \quad [14]$$

Las ecuaciones de la estática, [5], [6] y [7], (pág. 9) las anteriores [8''], [9''] y [10''], (pág. 16) y las últimas [11], [12], [13] y [14] resuelven el problema por completo; aunque no cabe duda de que en ciertos problemas se pueden

emplear las no trasladadas al centro elástico, es decir, las [8'], [9'] y [10'] (pág. 13) (o mejor, la simplificada equivalente a la [10']), junto con las otras anteriores; y eso dependerá del tipo de problema.

Inmediatamente vemos de [8''], [9''] y [10''] y de las [12], [13] y [14] que si la reacción en el centro elástico queda reducida a una fuerza vertical,  $V$ , (con  $\mu_0 = 0$  y  $H = 0$ ), la deformación de las sustentaciones consiste en un desplazamiento relativo vertical ( $\Theta_0 = \Theta = 0$ ;  $\delta_0 = 0$ ; luego  $\delta = 0$ ).

Del mismo modo, si la reacción en el centro elástico se compone únicamente de fuerza horizontal ( $\mu_0 = 0$ ,  $V = 0$ ), la deformación relativa de los apoyos es un desplazamiento horizontal ( $\Theta_0 = \Theta = 0$ ;  $\delta_0 = 0$ ; luego  $\Delta_0 = 0$ ); de aquí se deduce que, para conseguir en una viga curva empotrada una traslación sin giro de las extremidades, hay que aplicar dos fuerzas iguales y contrarias a la altura del centro elástico.

1.7.-

#### Cálculo de los coeficientes de rigidez y transmisión en arcos

.- Para determinar estas características elásticas hagamos, como

en el caso de una viga, apoyado/empotrado al arco; y sometamos el extremo libre a un momento,  $m$ ,

tal que dé una deformación angular unidad,  $\Theta = 1$ ;  $m = k \cdot \Theta = k$ .

Por ser extremo libre,  $\mu = 0$  y de

[11] sacamos:





$$(\Delta = \delta = 0) ; \quad \mu_0 = -V \cdot X_0 - H \cdot Y_0 \quad ; \quad \Delta_0 = X_0 \quad ; \quad \delta_0 = Y_0$$

Por otra parte, el par  $m = k$  da una distribución isostática constante,  $M_i = \text{const.} = m$ , pudiendo salir fuera de las integrales [8''], [9''] y [10''], lo que conduce a la anulación de los momentos isostáticos de primer orden resultantes,

$$\int x \cdot \frac{ds}{I} , \quad \int y \cdot \frac{ds}{I} \quad ; \quad \text{por tanto:}$$

$$E = (k + \mu_0) \cdot \int \frac{ds}{I} \quad [15]$$

$$E \cdot X_0 = V \int x^2 \frac{ds}{I} \quad [16] ; \quad V \cdot X_0 = \frac{E \cdot X_0^2}{\int x^2 \frac{ds}{I}}$$

$$E \cdot Y_0 = H \left[ \int y^2 \frac{ds}{I} + \int \frac{ds}{A} \right] \quad [17] ; \quad H \cdot Y_0 = \frac{E \cdot Y_0^2}{\int y^2 \frac{ds}{I} + \int \frac{ds}{A}}$$

$$k = \frac{E}{\int \frac{ds}{I}} - \mu_0 = E \cdot \left[ \frac{1}{\int \frac{ds}{I}} + \frac{X_0^2}{\int x^2 \frac{ds}{I}} + \frac{Y_0^2}{\int y^2 \frac{ds}{I} + \int \frac{ds}{A}} \right]$$

Si en la ecuación [17] se desprecia el término  $H \int (ds/A)$ , queda aproximadamente:

$$k = E \cdot \left[ \frac{1}{\int \frac{ds}{I}} + \frac{X_0^2}{\int x^2 \frac{ds}{I}} + \frac{Y_0^2}{\int y^2 \frac{ds}{I}} \right] \quad [18]$$

Para deducir  $\beta$  calculamos  $\mu'$ , momento contrario, de la ecuación [7], pág. 9, tercera de las de la estática:

$$\mu' = -k + 2 \cdot X_0 \cdot V = -k + 2 \cdot \frac{E \cdot X_0^2}{\int x^2 (ds/I)} = \beta \cdot k$$

$$\beta = - \frac{k - \frac{2 \cdot E \cdot X_0^2}{\int x^2 (ds/I)}}{k} \quad [19]$$

Nótese que los coeficientes de transmisión en los arcos resultan negativos; es decir, que los pares inducidos tienen sentidos contrarios a los pares aplicados.

