**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**
**MEMORIA FINAL**

**COMPLETA X**
**RESUMEN ☐**

# TÍTULO DEL PROYECTO:

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. CONTRIBUCIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LAS TIC


**Coordinador/a**:

*Nombre y Apellidos, Centro de destino, Localidad (Provincia)*

Inmaculada Jiménez Cabello, C.E.I.P. *Quinto Centenario*, Huelva (Huelva)



**Referencia del proyecto: PIV-036 / 08**

**Proyecto subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía**
**(Orden del 20 de junio de 2007; Resolución de 2008)**

**ÍNDICE**

1. Justificación ……. 4

2. Bases del estudio …….. 5

2.1. *Nuestra perspectiva del aprendizaje de la matemática en la escuela* 5

2.2. *El conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la matemática* 8

2.3. *El diseño didáctico como vía de indagación* 10

2.4. *El tema matemático elegido: la orientación espacial* 10

3. Objetivos e hipótesis …… 12

4. Metodología …… 12

4.1. *Instrumentos de recogida de información* 12

4.2. *Proceso de recogida y análisis de información. Dinámica de trabajo en el grupo* 12

4.3. *Grado de consecución de las fases establecidas* 13

5. Actividades realizadas ……. 18

6. Resultados y Conclusiones ……. 18

7. Productos …… 21

8. Valoración general del proceso …… 22

***Referencias bibliográficas*** 24

**ANEXOS (documentos adjuntos)**

Anexo 1. Documento 1: Fundamentación sobre los procesos de aprendizaje de la orientación espacial. Objetivos y contenidos de OE en las distintas etapas educativas.

Anexo 2. Casos de enseñanza-aprendizaje sobre Orientación espacial

Anexo 2.1. Caso de Ed. Infantil

Anexo 2.2. Caso de 1º ciclo Ed. Primaria (1º curso)

Anexo 2.3. Caso de 1º ciclo de Ed. Primaria (2º curso)

Anexo 3. Actividades sobre OE para EI, 1º, 2º y 3º ciclo de Ed. Primaria y ESO

Anexo 3.0. Documento sobre competencias

Anexo 3.1. Actividad para EI

Anexo 3.2 Actividad para 1º ciclo de Ed. Primaria

Anexo 3.3 Actividad para 2º ciclo de Ed. Primaria

Anexo 3.4 Actividad para 3º ciclo de Ed. Primaria

Anexo 3.5. Actividad para ESO

Anexo 4. Documento resumen de Ball y Colaboradores sobre la caracterización del Conocimiento Profesional

Anexo 5. Guión para la identificación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje y Trayectoria hipotética de aprendizaje de “proporcionalidad y escala”.

**MEMORIA FINAL**
**COMPLETA X RESUMEN ☐**

## 1. Justificación

En el año 1999, en el que comenzamos nuestro primer proyecto de investigación conjunto (PIC 1999/2001[1]), el principal foco de interés era la resolución de problemas como clave en la enseñanza de la matemática en la escuela. En nuestro trabajo durante estos años hemos ido profundizando en este foco, así como incorporando nuevos elementos en nuestra indagación sobre el aula de matemáticas (fundamentalmente el papel de las TIC en la enseñanza de la matemática y la gestión por parte del profesor de la participación de sus alumnos[2]). El objetivo último es la mejora del aprendizaje de nuestros alumnos, que entendemos pasa por nuestra mejora como profesores. De ahí que lo anteriormente mencionado va dirigido a incrementar nuestra comprensión de la práctica docente, sobre todo de lo que caracteriza una buena práctica (Brophy, 1999).

En los análisis de ejemplos de buena práctica y en las investigaciones realizadas al hilo de nuestro trabajo en los distintos proyectos conjuntos (Carrillo y Climent, 2006; Climent, 2005; Muñoz-Catalán et al., 2006a, 2007), el conocimiento profesional respecto de la enseñanza de la matemática se ha mostrado decisivo en nuestra práctica y desarrollo. Dicho conocimiento sustenta y en algunos casos limita nuestro desarrollo.

Desde esta perspectiva, decidimos acometer el presente proyecto fijándonos en el conocimiento que necesita el profesor para enseñar matemáticas. Para focalizar la cuestión, elegimos un contenido matemático relevante (la orientación espacial) que enlazaba con contenidos geométricos abordados en nuestro trabajo anterior y que nos permitía enfrentar su tratamiento desde la etapa de Educación Infantil hasta la de Secundaria.

Como especificamos en la solicitud del proyecto, concebimos nuestra propuesta de investigación en dos etapas, la primera de las cuales es la que hemos acometido y presentamos en la presente memoria. El trabajo, las actividades y los resultados a los que nos referiremos en los siguientes apartados los entendemos como documentos

[1] *Desarrollo profesional a través de la investigación colaborativa sobre resolución de problemas* (PIV 098/99). Regulada por Orden de la Consejería de Educación y Ciencia de 22 de marzo de 1999 (BOJA nº 48 de 24 de abril).
[2] Ver proyecto de investigación educativa 2007-08: *Desarrollo profesional a través de la investigación colaborativa sobre la resolución de problemas matemáticos. Uso de las tic y gestión de la participación*, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. PIV-056/06.

abiertos, que se irán reelaborando a medida que procedamos en la siguiente etapa de la investigación.

## 2. Bases del estudio

### 2.1. Nuestra perspectiva del aprendizaje de la matemática en la escuela

Los sucesivos Informes PISA y los análisis y reflexiones vertidos por los especialistas (Castro y Molina, 2005; González y Lupiáñez, 2005; IE[3], 2007; INECSE[4], 2004 a,b, 2005; Marín y Guerrero, 2005; OCDE, 2003, 2004, 2005; Pajares, Sanz y Rico, 2004; Recio y Rico, 2005; Rico, 2005) han venido a confirmar carencias en logros de aprendizaje de nuestros alumnos que muchos profesores y educadores en general habían enfrentado o anunciado. Las diferentes leyes educativas (LOGSE, 1990; LOCE, 2002; LOE, 2006) también han tratado de adecuar el currículo a las exigencias de una sociedad moderna, tanto en lo que se refiere a los valores de sus ciudadanos, como a los conocimientos que éstos deben adquirir para acometer los retos que la sociedad les plantea. Por su parte, las pruebas de diagnóstico (Orden de 28 de junio de 2006) han localizado y concretado esas carencias (y virtudes) por centro educativo, llegándose a la conclusión de que nuestros escolares presentan evidentes deficiencias en las competencias lingüísticas y matemáticas: no comprenden bien los mensajes escritos, no redactan correctamente sus ideas, no comprenden los enunciados de los problemas, no saben diseñar estrategias adecuadas para resolver esos problemas.

