

Deformaciones para ingenieros: de grandes a pequeñas

Pablo Fernández Hernández

Diego Casas Vega

Resumen— Este documento introduce de forma clara algunos de los conceptos fundamentales de la mecánica del medio continuo. Se detallan las matrices de gradiente de deformación en formulación material y espacial, junto con las expresiones de las matrices (tensores) de Green–Lagrange y de Almansi. Finalmente, se aborda el caso de pequeñas deformaciones, donde se simplifican las ecuaciones para reducir el coste computacional.

Palabras Clave— Mecánica del continuo, sólido deformable, gradiente de deformación, tensor de Green–Lagrange, tensor de Almansi, delta de Kronecker, pequeñas deformaciones, campo de desplazamientos, análisis tensorial.

1. Introducción

En mecánica del medio continuo, y suave aunque no se acostumbre a decir, se habla usualmente de un sólido a estudiar. Este sólido, que se denotará con la letra Ω , habitualmente suele hacerse depender del tiempo ($\Omega(t) \stackrel{\text{not}}{=} \Omega_t$) siendo Ω_0 el estado de referencia inicial del sólido (Oliver y Agelet, 2017).

1.1. Sólido rígido y sólido deformable

Un sólido rígido es aquel cuya configuración en tamaño y forma¹ no cambia ante acciones externas, no existiendo variación entre las posiciones relativas de las partículas de sólido (Paris, 2000).

Esto significa que en el espacio del sólido rígido, los únicos desplazamientos disponibles son aquellos dados por las traslaciones y rotaciones.

En este contexto, la distancia entre dos puntos cualesquiera del sólido $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \Omega$ no varía con el tiempo:

$$\forall \vec{x}, \vec{x}_0 \in \Omega : \frac{\partial \|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

En contraposición, entendemos al sólido deformable como aquel que su configuración se deforma en tamaño y/o forma ante la acción de cargas de forma que al menos la distancia dos partículas contenidas en el sólido varía con el tiempo:

$$\exists \vec{x}, \vec{x}_0 \in \Omega : \frac{\partial \|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\partial t} \neq 0 \quad (2)$$

Con esto, denominaremos al sólido de configuración indeformada como Ω_0 , anterior a la aplicación de las cargas exteriores y, en su contraparte, a la configuración deformada como Ω_t , posterior a las cargas exteriores pero, que de igual forma, se alcanza el equilibrio interno.

¹En este contexto, configuración se utiliza como sinónimo de aplicación en el espacio

1.2. Entorno de un punto y contorno de un sólido

De esta forma, el contorno del sólido se refiere a $\partial\Omega$, siendo el entorno de un punto definido de \vec{x}_0 como $B(\vec{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \delta > 0\}$ de manera que:

- Si $\exists \delta \forall \vec{x} \in \Omega \mid \vec{x}_0 \in \Omega$, entonces $\vec{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega$
- Si $\exists \delta \exists \vec{x} \notin \Omega \mid \vec{x}_0 \in \Omega$, entonces $\vec{x} \in \partial\Omega$

O dicho de una forma más simplificada: siendo \vec{x}_0 un punto del sólido, si todo punto \vec{x} en el entorno (infinitesimalmente próximo) de \vec{x}_0 está dentro del sólido Ω entonces \vec{x}_0 también está dentro del sólido. En caso contrario, \vec{x}_0 es un punto del contorno de Ω , es decir, es un punto de $\partial\Omega$.

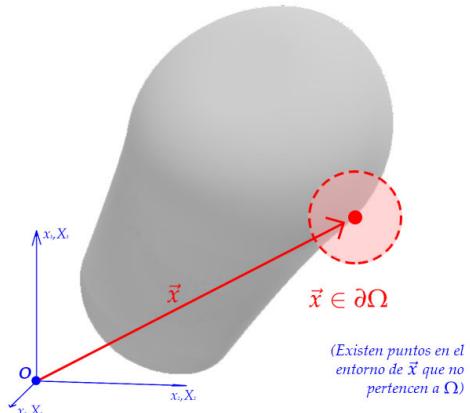


Figura 1: Punto en el contorno de un sólido.

2. Desplazamientos

Cabe mencionar de forma importante que un desplazamiento no tiene porque suceder, en un contexto matemático, por una deformación pero una deformación sí que produce siempre un desplazamiento.

En la práctica, un desplazamiento siempre termina produciendo una deformación, por muy pequeña que sea, ya que la aplicación de una fuerza provoca otra rozamiento (una fuerza en sentido contrario), y, por lo tanto, una breve compresión.

Aunque en la literatura de la mecánica del medio continuo se usa la palabra «*tensor*», aquí nos bastaremos con desgeneralizar al caso de la matriz ya que no saldremos de las coordenadas cartesianas en un espacio normado por la distancia \mathbb{R}^3 .