1.8.-

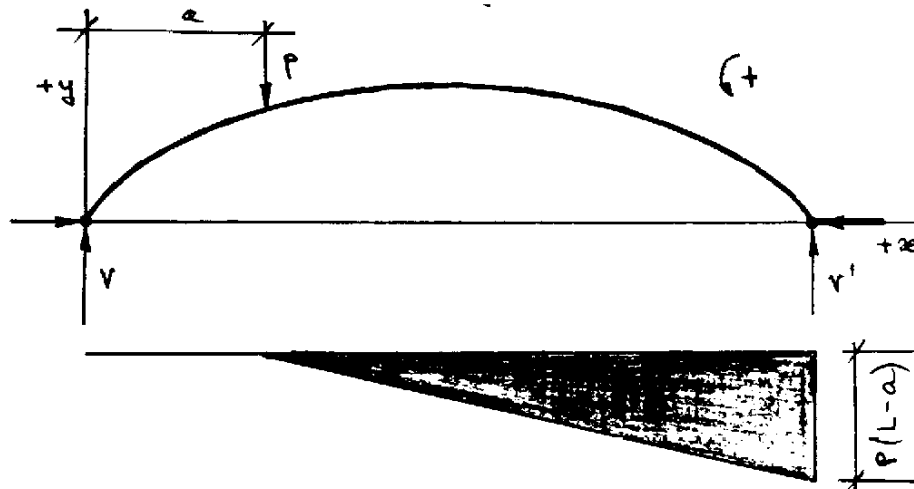
Arcos biarticulados simétricos.— Partiremos de las fórmulas [8'], [9'] y [10'], página 13, sin trasladar a los ejes elásticos; la primera no la podemos emplear, al ser  $\Theta = 0$ ; los primeros miembros de [9'] y [10'] son nulos, por haber articulación; además,  $\mu = 0$ , por la misma causa; de las ecuaciones [5] y [7] de la estática, página 9, deducimos que  $V$  y  $V'$  pueden calcularse por las referidas ecuaciones de la estática y, además, tienen el mismo valor que en una viga doblemente apoyada.

Notando que  $(v \cdot \text{sena} + N_i)$  representa la compresión en el arco cuando el extremo derecho desliza y  $H = 0$ , que denominaremos  $N'$ , y que realmente es de signo contrario, queda en [10']:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\int_S Mi \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + V \cdot \int_S x \cdot y \cdot \frac{ds}{I} - \int_S \frac{N'}{A} \cos \alpha \cdot ds}{\int_S y^2 \cdot \frac{ds}{I} + \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds} = \\
 &= \frac{\int_S Mi \cdot y \cdot \frac{ds}{I} + V \cdot \int_S x \cdot y \cdot \frac{ds}{I}}{\int_S y^2 \cdot \frac{ds}{I}} \quad [20]
 \end{aligned}$$

El valor de la tercera integral del numerador, que se ha despreciado, suele ser pequeño en los arcos de dimensiones ordinarias; también suele despreciarse el segundo término del denominador, quedando la aproximación indicada en la fórmula [20], en la cual dos integrales no dependen de las cargas, y sí solamente de la ecuación analítica.

Como aplicación, estudiemos el arco biarticulado parabólico sometido a la carga concentrada P, supuesto (como suele ser habitual en la mayoría de los arcos) proyección vertical constante del momento de inercia,  $I \cdot \cos \alpha = I_0$ ; es decir,  $I \cdot (dx/ds) = I_0$ ; o lo que es lo mismo,  $ds/I = dx/I_0$ ;



La ecuación de la parábola es:  $y = \frac{4 \cdot f}{L^2} (x \cdot L - x^2)$

De las ecuaciones de la estática calculamos  $V$  y  $V'$ :

$$\left. \begin{array}{l} P = V + V' \\ V \cdot L = P \cdot (L - a) \end{array} \right\} \quad V = \frac{P \cdot (L - a)}{L} \quad ; \quad V' = \frac{P \cdot a}{L}$$

La ley de variación de los momentos a lo largo de las distintas secciones, para considerarlo en las integrales correspondientes, vale:

$$M_i = P \cdot (x - a) \quad \left. \begin{array}{l} x = L \\ x = a \end{array} \right\}$$

$$\int_a^L M_i \cdot y \cdot dx = \int_a^L \frac{4 \cdot f}{L^2} P \cdot (x - a) (x \cdot L - x^2) \cdot dx =$$

$$= \frac{P \cdot f}{3 \cdot L^2} (L^4 - 2 \cdot a \cdot L^3 + 2 \cdot a^3 \cdot L - a^4)$$

$$V \int_0^L x \cdot y \cdot dx = \frac{P(L - a)}{L} \int_0^L \frac{4 \cdot f}{L^2} (x^2 \cdot L - x^3) \cdot dx = \frac{P \cdot f \cdot L(L - a)}{3}$$