Esta desalentadora situación es necesario contextualizarla en un momento en que la sociedad es más una sociedad de la información y la comunicación que del conocimiento establecido, en la que el saber hacer se erige como el paradigma del aprendizaje. Y de esto, como no podría ser de otro modo, se está haciendo eco la escuela a través de diversos proyectos educativos que suponen una dotación en infraestructuras que deben aprovecharse al objeto de formar ciudadanos en sintonía con los valores de la sociedad en la que viven y vivirán en un futuro.

Como hemos mencionado, venimos trabajando en diversos proyectos de investigación educativa desde el año 1999, el último de los cuales, aún en curso, se ha centrado en la resolución de problemas como metodología básica, el uso de las TIC en el aula de matemáticas y la gestión por parte del maestro de la participación del alumno en las

[3] Instituto de Evaluación, antiguo INECSE, del Ministerio de Educación y Ciencia
[4] Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, del Ministerio de Educación y Ciencia

tareas matemáticas. Fruto de este trabajo son varios artículos y comunicaciones a congresos (Carrillo, 2001; Carrillo y Climent, 2003; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2007; Carrillo, Climent, Gorgorió, Rojas, y Prat, 2008; Climent y Carrillo, 2002a,b, 2003, 2007a,b; Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2006a,b, 2007) y CDs que han sido consultados y aplicados tanto por investigadores, como por profesores no universitarios, así como en la formación inicial de maestros, incluso fuera de nuestras fronteras.

Asumimos el aprendizaje en entornos TIC como medio para el aprendizaje matemático y como fin en sí mismo, ya que una de las competencias que debe adquirir el ciudadano del siglo XXI es la tecnológica; el individuo de esta época sería un analfabeto funcional si careciera de las competencias necesarias para manejarse en el universo digital. Estas dos perspectivas de las TIC no deben estar reñidas. Denunciamos el exceso de mecanización de gran parte del material diseñado para el trabajo de los alumnos en el aula de matemáticas y creemos que es posible enseñar matemáticas en la escuela, reservando un papel a las nuevas tecnologías, a través de actividades elaboradas desde la perspectiva de resolución de problemas, que supongan retos para los alumnos y potencien su razonamiento, y no meros ejercicios de cálculo o recuerdo de hechos. Estas actividades añaden, al realizarse en entornos TIC, la mayor posibilidad de autonomía del alumno y la mejor adaptación de las mismas a los diferentes ritmos y necesidades de éstos.

La gestión de la participación da cuenta, por un lado, de nuestro interés por enfatizar la concepción de la escuela como contexto de integración e inclusión social, y por otro lado, de nuestro convencimiento del papel del maestro como mediador y orientador de las interacciones que se producen en el aula en el proceso de construcción de conocimiento matemático desde un enfoque constructivista social (Cobb, 1995; Cobb et al., 1996). Hemos constatado cómo diferentes modos de gestionar la participación conduce, no sólo a diferentes modos de construir el conocimiento matemático por parte de los alumnos, sino a diferentes nociones matemáticas y a diferentes actitudes de dichos alumnos.

A lo largo de todos estos años, y así deseamos continuar, la resolución de problemas en matemáticas ha caracterizado el interés del grupo. Por un lado, la resolución de problemas es una estrategia metodológica recomendada en los diseños curriculares y decretos educativos desde la etapa infantil hasta el bachillerato. Asimismo, los diversos enfoques de la consideración de la resolución de problemas dan a ésta una gran

versatilidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los tres enfoques clásicos (Hatfield, 1978) son: resolución de problemas como vía para el aprendizaje de las matemáticas (estrategia metodológica); resolución de problemas como objetivo de la enseñanza de las matemáticas (se enseña matemáticas para resolver problemas, siendo en este caso aquéllas la vía para ésta); y la enseñanza sobre la resolución de problemas, donde se incluye el estudio de fases y estrategias útiles para el abordaje de problemas. Estos tres enfoques no han de entenderse como competidores, sino complementarios, concibiendo la matemática como una rama del saber que ha ido evolucionando a lo largo de la historia a través de la formulación y los intentos de resolución de problemas. De este modo, la resolución de problemas puede considerarse el motor de la construcción de los conocimientos matemáticos, que, a su vez, son la base para enfrentar nuevos problemas, para lo cual es imprescindible conocer los entresijos de la actividad de resolver problemas. Nunokawa (2005) ha añadido a estos enfoques clásicos un cuarto enfoque: resolver problemas para conocer el contexto, es decir, la resolución de problemas puede orientarse también a una mejor y mayor comprensión del contexto en el que la situación problemática se plantea.

Nuestra preocupación por la resolución de problemas se ha visto respaldada por los informes de logros de aprendizaje antes citados. Ahora, más que nunca, la dedicación a profundizar en las características de la resolución de problemas, tanto desde el punto de vista del aprendizaje, como de la enseñanza, está de actualidad y es necesaria. Hemos de entender, asimismo, que no podría ser de otro modo, ya que la resolución de problemas es la actividad matemática más genuina, como se infiere del modo en el que la matemática ha generado todo su bagaje. Pero, si profundizamos en el modo de hacer de los matemáticos a lo largo de la historia, en el modo de aceptación de los saberes generados, coincidiremos en que, unidas a la resolución de problemas, aparecen ineludiblemente la comunicación y la argumentación. Efectivamente, para poder hablar de un determinado conocimiento o resultado matemático, es preciso que éste haya circulado entre los propios matemáticos, al menos entre los especialistas más cercanos al asunto en el que se genera ese nuevo resultado. Por otra parte, la aceptación de esos resultados sigue un proceso de argumentación lógica en la que dichos resultados son derivados de otros anteriores aplicando las leyes de la lógica. Por consiguiente, resolución de problemas, comunicación, razonamiento lógico y argumentación suceden en sintonía en la creación matemática y, pensamos, deben suceder del mismo modo en las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Esta reflexión nos lleva a incluir estos procesos en nuestra manera de mirar el aula de matemáticas, considerando el análisis y

la mejora de competencias en resolución de problemas y razonamiento lógico, competencias lingüísticas y comunicativas, argumentativas, sociales y tecnológicas.

Conviene precisar que el desarrollo de estas competencias es asumible en cualquier etapa educativa, ya que no se refiere exclusivamente al desarrollo de procedimientos formales de prueba, sino también al desarrollo de procedimientos argumentativos que pueden suceder en contextos de prueba o demostración no formal o informal con rasgos formales (Stylianides y Ball, en prensa).

## 2.2. El conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la matemática

Entendemos el conocimiento profesional del profesor como la conjunción de saberes y experiencias que un profesor posee y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente (Estepa, 2000), esto es, su interpretación del fenómeno educativo con los saberes y asunciones personales que en éste intervienen. En consonancia con ello, interpretamos la mejora o desarrollo profesional del profesor como su mejor comprensión de la práctica (Krainer, 1999).