Y es que, los desplazamientos se interpretan en matrices debido a que son funciones de tres valores con tres variables, es decir, como un campo vectorial de desplazamientos:

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (3)$$

$$U_i(\vec{X}, t) = x_i(\vec{X}, t) - X_i \quad (4)$$

Donde \vec{x} es un punto del sólido Ω_t y \vec{X} es un punto del sólido Ω_t siendo \vec{x} función de \vec{X} .

Sin embargo, también es posible definir el campo de desplazamientos siendo \vec{X} función de \vec{x} :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{X}(\vec{x}, t) \quad (5)$$

$$u_i(\vec{x}, t) = x_i - X_i(\vec{x}, t) \quad (6)$$

Estas dos opciones, referidas a las expresiones (3) y (5), son igualmente viables y, usualmente, muy diferentes en su desarrollo.

Sin embargo, en la formulación y concepto físico, así como en su representación, ambas, son idénticas.

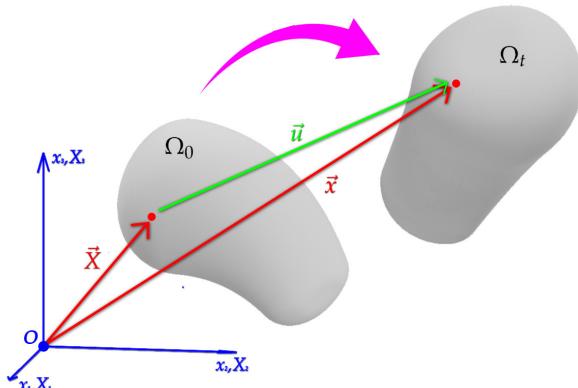


Figura 2: Representación del desplazamiento.

3. Deformaciones

3.1. Delta de Kronecker

En ocasiones, existirán matrices de derivadas parciales tales que se estén derivando ejes con respecto a otros ejes del espacio cartesiano. Esto es, $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donde solo hay dos posibles resultados al ser independientes para $i \neq j$ e iguales para $i = j$.

Así, definimos la delta de Kronecker como una simplificación de esta idea (y generalización para la matriz identidad):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

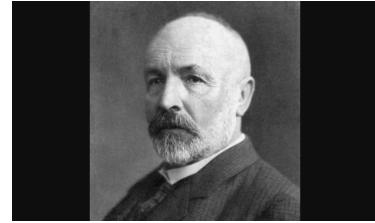


Figura 3: Fotografía de Leopold Kronecker.

3.2. Matriz gradiente de deformación

Es viable definir, por la regla de la cadena:

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \stackrel{\text{not}}{=} \nabla_j^{(X)} x^i dX^j \quad (8)$$

$$dX_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \stackrel{\text{not}}{=} \nabla_j^{(x)} X^i dx^j \quad (9)$$

Aunque las tres notaciones son válidas para cada caso, nosotros tomaremos la primera por su simplicidad. Sin embargo, cabe destacar que la última de ellas es la forma en la cual se acostumbra a usar en análisis tensorial, la herramienta de cálculo de la relatividad de Einstein. De hecho, a la segunda y tercera forma de notación se le suele denominar *notación de Einstein* (Grinfeld, 2010).

Como $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$ está claro que hay 6 formas de la expresión $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ y $F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$:

$$\mathbf{F} = \nabla_j^{(X)} x^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Esta matriz recibe el nombre de *matriz gradiente espacial de las deformaciones* $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$.

$$\mathbf{F}^{-1} = \nabla_j U^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Esta matriz recibe el nombre de *matriz gradiente material de las deformaciones* $\mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t)$.

3.3. Matrices de deformación

Sea ds la longitud de un desplazamiento diferencial $d\vec{x}$ que une dos puntos infinitesimalmente próximos en un sólido de configuración determinada:

$$\|d\vec{x}\| = ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad (12)$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i. \quad (13)$$

Usando la regla de la cadena vista en (8) y (9) y sustituyendo en la expresión (13) de ds^2 :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \right). \quad (14)$$

De forma análoga, en la configuración original:

$$dS^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right). \quad (15)$$

Finalmente, si restamos ambas expresiones y usamos la notación de Einstein (que implica suma sobre índices repetidos):

$$ds^2 - dS^2 = \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j. \quad (16)$$

$$ds^2 - dS^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j. \quad (17)$$

$$ds^2 - dS^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j = 2 e_{ij} dx_i dx_j. \quad (18)$$

Denominándose así a E_{ij} como la matriz material de deformación de Green–Lagrange y a e_{ij} como la matriz espacial de deformación de Almansi, siendo usada cada una según el caso.

Nótese que ambas matrices son simétricas.