(este último momento contrario al anterior)

$$\int_0^L y^2 \cdot dx = \frac{16 \cdot f^2}{L} \int_0^L (x \cdot L - x^2)^2 \cdot dx = \frac{8 \cdot f^2 \cdot L}{15} \quad , \text{ y sustituyen-}$$

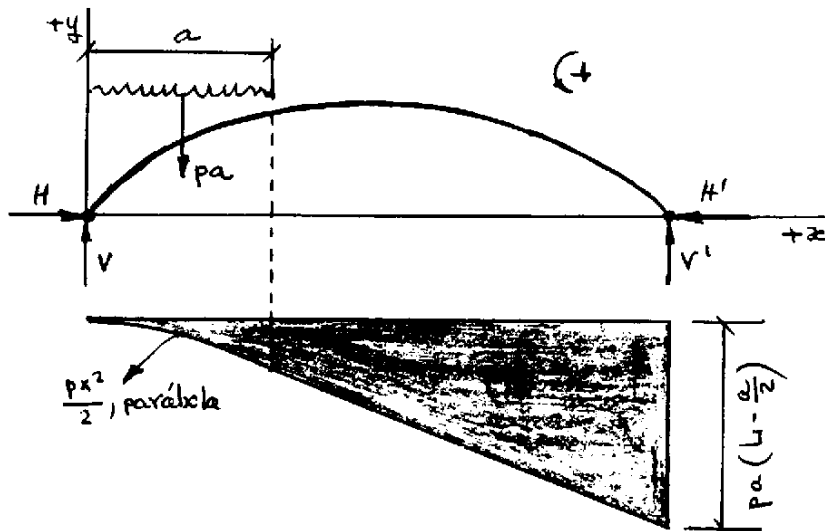
do en [20], con  $a/L = \Gamma$ , queda

$$\vec{H} = \frac{5 \cdot P \cdot L}{8 \cdot f} \cdot \Gamma \cdot (1 - 2 \cdot \Gamma^2 + \Gamma^3) \quad [21]$$

Para calcular el efecto debido a un incremento de temperatura, si en la fórmula [10'] simplificada, pág. 16, y aun sin el término  $ds/A$  y con  $\delta = \alpha \cdot \Delta t \cdot L$ ,  $M_i = V = \mu = 0$ , resulta:

$$Ht = \frac{E \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot L}{\int_0^L \frac{ds}{y^2 I}} = \frac{E \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot L}{\frac{8 \cdot f^2 \cdot L}{15 \cdot I_0}} = \frac{15 \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot I_0}{8 \cdot f^2} \quad [22]$$

Análogamente, para un arco biarticulado y sometido a una carga uniformemente repartida en una longitud  $a$ , carga total  $p \cdot a$ , tenemos:



$$V = \frac{p \cdot a}{L} \left[ L - \frac{a}{2} \right] \quad M_i = \frac{p \cdot x^2}{2} \Big|_0^a + p \cdot a \cdot \left[ x - \frac{a}{2} \right] \Big|_a^L$$

$$V \int_0^L x \cdot y \cdot dx = \frac{p \cdot a}{L} \left[ L - \frac{a}{2} \right] \int_0^L \frac{4 \cdot f}{L^2} (x^2 \cdot L - x^3) \cdot dx = \frac{p \cdot a \cdot f \cdot L \cdot (2 \cdot L - a)}{6}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L M_i \cdot y \cdot dx &= \int_0^a \frac{p \cdot x^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{L^2} (x \cdot L - x^2) dx + \int_a^L p \cdot a \cdot \left[ x - \frac{a}{2} \right] \cdot \frac{4 \cdot f}{L^2} (x \cdot L - x^2) dx = \\ &= \frac{p \cdot f}{L^2} \left[ \frac{L \cdot a^4}{6} + \frac{a \cdot L^4}{3} - \frac{a^5}{15} - \frac{a^2 \cdot L^3}{3} \right] ; \end{aligned}$$

la tercera integral es la misma y, sustituyendo otra vez en [20], con la misma transformación  $a/L = \Gamma$  y los mismos signos

anteriores, salen las fórmulas:

$$\vec{H} = \frac{5 \cdot p \cdot L^2}{16 \cdot f} \cdot \Gamma^2 \cdot (1 - \Gamma^2 + 2/5 \cdot \Gamma^3) \quad [23]$$

para  $a = L/2$ ,  $\Gamma = 1/2$ , quedando:

$$\vec{H} = \frac{p \cdot L^2}{16 \cdot f}, \quad V = \frac{3}{8} p \cdot L, \quad V' = \frac{1}{8} p \cdot L \quad [24]$$

para  $a = 1$ ,  $\Gamma = 1$ , quedando en este caso:

$$\vec{H} = \frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f}, \quad V = V' = \frac{p \cdot L}{2} \quad [25]$$