Dicha mejora en la comprensión no va desligada de la mejora en su actuación, puesto que entendemos que actuación en la práctica y su comprensión se potencian mutuamente.

Dentro de los diferentes aspectos que debe conformar el conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la matemática, nos interesan especialmente aquellos más intrínsecamente ligados a la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Nos referimos a las componentes del conocimiento profesional del profesor conocidas como conocimiento didáctico del contenido y conocimiento del contenido (Shulman, 1987; Ball, 1989).

No obstante, aunque reconocemos el valor de la diferenciación hecha en su momento por Lee Shulman con el concepto de conocimiento didáctico del contenido, coincidimos con los últimos trabajos de Deborah Ball en la conveniencia de no diferenciar entre ambos aspectos, ni siquiera como artificio analítico, sino considerar el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball y Bass, 2003, Ball, Hill y Bass, 2005: Hill, Rowan y Ball, 2005). Se trata, como sostienen Llinares y Krainer (2006), de considerar el conocimiento del profesor de una manera más global y situándolo en la propia práctica.

Como en la perspectiva del grupo de Ball, nuestro objetivo es conocer el conocimiento de los profesores a partir de su propia práctica, no a partir del currículo que los profesores han de enseñar o de los estándares de los que son responsables (Ball, 2000; Ball, 2002; Ball y Bass, 2003, Ball, Hill y Bass, 2005). El análisis de esta práctica permite comprender mejor el trabajo que los profesores hacen y el rol que el conocimiento de contenido juega en ella. Para nosotros, al igual que para Ball (2000), nuestra práctica es el punto de partida para nuestro trabajo, el lugar para la génesis de ideas, inquietudes y problemas y donde estas ideas se prueban, refinan y algunas veces se abandonan.

El conocimiento matemático para la enseñaza se define, en íntima conexión con su papel en la práctica, como: "el conocimiento matemático usado para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. Ejemplo de este trabajo de enseñanza incluye explicar términos y conceptos a los estudiantes, interpretar sus afirmaciones y soluciones, juzgar y corregir el tratamiento que los libros de texto realizan sobre determinados tópicos, usar representaciones con exactitud en la clase, proporcionar a los estudiantes ejemplos de conceptos matemáticos, algoritmos y pruebas" (Hill, Rowan y Ball, 2005, p. 373).

Ball, Hill y Bass (2005) afirman que este conocimiento está formado por dos elementos claves: el conocimiento matemático común y el conocimiento matemático especializado. Por conocimiento común se refieren a aquél que cualquier adulto bien formado debería tener, mientras que el conocimiento especializado es el conocimiento específico del trabajo de enseñanza y sólo los profesores necesitan tenerlo.

El conocimiento matemático para la enseñanza pone de relieve la especificidad del conocimiento matemático que debe tener el profesor (frente al conocimiento matemático para otras competencias o profesiones), y ha de responder a las demandas de la práctica de la enseñanza en la escuela (Moreira y David, 2008). Así, el profesor de matemáticas debe ser capaz de descomprimir el conocimiento matemático, para que sus estudiantes puedan reconstruirlo; debe ser capaz de ayudar a sus alumnos a que conecten las ideas matemáticas que están aprendiendo (tanto entre tópicos distintos como a lo largo del tiempo); necesita anticipar cómo cambian y crecen las ideas matemáticas, y pensar en los 'horizontes matemáticos' de los alumnos (Ball y Bass, 2003). Este conocimiento del profesor es totalmente necesario para que el alumno aprenda matemáticas, tal como nosotros lo entendemos.

## 2.3. El diseño didáctico como vía de indagación

Con el objetivo de situarnos en el conocimiento profesional del profesor desde la perspectiva de su trabajo (García Blanco, 1999), nos fijaremos en tres momentos respecto de su acción en el aula: la planificación de su enseñanza, su práctica de lo planificado, y su reflexión. La reflexión sobre su práctica no se considerará sólo tras la acción. Serán también de interés las reflexiones del profesor antes y durante su acción en el aula. Es más, estamos con aquellos autores que relacionan la calidad de dichas reflexiones con la riqueza del conocimiento profesional del profesor.

Además, dicha reflexión será considerada individualmente y en grupo, puesto que no nos interesa tanto determinar cuál es el conocimiento profesional de las distintas profesoras implicadas en el grupo, como extraer características del conocimiento profesional deseable a partir de la práctica.

A medio plazo, nos interesa también indagar sobre la potencialidad del diseño conjunto de material para el aula y el análisis de su puesta en práctica, como vías de enriquecimiento del conocimiento profesional del profesor. En particular, su potencialidad para aprender a problematizar la práctica (Jaworski, 1996, 1998) desde el punto de vista del contenido matemático a enseñar. De este modo, tenemos más garantías de que el desarrollo del profesor sea generativo (Franke et al., 1998).

El entorno de nuestro grupo nos parece especialmente interesante para los planteamientos de este proyecto, puesto que defendemos que es en entornos colaborativos de aprendizaje compartido donde el profesor podrá desarrollarse profesionalmente, a través del análisis de su práctica. El trabajo en estos entornos debe ser además parte de su práctica profesional.

## 2.4. El tema matemático elegido: la orientación espacial

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) sugiere que la enseñanza de las matemáticas en la escuela debe prestar más atención a la comprensión de objetos geométricos y sus relaciones y al uso de la geometría en la resolución de problemas, y menos atención a la memorización de vocabulario, hechos y relaciones geométricas. Asimismo, el National Council of Supervisors of Mathematics (1989) incluyó la geometría como una de las doce componentes de las matemáticas esenciales para el siglo XXI, y por su parte, el NCTM (1989, p. 112) propuso que el curriculum incluyera el estudio de la geometría de una, dos y tres dimensiones en variedad de

situaciones de modo que los estudiantes, al finalizar el actual 2º de E.S.O., fueran capaces de:

- *identificar, describir, comparar y clasificar figuras geométricas;*
- *visualizar y representar figuras geométricas con atención especial al desarrollo del sentido espacial;*
- *explorar transformaciones de figuras geométricas;*
- *representar y resolver problemas usando modelos geométricos;*
- *comprender y aplicar propiedades y relaciones geométricas;*
- *desarrollar una apreciación de la geometría como medio de describir el mundo físico.*

Esta orientación forma parte de la propuesta formulada por el NCTM (2000) para la enseñanza de las matemáticas desde infantil a secundaria, y la mayoría de los currículos se han expresado en términos similares.