Las matrices son de la forma:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = \sum_{m=1}^3 F_{mi} F_{mj} \quad (19)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{11} - 1 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} - 1 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} - 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$b_{ij} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^3 F_{mi}^{-1} F_{mj}^{-1} \quad (21)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 1 - b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1 - b_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

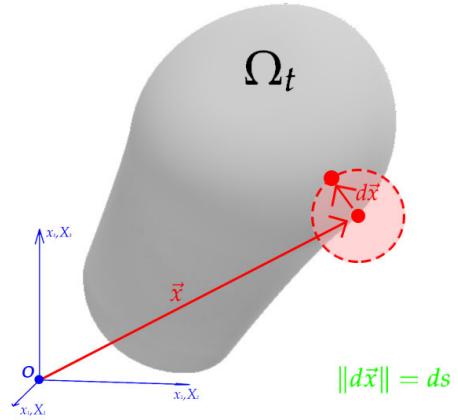


Figura 4: Desplazamiento diferencial.

3.4. Deformaciones y desplazamientos

Puede establecerse por tanto que, para una componente i fija:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \right) \quad (23)$$

Por lo cual, puede reescribirse:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \right) \quad (24)$$

Análogamente:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (25)$$

En este punto volveremos a aplicar la notación de Einstein para compactar la formulación. Sustituyendo en la matriz de deformaciones, tanto espacial como material:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right] \quad (26)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \quad (27)$$

Ambas expresiones puedes describirse en función del campo vectorial de desplazamientos de forma compacta:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (28)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (29)$$

3.5. Matriz simétrica

Como $e_{ij} = e_{ji}$ y $E_{ij} = E_{ji}$, la cantidad de elementos simétricos ($i \neq j$) que posee cada matriz es $\frac{n^2-n}{2}$ siendo n la dimensión de \mathbb{R}^n .

Por otro lado, la cantidad máxima de elementos diferentes en e y E en cada caso es de $\binom{n+1}{2}$, de nuevo, en \mathbb{R}^n .

4. Pequeñas deformaciones

Las pequeñas deformaciones se dan bajo la aproximación:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \approx \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad (30)$$

La consecuencia más inmediata de esta consideración es:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \approx 0 \quad (31)$$

Por lo que, para tal caso, se concluye:

$$E = e = \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (33)$$

Lo cual puede llegar a simplificar significativamente el coste computacional de cálculo.

5. Ejemplos de aplicación

5.1. Variación de volumen

Sean ε_1 , ε_2 y ε_3 los autovalores de la matriz ε , la variación de volumen de un sólido puede determinarse mediante:

$$\frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (34)$$

5.2. Deformación en un punto

Para calcular el vector de deformación en un punto $\vec{x}_0 \in \Omega$ en una dirección unitaria con sentido definido \vec{n} , se puede calcular mediante:

$$\varepsilon_i^{\vec{n}} = \varepsilon_{ij} n_j \quad (35)$$

$$\vec{\varepsilon}^{\vec{n}} = \varepsilon \cdot \vec{n} \quad (36)$$

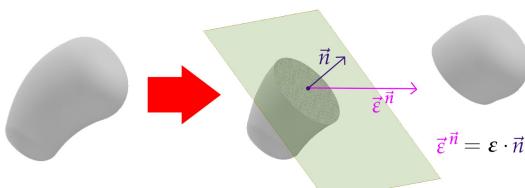


Figura 5: Vector deformación en un punto.

6. Conclusiones

Cuando se operan en cálculos con deformaciones (por ejemplo, en los muy extendidos elementos de métodos finitos), la simplificación a pequeñas deformaciones ahorra un coste computacional enorme que simplifica muchísimo la operación.

Sin embargo, cabe recordar que pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones no son lo mismo: un cable suficientemente largo suele presentar pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos mientras que una regla flexible suele presentar grandes deformaciones y pequeños desplazamientos.

Agradecimientos

Especial agradecimientos a todas aquellas personas que dedican su vida a hacer posible que otras personas dediquen su vida a la investigación.

Referencias

- [1]. Grinfeld, P. (2010). *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces* [doi:10.1007/978-1-4614-7867-6]. Springer.
- [2]. Oliver, X., & Agelet, C. (2017). *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems* [doi:10.13140/RG.2.2.25821.20961].
- [3]. Paris, F. (2000). *Teoría de la elasticidad*. Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales (Universidad de Sevilla).

A excepción de la Figura 3, el resto de imágenes fueron generadas desde cero hasta su completitud por los autores del artículo.



Pablo Fernández Hernández

- Doble Grado en Ingeniería Mecánica e Ingeniería de Exploración de Minas y Recursos Energéticos, 5º curso, UHU.
- Grado en Matemáticas, 2º curso, UNED.



Diego Casas Vega

- Grado en Ingeniería Mecánica, UHU.