1.9.-

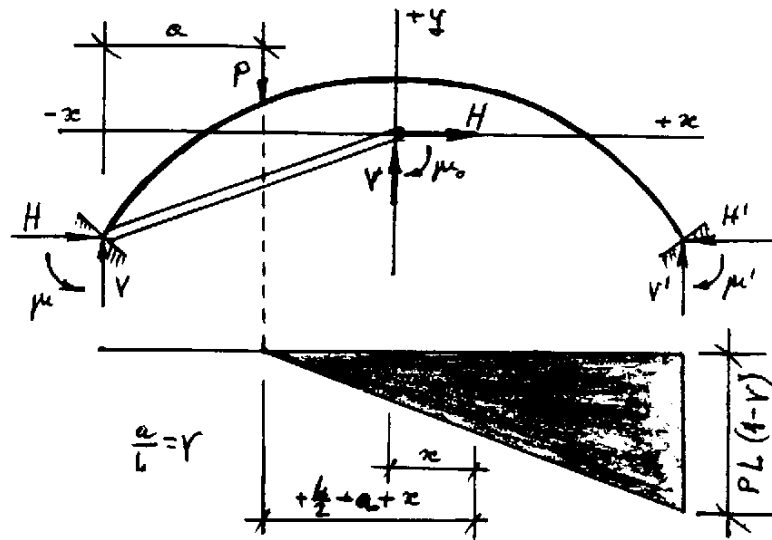
Arcos simétricos empotrados.- Indudablemente, para estos arcos es conveniente utilizar las fórmulas referidas al centro elástico, más simplificadas. Vamos a estudiar los dos mismos ejemplos del caso biarticulado y suponiendo  $ds/I = dx/I_0$ .

Arco sometido a carga concentrada, P: de la ecuación de la parábola

$$y = \frac{4 \cdot F}{L^2} \cdot (x \cdot L - x^2)$$

lo primero que hemos de calcular es el centro elástico:

$$X_0 = \frac{\int_L^L x \cdot (ds/I)}{\int_L^L (ds/I)} = \frac{\int_L^L x \cdot (dx/I_0)}{\int_L^L (dx/I_0)} = \frac{\int_0^L x \cdot dx}{\int_0^L dx} = \frac{x^2/2}{x} \Big|_0^L = \frac{L}{2} = X_0$$



$$Y_o = \frac{\int_0^L y \cdot (ds/I)}{\int_0^L (ds/I)} = \frac{\int_0^L y \cdot dx}{\int_0^L dx} = \frac{4 \cdot f}{L^3} \int_0^L (x \cdot L - x^2) \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot f = Y_o$$

trasladando a los ejes por  $X_o, Y_o$ , queda  $y = \frac{f}{3 \cdot L^2} (L^2 - 12 \cdot x^2)$

De las ecuaciones [12], [13] y [14] de la pág. 17, al ser  $\Theta = \Delta z = 0$ , deducimos  $\Theta_o = \Delta_o = \delta_o = 0$ ; ahora emplearemos las ecuaciones [8''], [9''] y [10''] de la pág. 16 y la [11] de la pág. 17; de [10''] escribimos:

$$0 = \int_s^L M_i \cdot y \cdot dx + H \int_s^L y^2 \cdot dx$$

$$\int_0^L y^2 \cdot dx = 2 \int_0^{L/2} \frac{f^2}{9 \cdot L^4} (L^2 - 12 \cdot x^2)^2 \cdot dx = \frac{4 \cdot f^2 \cdot L}{45}$$

$$M_i = P \left[ \frac{L}{2} - a + x \right]_{-L/2+a}^{+L/2}$$

$$\int M_i \cdot y \cdot dx = \int_{-L/2+a}^{+L/2} P \left[ \frac{L}{2} - a + x \right] \cdot \frac{f}{3 \cdot L^2} \cdot (L^2 - 12 \cdot x^2) dx =$$

$$= \frac{P \cdot f}{3 \cdot L^2} \cdot \left[ \frac{L^2}{2} (L/2 - a)^2 - \frac{L^4}{16} - (L/2 - a)^4 \right]$$

$$H = - \frac{15 \cdot P}{4 \cdot f \cdot L} \cdot \left[ \frac{L^2}{2} (L/2 - a)^2 - \frac{L^4}{16} - (L/2 - a)^4 \right] =$$

$$H = - \frac{15 \cdot P \cdot L}{4 \cdot f} \cdot \left[ \frac{1}{2} (1/2 - \Gamma)^2 - \frac{1}{16} - (1/2 - \Gamma)^4 \right] =$$

$$= \frac{15 \cdot P \cdot L}{4 \cdot f} \cdot \Gamma^2 \cdot (1 - \Gamma)^2 = H \quad [26]$$