Por consiguiente, es pertinente tomar como concreción del objeto de investigación la enseñanza y el aprendizaje de contenidos geométricos. A esta concreción la hemos llamado orientación espacial, con el propósito de enfatizar las dimensiones de representación, orientación y visualización inherentes al conocimiento geométrico, como puede leerse arriba, y que al mismo tiempo es compatible con las cuatro dimensiones de la geometría propuestas por Usiskin (1987, en Clements y Battista, 1992): a) visualización, dibujo y construcción de figuras, b) estudio de aspectos espaciales del mundo físico, c) uso como vehículo de representación de conceptos y relaciones matemática no visuales, y d) representación como un sistema matemático formal (p. 420).

Un asunto que subyace al enfoque de este trabajo es el desarrollo del razonamiento geométrico5, en el que hemos considerado actualizaciones de la teoría de los Van Hiele en las que se proponen transiciones entre niveles, su aplicación a la geometría de los sólidos (Guillén, 1997), así como la necesidad de analizar, incluso en el mismo nivel, diferentes tipos de razonamiento (Clements y Batista, 2001; Gutiérrez et al., 1991).

[5] Battista (2007) presenta una extensa recopilación de estudios y perspectivas al respecto.

## 3. Objetivos e hipótesis

-Obtener una propuesta inicial para la elaboración de un instrumento de análisis del conocimiento del profesor para enseñar un contenido matemático (la orientación espacial) a distintos niveles.

-Innovar en nuestra propia práctica a partir de la reflexión sobre ella desde una perspectiva investigadora.

## 4. Metodología

### 4.1. Instrumentos de recogida de información[6]

- Entrevistas-debate grupales.

- Registro en audio de las sesiones del grupo.

- Diario del grupo, en el que recogemos la estructura de las sesiones, así como los acuerdos y las principales ideas de las discusiones que mantenemos.

### 4.2. Proceso de recogida y análisis de información. Dinámica de trabajo en el grupo

La tarea desarrollada en este proyecto, como explicamos en 4.4, ha consistido fundamentalmente en análisis documental (de referencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la OE en las tres etapas educativas, así como material curricular), elaboración y discusión de casos de enseñanza sobre OE, elaboración de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de contenidos geométricos, diseño de actividades y una primera elaboración de descriptores sobre el conocimiento profesional del profesor referido a contenidos de OE.

Hemos realizado un acercamiento teórico-práctico al contenido de la orientación espacial. Combinamos la consulta a bibliografía especializada y de libros de texto, el

[6] Derivamos al lector al apartado 4.3, en el que se describe el trabajo previsto inicialmente en el proyecto y el desarrollado. No hemos querido modificar el orden de los epígrafes respecto de la estructura estándar

diseño de actividades didácticas y la extracción de casos prácticos extraídos de nuestra práctica profesional. La discusión y el debate es continuo: las lecturas nos ayudan a comprender nuestra práctica y la reflexión sobre nuestra práctica nos ayudan a dotar de significado la teoría consultada.

Para el análisis documental y el análisis de las discusiones y entrevistas-debate sobre los distintos aspectos abordados, hemos realizado un análisis de contenido (Bardin, 1986), extrayendo la información relevante por lecturas sucesivas de los datos (plasmados siempre en formato escrito). Este análisis ha sido realizado en el gran grupo, o en ocasiones por pequeños subgrupos que han defendido después su análisis en el gran grupo.

Para el análisis de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, hemos hecho uso de un guión de trabajo (Anexo 5) elaborado en el grupo.

## 4.3. Grado de consecución de las fases establecidas

### Fases previstas[7]

Dada la duración de este proyecto (un año) y la necesidad de compaginarlo con nuestro quehacer docente, nuestra propuesta de investigación se abordará en dos etapas, la primera de las cuales corresponde al proyecto que nos ocupa.

Por otra parte, para aprovechar al máximo las diferencias de “background” de los miembros del grupo, el conjunto de sus componentes a veces se dividirá en subgrupos de investigación, como a continuación detallaremos.

ETAPA 1 (2009)

1.1. Primer análisis del contenido desde el punto de vista matemático y curricular (en dos subgrupos: a) Maestra de Ed. Infantil, Maestra de Primaria y estudiante para Maestro; b) profesoras de Secundaria). Elaboración de sendos documentos que plasmen cuáles son las ideas matemáticas centrales respecto del contenido en cada etapa (cada grupo la suya correspondiente) y las conexiones entre ellas.

1.2. Presentación y discusión en el gran grupo de los dos documentos anteriores. Primera reflexión sobre el horizonte del contenido matemático desde Infantil hasta Secundaria y sobre necesidades profesionales.

de la convocatoria. Consideramos, no obstante, que la lectura previa de dicho apartado clarifica los restantes.

[7] Literal de la solicitud del proyecto.

1.3. Discusión de casos sobre la enseñanza de estos contenidos en dichas etapas (elaborados de otras investigaciones o extraídos de experiencias personales o de compañeros).

1.4. Lectura y discusión sobre bibliografía disponible respecto de la enseñanza y aprendizaje del contenido.

1.5. Diseño de actividades para Educación Infantil, Primaria y Secundaria obligatoria para trabajar el contenido (propuestas desde la resolución de problemas, buscando la potenciación de las competencias básicas; alguna de las actividades se diseñarán en entornos TIC)[8].

1.6. Elaboración a partir de los pasos anteriores de una propuesta inicial de descriptores y medidas del conocimiento del profesor para la enseñanza de esos contenidos.

ETAPA 2 (2010)
Aunque no corresponda a este proyecto, en el año siguiente completaríamos el diseño, pondríamos en práctica las actividades diseñadas y extraeríamos información sobre las necesidades de las profesoras durante la práctica y en el análisis posterior de la misma.

## CONSECUCIÓN DE LO PREVISTO

Dada la reducción de tiempo del proyecto (enero-junio) respecto del año previsto, hemos abordado una simplificación de la primera etapa prevista. En concreto, hemos diseñado una actividad para cada etapa (tres, además, para la etapa de Primaria, una para cada uno de sus ciclos) pero no hemos hecho diseño de actividad TIC. Además, hemos sólo iniciado la fase 1.6 anterior.

ETAPA 1

*(1.1.-1.2) Elaboración y discusión de documentos sobre la Orientación espacial en Infantil, Primaria y Secundaria.*

Estas dos etapas han sido cubiertas en el proyecto, con modificaciones respecto de lo previsto, sobre todo en lo que respecta a la integración de los dos documentos previstos en uno solo, que engloba el contenido de las tres etapas educativas (Infantil, Primaria y Secundaria). Pasamos a detallar la consecución de estas dos fases.

[8] Es previsible que este año no podamos abordar el diseño de actividades para las tres etapas, por lo que el año siguiente se completaría dicho diseño

Para estas fases, trabajamos en grupos, tal y como estaba previsto, aunque la reflexión sobre el conocimiento matemático lo abordamos en gran grupo al principio del proceso. Iniciamos nuestra andadura delimitando el significado del término de Orientación Espacial (OE) con el que íbamos a trabajar a lo largo del curso y acotando nuestro campo de interés. De nuestra experiencia profesional conocíamos que habitualmente se suele asociar con expresiones como visualización, razonamiento geométrico y modelización, pero decidimos centrarnos exclusivamente en la OE. De nuestra reflexión posterior sobre qué contenidos asociábamos con él, extrajimos un listado de descriptores que se resumen en dos categorías generales: a) La situación de personas, objetos y uno mismo respecto de otros objetos, personas o puntos y b) conducirse o conducir a otro entre dos posiciones. Este fue nuestro punto de partida para el trabajo posterior.

Respecto del análisis curricular, tomamos como referencia libros de texto de distintas editoriales e identificamos qué objetivos y contenidos estaban vinculados con la orientación espacial, para cada ciclo escolar. En cuanto al análisis del contenido, nos interesaba abordarlo desde el punto de vista de su estructura, así como desde su enseñanza y aprendizaje. Para tal fin, nos apoyamos en lecturas tanto de Psicología como de Didáctica de las Matemáticas como por ejemplo Ochaita (1983), Dickson et al (1991), Palacios, Marchesi y Coll C., (2005). En estas lecturas nos interesaba familiarizarnos con diversas perspectivas teóricas (como el enfoque del conocimiento ambiental), conocer las principales dificultades que los alumnos presentan durante su proceso de aprendizaje y cómo influyen éstas en aprendizajes posteriores. Ambos grupos, de Infantil-Primaria y Secundaria, presentaron su trabajo al grupo completo, que fue discutido y consensuado en su estructura. En lugar de elaborar dos documentos, uno para Infantil y Primaria y otro para Secundaria, decidimos integrarlo en uno solo, con el fin de poner de relieve el trabajo longitudinal en torno al contenido de la Orientación Espacial. El resultado de este trabajo lo plasmamos en el *documento 1* (Anexo 1), el cual lo concebimos como una primera versión, que refleja el trabajo realizado hasta el momento, pero que esperamos seguir reestructurando y completando en la segunda fase de la investigación.

### *1.3. Discusión de casos de enseñanza sobre Orientación espacial*

Mediante la consulta de los libros de texto y de bibliografía especializada sobre el tema habíamos logrado una primera aproximación al contenido de la Orientación Espacial. Para contrastar lo estudiado con ejemplos reales, según lo previsto, elaboramos casos de

enseñanza, bien extraídos de otras investigaciones o de nuestra propia experiencia. Nuestra finalidad era delimitar la amplitud conceptual del contenido que íbamos a considerar, desarrollar un lenguaje común y ver en qué medida nos ayudaba a iluminar y comprender nuestra práctica como docentes (en relación a este contenido). Realizamos una búsqueda de artículos de investigación que resultó infructuosa porque vinculaban el concepto de orientación espacial al de visualización. Decidimos, pues, centrarnos en casos de nuestra propia práctica o de nuestras investigaciones y obtuvimos 3 casos: dos de ellos teniendo como foco de atención el proceso de aprendizaje de los alumnos cuando se enfrentan a tareas de orientación espacial, mientras que el tercero se fija en cómo una maestra gestiona el trabajo de enseñanza en una actividad de este contenido. La presentación de los casos al grupo vino acompañada de una discusión en el que analizábamos los contenidos matemáticos puestos en juego y el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball y Bass, 2003, Ball, Hill y Bass, 2005: Hill, Rowan y Ball, 2005) de la maestra del tercer caso, respecto del contenido. Fruto de esta discusión, elaboramos unos informes que describen cada uno de los casos e incorporan el análisis realizado en el grupo (ver Anexos 2.1, 2.2 y 2.3).

### *1.5. Diseño de actividades para Educación Infantil, Primaria y Secundaria obligatoria para Orientación espacial*

Entendemos el diseño como una vía para nuestro desarrollo profesional y, en el contexto de este proyecto, además como un modo de ir indagando sobre el horizonte del contenido matemático de la orientación espacial desde Infantil hasta Secundaria (esto es, la perspectiva de los contenidos desde EI hasta E.S.O).

Para abordar esta actividad, pensamos inicialmente en una *tarea*, la realización de una maqueta del barrio a escala, destinada a los alumnos del último ciclo de Secundaria sobre la Orientación Espacial (OE), con el fin de conocer qué herramientas conceptuales y procedimentales sobre OE debe haber adquirido un alumno, después de haber pasado por las etapas y ciclos educativos previos (Infantil, Primaria y Secundaria), para realizarla exitosamente. Esta tarea pretendía suscitar una reflexión profesional sobre qué contenidos de OE son específicos de cada ciclo con el fin de que fuéramos construyendo un conocimiento profesional propedéutico. Para tal fin, cada miembro del grupo se responsabilizó de adaptar la tarea anterior al curso en el que estaba impartiendo clase, obteniendo así una actividad de infantil, una para cada ciclo de primaria y otra para el segundo ciclo de Secundaria, aprovechando así la heterogeneidad que caracteriza a nuestro grupo. La tarea inicial de construcción de una maqueta, se recondujo en el caso

de algunos ciclos, hacia construcción de planos y su interpretación. Fueron presentadas, discutidas y adaptadas en el grupo.

A lo largo de este curso algunas de las maestras del grupo recibieron formación específica en su centro acerca de la filosofía que impregna la enseñanza por competencias. Compartieron con el resto del grupo su experiencia y conocimientos adquiridos y decidimos adaptar las actividades anteriores. Este cambio nos exigía transformar las actividades en *tareas*, cuyo principal distintivo es que, después de las sucesivas actividades y ejercicios que las componen, los alumnos deben obtener un producto relevante y socialmente reconocido. Aunque reconocemos el valor de los ejercicios en el entrenamiento en determinados procedimientos y conceptos, nuestra perspectiva es coherente con la resolución de problemas por lo que en nuestras tareas iban a predominar las actividades que exigen deliberación por parte del alumno. Para esta adaptación nos apoyamos en el grupo, al que presentábamos nuestras dudas y reflexiones en este proceso de reflexión.

Aunque en el proyecto de solicitud previmos que probablemente no íbamos a poder abordar el diseño de actividades para las tres etapas, finalmente hemos acometido esta tarea en su completitud y esperamos poder ponerlas en práctica el próximo curso.

*1.2. Primera reflexión sobre el horizonte del contenido matemático desde Infantil hasta Secundaria y sobre necesidades profesionales*

La búsqueda y lectura de bibliografía específica, la elaboración de casos de enseñanza sobre OE y el diseño de tareas en cada etapa educativa son actividades que nos ayudaron a familiarizarnos y profundizar en un contenido matemático tan complejo como el que nos ocupa.