Para calcular  $V$  empleamos la [9'']:

$$0 = \int Mi \cdot x \cdot dx - V \int x^2 \cdot dx \quad ; \quad 2 \int_0^{L/2} x^2 \cdot dx = \frac{L^3}{12}$$

$$\int_{-L/2+a}^{L/2} P(L/2 - a + x) \cdot x \cdot dx = P \cdot \left[ (L/2 - a) \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2+a}^{L/2} =$$

$$= P \left[ \frac{L^3}{12} - \frac{L \cdot a^2}{4} + \frac{a^3}{6} \right]$$

$$V = P \cdot (1 - 3 \cdot \Gamma^2 + 2 \cdot \Gamma^3) = P \cdot (1 + 2 \cdot \Gamma) \cdot (1 - \Gamma)^2 \quad [27]$$

Finalmente, de [8''] deducimos el momento:

$$0 = \int Mi \cdot dx + \mu_0 \int dx \quad ; \quad \int dx = L \quad ; \quad \int Mi \cdot dx = \text{área del triángulo} =$$

$$= (1/2) \cdot (L - a) \cdot P \cdot L \cdot (1 - \Gamma) = \frac{P \cdot L^2 \cdot (1 - \Gamma)^2}{2}$$

$$\mu_0 = - \frac{P \cdot L \cdot (1 - \Gamma)^2}{2}$$

y, finalmente, de [11]:

$$\mu = \frac{PL(1 - \Gamma)^2}{2} + \frac{15PL}{4f} \Gamma^2(1 - \Gamma)^2 - \frac{2f}{3} P(1 + 2\Gamma)(1 - \Gamma)^2 - \frac{L}{2}$$

$$= \frac{P \cdot L}{2} \cdot \Gamma \cdot (1 - \Gamma)^2 \cdot (2 - 5 \cdot \Gamma) = \mu \quad [28]$$

$$\overleftarrow{H'} = \overrightarrow{H}$$

$$; \quad V' = P - V = P \cdot \Gamma^2 \cdot (3 - 2 \cdot \Gamma) \quad ;$$

$$\mu' = \mu - V \cdot L + P \cdot (L - a)$$

Para un incremento de temperatura, de [9''], con  $Mi = 0$ , y con

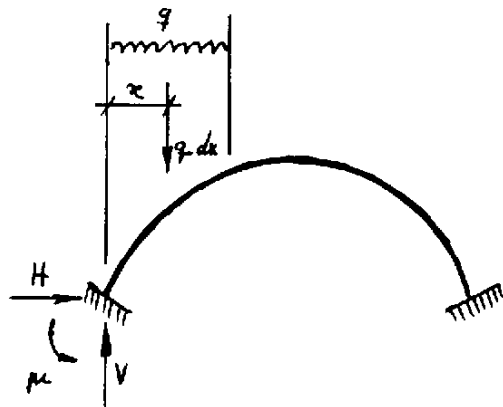
$$\delta_0 = \delta = \alpha \cdot \Delta t \cdot L, \quad \text{quedará;}$$

$$E \cdot I_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot L = N \int y^2 \cdot dx = H \frac{4 \cdot f^2 \cdot L}{45} \quad ; \quad H = \frac{45}{4} \cdot \frac{E \cdot I_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{f^2} \quad [29]$$



$$\mu = H \cdot Y_0 = \frac{45}{4} \cdot \frac{E \cdot I_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{f^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot f = \frac{15 \cdot E \cdot I_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{2 \cdot f} = \mu' \quad [30]$$

Para resolver un arco sometido a carga uniformemente repartida, dado lo complicado del cálculo, lo mejor es recurrir al método de superposición:



$$p = q \cdot dx \quad ; \quad \Gamma = x/L \quad ; \\ dx = L \cdot d\Gamma \quad ; \quad p = q \cdot L \cdot d\Gamma \quad ;$$