Para abordar esta tarea, elaboramos un "*guión para la identificación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*" para el aprendizaje de la OE (Ver apartado Anexo 5). El objetivo principal de este guión consistía en seleccionar un contenido relacionado con la OE de 6º de Primaria, analizar sus conceptos y procedimientos relacionados e identificar los precursores de tales contenidos pertenecientes a ciclos previos, llegando hasta infantil. No existe un precursor único para cada contenido, por lo que se pueden elaborar diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) para cada uno. Posteriormente interpretamos las THA a la luz de los referentes teóricos expuestos en nuestro *documento 1* (anexo 1) y proponemos cómo evolucionaría en la Educación Secundaria Obligatoria. Así obtendríamos el horizonte matemático de un determinado contenido a lo largo de las tres etapas educativas.

Se trata de un trabajo exigente, que requiere mucho esfuerzo de profundización en los contenidos matemáticos y tiempo. Debido a la acotación temporal de este proyecto, hemos iniciado este trabajo seleccionado un contenido particular 'la proporcionalidad y la escala' y hemos seguido el proceso explicado anteriormente. Presentamos este trabajo en el anexo 5. Dada la importancia que le hemos atribuido para nuestra formación matemática y didáctica respecto de la OE vamos a proseguir nuestro trabajo en esta dirección.

*1.6. Elaboración de una propuesta inicial de descriptores y medidas del conocimiento del profesor para la enseñanza de esos contenidos*

Se trata de una actividad que, debido a la enjundia que posee y a la reducción temporal que ha sufrido el proyecto, no hemos podido acometer. No obstante, uno de los miembros del grupo se encargó de elaborar un documento que resume las aportaciones de Shulman y Ball y colaboradores sobre la caracterización del conocimiento profesional. Este es un documento genérico, respecto de cualquier contenido matemático.

En una fase posterior del proyecto, abordaríamos la propuesta de descriptores del conocimiento profesional respecto de la OE a partir de este documento y de nuestro análisis del horizonte matemático relativo a proporcionalidad y escala.

(*1.4. Lectura y discusión sobre bibliografía disponible respecto de la enseñanza y aprendizaje del contenido*. Esta tarea ha sido constante y simultánea a la de otras fases, especialmente las de 1.1 y 1.5).

## 5. Actividades realizadas

Las actividades realizadas han sido descritas en la consecución de lo previsto (4.4.).

## 6. Resultados y Conclusiones

Entre los resultados obtenidos destacamos los siguientes:

***- Definición y acotación del término de orientación espacial***

El propio término de orientación espacial necesita de precisión. Guarda estrecha relación con los de visualización, razonamiento geométrico y modelización. De hecho, en la literatura de investigación es frecuente encontrar sobre todo referencias a estos tres últimos conceptos, aún bajo el término inicial de orientación espacial.

Los principales descriptores de las actividades que en principio relacionamos con la OE son:

- Esquema corporal: propio/del otro
- Nociones espaciales: arriba/abajo, derecha/izquierda, dentro/fuera
- Formas de encontrar lugares en una zona urbanizada, direcciones
- Verbalización de instrucción
- Coordenadas cartesianas
- Longitud y latitud
- Puntos cardinales
- Interpretación y elaboración de croquis, planos y mapas
- Interpretación y elaboración de esquemas de itinerarios
- Estrategias personales
- Representación en el plano y en el espacio de objetos, puntos,… dadas unas instrucciones
- Perspectiva (por ejemplo, dibujar objetos donde se tenga que hacer una comparación de cuál está más lejos o más cerca  y cuál es más grande o más pequeño)

Todas ellas pueden  quedar globalizadas en:

1. Situarse uno mismo, otros y objetos con respecto a otros puntos de referencia.
2. Localizar a otros entre dos posiciones
3. Incluir los movimientos en el plano y en el espacio. Los que nos interesan son los relativos a posición, localización, coordenadas, referencias, que son descriptores de orientación espacial.

Estos tres últimos aspectos señalados son los que consitutuirán la OE dentro de nuestro proyecto.

***- Profundización del grupo en los procesos de aprendizaje de contenidos de OE desde EI hasta ESO.***

En Ed. Infantil la organización espacial puede entenderse como la estructuración del mundo externo, que primeramente se relaciona con el yo y luego con otras personas y objetos, tanto se hallen en situación estática como en movimiento. Se trata, por

consiguiente, del conocimiento del mundo externo tomando como referencia el propio yo (esquema corporal). Las descripciones de situaciones y localizaciones se hacen en términos absolutos y usando referentes internos (personales).

En Educación Primaria, progresivamente se van usando referentes externos y relativos. Se puede diferenciar la descripción de la posición de un objeto (o de uno mismo) de distintos modos, según los elementos de referencia que se tomen. Se inician los referentes simbólicos, alcanzándose en tercer ciclo el dominio de algunos como los puntos cardinales o los sistemas de coordenadas alfanuméricos y cartesianos. Se pueden tomar decisiones respecto de la elección de referentes espaciales que interesen.

En E.S.O. se consolida el uso de sistemas de referencia simbólicos (cartesiano, polar y geográfico), la interpretación de planos con su notación convencional y el concepto de escala

***- Diseño de actividades sobre OE desde el enfoque de la enseñanza por competencias y con el diseño de una enseñanza basado en tareas.***

(Presentamos las actividades en el anexo 3).

***- Introducción en el conocimiento profesional relativo a la proporcionalidad y la escala***

Hemos comenzado a construir nuestro conocimiento propedéutico en relación con la proporcionalidad y escala y hemos profundizado en el conocimiento común y especializado. En este sentido, por un lado, hemos constatado las diferencias entre las maestras de Educación Infantil y Primaria y profesores de Secundaria. El concepto de escala (como aplicación del de proporcionalidad en el ámbito de la OE) tiene su complejidad matemática y tiene ramificaciones no inmediatas en otros contenidos matemáticos. Además de su definición, hemos de considerar su notación y representación gráfica. La mayoría de las veces las escalas se refieren a relaciones en las que los objetos reales son mayores que sus representaciones. Sin embargo, parece necesario considerar relaciones menores que uno (por ejemplo, la representación de un tornillo o algún elemento de pequeño tamaño).

Hay que resaltar que la escala se inserta en una situación de proporcionalidad. Si, por ejemplo, nos planteamos encajar en un folio un rectángulo de dimensiones dadas, el encaje no podrá ser perfecto si este segundo rectángulo no es proporcional al folio. En ese caso, al considerar las razones de proporción entre los lados respectivos del

rectángulo y el folio, obtenemos dos resultados. La escala deberá ser elegida entre ambos (habrá de ser la proporción menor).