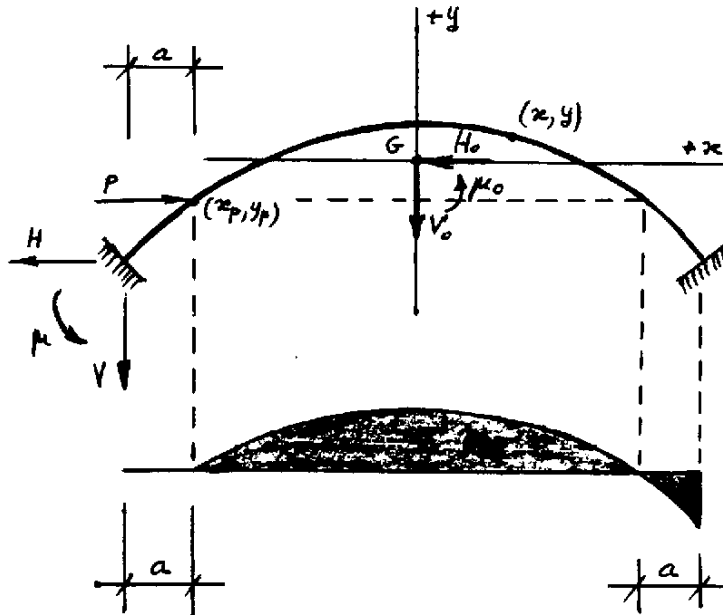
$$H = \int_0^{\Gamma} \frac{15 \cdot q \cdot L^2}{4 \cdot f} \cdot \Gamma^2 (1 - \Gamma)^2 \cdot d\Gamma = \\ = \frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f} \cdot \Gamma^3 (6\Gamma^2 - 15\Gamma + 10) \quad [31]$$

$$V = \int_0^{\Gamma} (1 + 2 \cdot \Gamma) (1 - \Gamma)^2 \cdot q \cdot L \cdot d\Gamma = \\ = \frac{q \cdot L}{2} \cdot \Gamma (\Gamma^3 - 2 \cdot \Gamma^2 + 2) \quad [32]$$

$$\mu = \int_0^{\Gamma} \frac{L}{2} \cdot \Gamma \cdot (1 - \Gamma)^2 \cdot (2 - 5 \cdot \Gamma) \cdot q \cdot L \cdot d\Gamma = \frac{q \cdot L^2}{2} \cdot \Gamma^2 \cdot (1 - \Gamma)^3 \quad [33]$$

Obsérvese que el "rebajamiento" de un arco,  $L/f$ , para una luz determinada, influye en las fórmulas [26] y [31], siendo mayor el empuje cuanto mayor es aquél; en cambio, no influye en las reacciones verticales (fórmulas [27] y [32]), ni en los momentos (fórmulas [28] y [33]). Son normales rebajamientos entre  $1/5$  y  $1/7$  y no mayores de  $1/10$ ; el rebajamiento no puede aumentarse excesivamente, no solo por el excesivo aumento de los empujes citados, sino porque se llegaría a un fenómeno de flexión excesiva. Por el contrario, al disminuir el rebajamiento más allá de  $1/4$ , el empuje va disminuyendo más que aquél y pierde interés el peraltado frente a otros inconvenientes (pandeo lateral, acción del viento, etc.).

Vamos a considerar también el arco sometido a una acción horizontal: empleamos las mismas ecuaciones, referidas al centro elástico, con  $\Theta = \Delta = \delta = \delta_0 = \Delta_0 = \Theta_0 = 0$  y el valor de las integrales fijas ya antes halladas; sean  $P$  la carga actuante y  $(x_p, y_p)$  las coordenadas del punto de actuación; las integrales específicas valen en este caso:



$$M_i = P \cdot (y - y_p) \quad ; \quad y_p = \frac{f}{3 \cdot L^2} \cdot [L^2 - 12 \cdot (-L/2 + a)^2] =$$

$$= f \cdot (4 \cdot \Gamma - 4 \cdot \Gamma^2 - 2/3)$$

$$M_i = P \cdot f \cdot \left[ \frac{4 \cdot x^2}{L^2} + (4 \cdot \Gamma - 4 \cdot \Gamma^2 - 1) \right]_{-L/2+a}^{+L/2}$$

$$\int M_i \cdot y \cdot dx = - \frac{P \cdot f^2}{3 \cdot L^2} \int_{-L/2+a}^{+L/2} \left[ \frac{4 \cdot x^2}{L^2} + (4 \cdot \Gamma - 4 \cdot \Gamma^2 - 1) \right] (L^2 - 12 \cdot x^2) \cdot dx =$$

$$= \frac{P \cdot f^2 \cdot L}{45} \cdot (96 \cdot \Gamma^5 - 240 \cdot \Gamma^4 + 200 \cdot \Gamma^3 - 60 \cdot \Gamma^2 + 4)$$

$$\text{y de [10''] sacamos: } H = P \cdot (24 \cdot \Gamma^5 - 60 \cdot \Gamma^4 + 50 \cdot \Gamma^3 - 15 \cdot \Gamma^2 + 1) =$$

$$= P \cdot (1 - \Gamma)^2 \cdot (24 \cdot \Gamma^3 - 12 \cdot \Gamma^2 + 2 \cdot \Gamma + 1) \quad [34]$$

$$\int Mi \cdot x \cdot dx = -P \cdot f \int_{-L/2+x}^{+L/2} \left[ \frac{4 \cdot x^3}{L^2} + (4 \cdot \Gamma - 4 \cdot \Gamma^2 - 1) \cdot x \right] \cdot dx =$$

$$= P \cdot f \cdot L^2 \cdot \Gamma^2 \cdot (2 \cdot \Gamma - \Gamma^2 - 1) \quad ; \quad \downarrow V = \frac{12 \cdot P \cdot f}{L} \cdot \Gamma^2 \cdot (1 + \Gamma^2 - 2 \cdot \Gamma)$$

[35]

$$\int Mi \cdot dx = \int_{-L/2+x}^{+L/2} -P \cdot f \cdot \left[ \frac{4 \cdot x^2}{L^2} + (4 \cdot \Gamma - 4 \cdot \Gamma^2 - 1) \right] \cdot dx =$$

$$= -\frac{2 \cdot P \cdot f \cdot L}{3} \cdot (4 \cdot \Gamma^3 - 9 \cdot \Gamma^2 + 6 \cdot \Gamma - 1)$$

$$\mu_0 = \frac{2 \cdot P \cdot f}{3} \cdot (4 \cdot \Gamma^3 - 9 \cdot \Gamma^2 + 6 \cdot \Gamma - 1) =$$

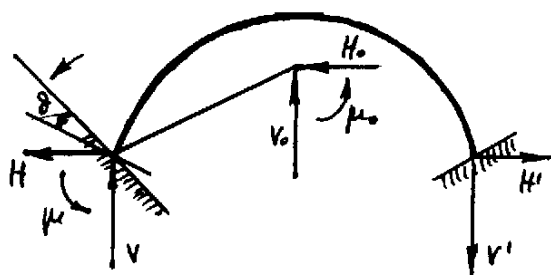
$$= \frac{2 \cdot P \cdot f}{3} \cdot (1 - \Gamma)^2 \cdot (4 \cdot \Gamma - 1) \quad ; \quad \text{de donde:}$$

$$\mu = \mu_0 + H \cdot \frac{2}{3} \cdot f - V \cdot \frac{L}{2} = 2 \cdot P \cdot f \cdot \Gamma \cdot (1 - \Gamma)^2 \cdot (8 \cdot \Gamma^2 - 7 \cdot \Gamma + 2)$$

[36]

Pasemos ahora a estudiar el:

comportamiento del arco frente a un giro en un extremo, o frente a un corrimiento horizontal, o frente a un corrimiento vertical del mismo extremo; comencemos por el giro:



$$\theta_0 = \theta \quad ; \quad \Delta = \delta = 0 \quad ;$$

$$\delta_0 = \gamma_0 \cdot \theta \quad ; \quad \Delta_0 = x_0 \cdot \theta, \mu_i = 0$$

de [8'']  $\implies E \cdot \theta \cdot I_0 =$

$$= \mu_0 \int_{-L/2}^{+L/2} dx = \mu_0 \cdot L \quad ;$$

$$\mu_0 = \frac{E \cdot \theta \cdot I_0}{L}$$

de [9'']  $\implies E \cdot X_0 \cdot \theta \cdot I_0 =$

$$= V \cdot 2 \int_0^{L/2} x^2 \cdot dx = V \cdot \frac{L^3}{12}$$

$$\uparrow V = \frac{6 \cdot E \cdot I_0 \cdot \theta}{L^2} \quad ; \quad V' = -V$$

[37]

de [10'']  $\implies E \cdot \gamma_0 \cdot \theta \cdot I_0 = H \cdot 2 \int_0^{L/2} y^2 \cdot dx = H \cdot \frac{4 \cdot f^2 \cdot L}{45} \quad ; \quad H' = -H$

[38]

$$\begin{aligned} \overline{\mu} = \mu_0 + H \cdot Y_0 + V \cdot X_0 &= \frac{E \cdot \Theta \cdot I_0}{L} + \frac{15 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Theta}{2 \cdot f \cdot L} \cdot \frac{2 \cdot f}{3} + \\ &+ \frac{6 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Theta}{L^2} \cdot \frac{L}{2} = \mu = \frac{9 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Theta}{L} \quad [39] \end{aligned}$$