La idea de escala tiene sus precursores en otros contenidos matemáticos, relacionados básicamente con la proporcionalidad geométrica y numérica (la comparación de objetos de igual forma por su tamaño, los conceptos de doble y triple y las razones multiplicativas, las fracciones equivalentes…). El profesor y el maestro de Primaria deben saber de la relación entre estos contenidos y la idea de escala para comprender el contenido conceptual de esta última.

En los anexos 2 y 5 presentamos nuestra discusión de casos de enseñanza relativos a la OE en distintos niveles y una trayectoria hipotética de aprendizaje relativa a la proporcionalidad y la escala. El primer documento recoge nuestro análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje de contenidos de OE desde la perspectiva de los procesos de aprendizaje de tales contenidos y en los casos posibles el conocimiento profesional implicado en el diseño y gestión de la tarea.

## 7. Productos

7.1. Documento 1: Fundamentación sobre los procesos de aprendizaje de la orientación espacial. Objetivos y contenidos de OE en las distintas etapas educativas. (Anexo 1)

7.2. Casos de enseñanza-aprendizaje sobre Orientación espacial. (Anexo 2)

7.3. Actividades sobre OE para EI, 1º, 2º y 3º ciclo de Ed. Primaria y ESO, integrando competencias. (Anexo 3)

7.4. Guión para la identificación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje y trayectoria hipotética de aprendizaje de “proporcionalidad y escala”. (Anexo 5)

Consideramos que el material elaborado puede ser útil tanto para profesores como para formadores de profesores, de cara a una reflexión profesional sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Orientación Espacial. Para un profesor de cualquiera de las etapas estudiadas (Ed. Infantil, Ed. Primaria o E.S.O.), la reflexión sobre los contenidos no sólo en su etapa sino en otras previas y posteriores, le ayuda a construir el *para qué* y *por qué* de los contenidos en su etapa. Creemos que puede ser un modo de construir, igual que hemos hecho los miembros del grupo, su horizonte matemático al respecto.

Esta reflexión puede realizarse desde distintos formatos, por la variedad del material elaborado al respecto. De esta forma, los casos de enseñanza-aprendizaje simulan situaciones reales del aula y el profesor puede a través de ellas centrarse en cómo se aprende el contenido y posibles dificultades, así como en cómo abordar su enseñanza. Estos casos, además, pueden ser útiles para los formadores de profesores de cara a su uso y pueden potenciar la discusión de perspectivas sobre la enseñanza-aprendizaje de los contenidos en grupos de profesores. Por otro lado, las actividades sitúan la reflexión en el terreno del diseño didáctico. Finalmente, la trayectoria hipotética de aprendizaje tiene un cariz más teórico, posibilitando, desde nuestro punto de vista, una reflexión más profunda sobre el conocimiento matemático especializado y curricular relativo a orientación espacial.

## 8. Valoración general del proceso

En general estamos muy satisfechos con el trabajo desarrollado. La principal dificultad que nos hemos encontrado es el solapamiento entre las convocatorias de proyectos de investigación educativas consecutivas, lo que ha supuesto que el plan de trabajo previsto para este año 2009, se ha visto reducido al primer semestre del año. Esta circunstancia nos ha llevado a reconsiderar el trabajo a realizar con el fin de reducirlo, sin que por ello pierda su esencia.

Nos ha resultado muy gratificante el haber tenido la oportunidad de haber trabajado en un contenido matemático sobre el que no hay mucho hecho. Las referencias encontradas relacionan la orientación espacial con la visualización, el razonamiento geométrico y la modelización, mientras que nuestra pretensión era centrarnos exclusivamente en la OE desde la perspectiva del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, identificando su naturaleza y contenido. Unido a la familiarización con este contenido, a través del análisis curricular, de libros de texto y de estudios de investigación, valoramos especialmente la perspectiva que hemos adoptado de considerar cómo va evolucionando este contenido a lo largo de las distintas etapas educativas. Esta perspectiva del horizonte matemático ha favorecido que, profesores de distintos niveles y etapas educativas, nos sintamos integrados en un interés común: conocer cómo evoluciona el contenido de la OE, qué contenidos matemáticos de cada etapa contribuye a su construcción y qué actividades lo favorecen. A este respecto, una de las maestras del grupo expuso en el grupo su satisfacción por el trabajo que habíamos realizado, en la medida en que la reflexión y el trabajo en torno al horizonte matemático le había

ayudado a comprender la importancia, la trascendencia y utilidad que determinados contenidos matemático poseen como sustento para contenidos posteriores.

La heterogeneidad del grupo, lejos de suponer un obstáculo, es lo que ha impulsado y enriquecido el trabajo y reflexión realizados. De no ser por la existencia de profesores pertenecientes a los distintos niveles y etapas educativas, hubiera sido imposible acometer nuestra tarea con la profundidad que consideramos que hemos logrado.

Asimismo, no sólo la heterogeneidad de niveles educativos, sino de experiencias y conocimientos ha sido un motor fundamental en nuestro trabajo. Con el fin de rentabilizar al máximo este potencial, en ocasiones nos hemos organizado por subgrupos, de manera que cada uno pusiera sus capacidades, experiencias y conocimientos al servicio del grupo. Consideramos que el trabajo por grupos junto a las posteriores puestas en común y reflexiones conjuntas han sido piezas claves en el éxito de la dinámica de trabajo que esperamos seguir realizando en el futuro.

El diseño de las actividades de OE ha contribuido a establecer la necesaria relación entre la teoría y la práctica. Las lecturas y discusiones realizadas iluminaron tales diseños, pero a su vez, tuvimos en cuenta la realidad de la práctica que cada profesor/maestro posee en su aula. A este respecto, hemos elaborado dichos diseños desde la perspectiva del desarrollo de competencias, lo que nos ha permitido profundizar en las implicaciones reales y en la filosofía que subyace a este cambio.

Aunque parte de nuestro trabajo consiste en la elaboración de documentos prácticos (diseños) como otros de cariz más teórico (el esquema de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje), seguimos valorando positivamente nuestra dinámica de trabajo en base a la reflexión teórico-práctica como motor de nuestro desarrollo profesional.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D.L. (1989). Research on Teaching Mathematics: Making Subject Matter Knowledge Part of the Equation. En Brophy, J. (Ed.) *Advances in Research on Teaching*, vol.2. Greenwich: JAI Press.

Ball, D.L. (2000): Bridging practices. Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. En *Journal of Teacher Education*, Vol. 51 (3), pp. 241-247).

Ball, D. L. (2002, summer): Knowing mathematics for teaching: Relations between research and practice. In *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14 (3), 1-5.

Ball, D. L Y Bass, H. (2003): "Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Edmonton, AB: CMESG/GCEDM

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005): 'Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?' *En American Educator*. Pp. 14-46

Bardin, L. (1986). El análisis del contenido. Madrid: Akal.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F.K. Lester, Jr. (ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Brophy, J. (1999). *Teaching*. Educational Practices series UNESCO with the International Academy of Education and the International Bureau of Education.

Carrillo, J. (2001). Aprender desde la resolución de problemas. En I. Lopes, J. Silva & Paulo Figueiredo (eds) *Actas do ProfMat 2001* (71-80). Vila Real, Portugal: Associaçao de Profesores de Matemática.

Carrillo, J. y Climent, N. (2003). El caso del desarrollo profesional de una maestra. En J. Murillo, P.M. Arnal, R. Escolano, J.M. Gairín y L. Blanco (eds) Investigación en Educación Matemática. Actas del VI Simposio de la SEIEM (Logroño, 2002) (p. 47-67). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza: Universidad de La Rioja.

Carrillo, J. & Climent, N. (2006). Analysing teaching practice in collaborative environments. En G. Nickmans, M. Bosmans & L. Brants (eds) *First European Conference for Practice-based and Practitioner Research. Improving quality in*

*teaching and learning: developmental work and implementation challenges* (p. 19-20). University of Leuven, 19-21 octubre. European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI) and Centre for Research on Teaching and Teaching (COD).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz, Mª C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 33-44.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Rojas, F. & Prat, M. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(1), 59-68.

Castro, E. y Molina, M. (2005). Rendimiento en competencias matemáticas de los estudiantes españoles en el Informe PISA 2003. *Padres y Madres de Alumnos*, Revista de la CEAPA, 82.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: NCTM & Macmillan.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (2001). *Logo and Geometry. Journal for Research in Mathematics Education Monograph*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Michigan: Proquest Michigan University (www.proquest.co.uk).

Climent, N. & Carrillo, J. (2002a). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, 7(2), 171-205.

Climent, N. & Carrillo, J. (2002b). Developing and researching profesional knowledge with primary teachers. En J. Novotná (ed) *European Research in Mathematics Education II, Proceedings of the CERME 2*, 269-280. Praga: Charles University.

Climent, N. & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387-404.

Climent, N. & Carrillo, J. (2007a). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, 23-35.

Climent, N. & Carrillo, J. (2007b). El análisis de clases de matemáticas en la formación inicial del maestro. Un estudio exploratorio. *Investigación en educación matemática* XI, 307-314.

Cobb, P. (1995): Continuing the Conversations: A response to Smith. In Educational Researcher, Vol. 24 (7), pp. 25-27)

Cobb, P.; Jaworski, B. Presmeg, N. (1996): Emergent and sociocultural views of mathematical activity. En L. Steffe y P. Nesher (eds), Theories of mathematical learning. New Jersey: Lawrence Erlbaum associates publishers,

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Labor-MEC.

Estepa, J. (2000). El conocimiento professional de los profesores de Ciencias Sociales. En Pagés, J.; Estepa, J. y Travé, G. (Eds.) *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Franke, M.L. et al. (1998). Understanding teachers' self-sustaining, generative change in the context of professional development *Teaching and Teacher Education*, 14(1), 67-80.

García Blanco, M. (1999). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: GIEM-Universidad de Sevilla.

González, M.J. y Lupiáñez, J.L. (2005). ¿Qué valor social tiene el conocimiento matemático? *Padres y Madres de Alumnos*, Revista de la CEAPA, 82.

Guillén, G. (1997). El modelo de van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje. Tesis doctoral Universitàt de Valencia (Publicada en 1999 en la colección Tesis doctorales en microfichas).

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.

Hatfield, L. (1978). Heuristical Emphases in the Instruction of Mathematical Problem Solving: Rationales Research. En L. Hatfield, y D. Bradbard (eds) *Mathematical Problem Solving: Papers from Research work shop*. Ohio: ERIC/SMEAC.

Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005): Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42 (2), pp. 371-406.

Jaworski, B. (1996). A study of teachers inquiry into the processes of mathematics teaching. *Proceedings of the XX PME*, vol. 3, 129-136. Valencia: España.

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process, practice and the development of teaching *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3-31.

Krainer, K. (1999). Teacher education and investigations into teacher education: A conference as a learning environment. En Krainer, K.; Goffree, F. y Berger, P. (Eds.) *European Research in Mathematics Education I.III. On Research in Mathematics Teacher Education*. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. Osnabrück, Alemania. Cap.1, pp. 13-39.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006): "Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners". En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 429-459. Sense Publishers B.V. (Rotterdam, The Netherlands)

LOCE**:** Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación (B.O.E. nº 307, de 24 de diciembre de 2002)

LOE**:** Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (B.O.E. nº 106, de 4 de mayo de 2006)

LOGSE**:** Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (B.O.E. nº 238, de 4 de octubre de 1990)

Marín, A. y Guerrero, S. (2005). Una lectura del informe PISA desde la Secundaria. *Padres y Madres de Alumnos*, Revista de la CEAPA, 82.

Moreira, P.C. & David, M.M. (2008). Academic Mathematics and Mathematics Knowledge Needed in School Teaching Practice: Some Conflicting Elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 23-40.

Muñoz-Catalán, C.; Carrillo, J. & Climent, N. (2006a). The transition from initial training to the immersion in practice. The case of a mathematics primary teacher. En M. Bosch et al. (eds) *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Pp. 1526-1536. Sant Feliú de Guixols, España. 17-21 febrero 2005. Barcelona: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. & Climent, N. (2006b). La reflexión de una maestra de matemáticas en el *Practicum* y en los inicios de su práctica docente. En P. Bolea, M.J. González y M. Moreno (eds) *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huesca: Universidad de Zaragoza. (p. 217-224)

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. & Climent, N. (2007). The professional development of a novice teacher in a collaborative context: An analysis of classroom practice. En D. Pitta-Pantazi, G. Philippou et al (eds) *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*. Larnaca, Chipre: University of Cyprus. (1935-1944)

National Council of Supervisors of Mathematics (1989). Essential Mathematics for the twenty-first Century. *Mathematics Teacher*, 82, 470-474.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 325-340.

Ochaita, E. (1983). La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. Estudios de Psicología

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OCDE.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.

Orden de 28 de junio de 2006, por la que se regulan las pruebas de la evaluación de diagnóstico y el procedimiento de aplicación en los centros docentes de Andalucía sostenidos con fondos públicos. (B.O.J.A. nº 150, de 4 de agosto de 2006)

Pajares, R., Sanz, A. y Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Palacios, J., Marchesi, A., Coll C., (2005). Desarrollo psicológico y educación 1. Psicología evolutiva. Madrid. Alianza Editorial.

Recio, T. y Rico, L. (2005). El informe PISA 2003 y las matemáticas. *El País*, 24-01-05.

Rico, L. (2005). La alfabetización matemática y el proyecto PISA de la OCDE. *Padres y Madres de Alumnos*, Revista de la CEAPA, 82.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Stylianides, A.J. y Ball, D.L. (en prensa). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*.