También podemos sacar de las ecuaciones [18] y [19], págs. 19 y 20, los valores de la rigidez y el factor de transmisión:

$$k = \frac{9 \cdot E \cdot I_0}{L} \quad \beta = -\frac{1}{3}$$

el primero de los valores nos confirma el valor hallado para  $\mu$ ; y el segundo nos da:

$$\mu' = -\frac{\overline{\mu}}{3} = \frac{3 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Theta}{L}$$

Para el caso de un desplazamiento,  $\delta$ , sacamos:

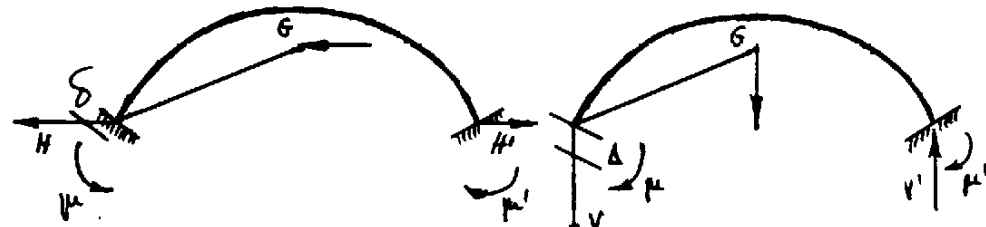
$$\Theta = \Delta = 0, \quad \delta = \delta = \delta_0, \quad \Theta_0 = \Delta_0 = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad V = 0$$

$$E \cdot \delta \cdot I_0 = H \cdot 2 \int_0^{L/2} y^2 \cdot dx = H \cdot \frac{4 \cdot f^2 \cdot L}{45}; \quad \overline{H} = \frac{45 \cdot E \cdot I_0 \cdot \delta}{4 \cdot f^2 \cdot L} \quad [40]$$

$$\overline{\mu} = H \cdot Y_0 = \frac{15 \cdot E \cdot I_0 \cdot \delta}{2 \cdot f \cdot L} = -\mu' \quad [41]$$

Finalmente, para el asiento,  $\Delta$ ,  $\Theta = \delta = 0$ ;  $\Theta_0 = \delta_0 = 0$

$$\Delta = \Delta_0; \quad \mu_0 = 0; \quad H = 0$$

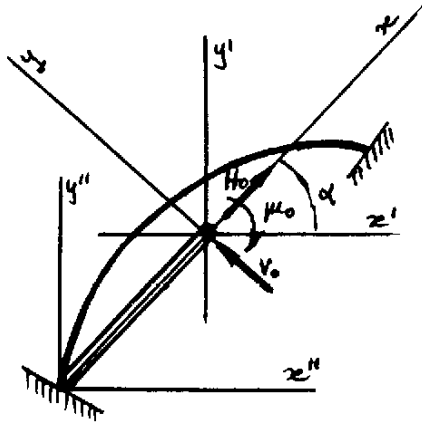


$$E \cdot \Delta \cdot I_0 = V \cdot 2 \int_0^{L/2} x^2 \cdot dx = V \cdot \frac{L^3}{12}; \quad \downarrow V = \frac{12 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Delta}{L^3} = -V'$$

$$\overline{\mu} = V \cdot X_0 = \frac{6 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Delta}{L^2}; \quad \mu' = \overline{\mu} - V \cdot L =$$

$$= \frac{6 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Delta}{L^2} - \frac{12 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Delta}{L^2} = \frac{6 \cdot E \cdot I_0 \cdot \Delta}{L^2} = \mu'$$

1.10.- Arcos asimétricos.- Las fórmulas deducidas [8''], [9''] y [10''] de la página 16 son completamente generales y valen para arcos asimétricos; pero es preciso no olvidar que las deformaciones y reacciones son consideradas en dirección a los ejes principales de elasticidad. Por tanto, hay que operar de la forma siguiente:



1º) dada  $y'' = f(x'')$ , calcular las coordenadas del centro elástico y trasladar a la nueva ecuación  $y' = f(x')$ .

2º) calcular los ejes principales de elasticidad por la conocida fórmula:

$$\left[ \begin{array}{c} 2 \cdot I_{xy} \\ \text{tg} 2\alpha = \frac{\quad}{I_y - I_x} \end{array} \right] \quad \text{tg} 2\alpha = \frac{2 \int x' \cdot y' \cdot (ds/I)}{\int x'^2 \cdot (ds/I) - \int y'^2 \cdot (ds/I)}$$

3º) las fórmulas citadas dan, como hemos indicado,  $\theta_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\nu_0$  y  $H_0$  en las direcciones de los ejes principales.