

El criterio de Mohr-Coulomb y toboganes varios para un parque geomecánico

Miguel Algar García

Pablo Fernández Hernández

Resumen— El criterio de Mohr-Coulomb permite explicar cuándo un material decide portarse bien y permanecer en equilibrio, o cuándo prefiere hacer la croqueta y deslizar por un plano de fallo igual que un niño por un tobogán. A partir de esta analogía, se introduce la relación entre tensión normal, tensión tangencial, fricción y cohesión, mostrando cómo el deslizamiento entre partículas puede interpretarse mediante una condición resistente sencilla. Esta formulación, introducida mediante la imagen del tobogán, conduce al resto del parque geomecánico: el círculo de Mohr, la envolvente de rotura y otras herramientas clásicas para estudiar el fallo en suelos, rocas y otros materiales con más carácter que un niño atascado en un tobogán seco.

Palabras Clave— Mohr-Coulomb, círculo de Mohr, cohesión, fricción, suelos.

1. Introducción

Los toboganes en nuestra infancia han brillado por la ausencia de su funcionalidad; más de la mitad de las veces que uno se lanzaba por ellos se quedaba atascado a medio camino.

Esto hubiera sido ideal si el objetivo fuera quedarse en el sitio, en equilibrio. Sin embargo, nuestra meta era siempre el deslizamiento a través de él. La nuestra y la de cualquier niño.

Algunos toboganes otorgaban mejores resultados que otros: las superficies lisas eran evidentemente superiores a aquellas más rugosas y, en caso de estar cubiertas de agua, la diversión estaba asegurada. El agua creaba una lámina sobre la superficie del tobogán al estilo «efecto suelo de canicas».

En ciertos materiales (como hormigones, rocas naturales, suelos, etc) sucede exactamente esto, pero la intencionalidad es inversa: que no deslicen.

Sin embargo, se considera que existe un «tobogán» entre cada contacto de dos partículas. Pensando en esta idea, Charles-Augustin de Coulomb (el mismo que el de las cargas eléctricas) idealizó que estos materiales podrían fallar ante los deslizamientos entre las partículas que la componen y enunció un criterio de fallo.

Más tarde, el ingeniero alemán Christian Otto Mohr publicó su representación, mediante trigonometría, de cómo se comportaban los estados a los que los materiales se sometían a tensión mediante representaciones gráficas. Esta representación tensional podía anexarlo al criterio que años antes había pensado Coulomb. Consiguió así una herramienta que, para la época, fue revolucionaria: podía llegarse a una solución mediante intersecciones entre líneas y curvas sobre un papel.

De esta forma, el criterio se basa en algo tan sencillo como el esfuerzo necesario para que el deslizamiento comience de la misma forma que pudiéramos decir «¿bajo que condiciones si alguien se sube a ese tobogán deslizará o no deslizará?».

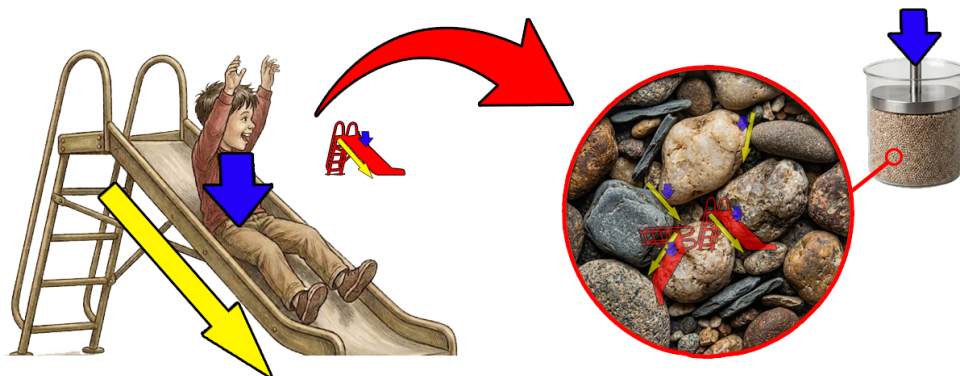


Figura 1: Analogía con el deslizamiento entre partículas, basada en una imagen de Lambe y Whitman (1969) (fuerzas en azul y desplazamientos en amarillo).

2. Contactos en el plano inclinado

En la Figura 1 puede observarse una analogía de como resbala un chico en un tobogán y el esfuerzo tangencial en un conjunto de partículas.

Es evidente que de esta forma, en suelo formado por partículas, se supondrán los infinitos planos que hay en el espacio y que pasan por un punto ya que al haber una cantidad exageradamente grande de partículas, se podrá asumir que se darán todos los ángulos de contacto por acumulación de probabilidades.

Estos contactos tienen siempre la misma forma: una fuerza esencialmente de compresión y otra tangencial. La compresión es poco importante ya que los granos de suelo tienen una tolerancia altísima a este tipo de fuerzas, ya que comprimir a compresión una partícula de suelo es relativamente difícil.

Sin embargo, si la fuerza original está muy **desviada** con respecto a la dirección en la cual se produce el contacto (más fuerza tangencial que de compresión), entonces la transmisión de la fuerza (en búsqueda del equilibrio) se realizará mediante fricción. Si la fricción no es suficiente para alcanzar el equilibrio, entonces los granos deslizarán entre sí.

En la Figura 2 puede observarse el contacto entre ellas y en la Figura 3 puede observarse dicho contacto de cerca.

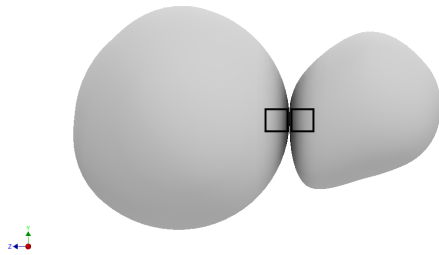


Figura 2: Contacto entre dos partículas.

Esta fuerza de fricción se caracteriza mediante un esfuerzo tangencial (en rojo en la Figura 3) y se trata como un problema de plano inclinado.

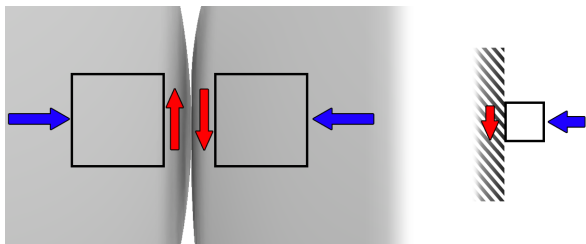


Figura 3: Dos partículas comprimidas en una dirección distinta a la perpendicular al contacto. Se toma a cada uno de estos cuadrados como un área tan pequeña que hace las veces de un punto en el plano.

Vamos a considerar (muy ideal) que el problema es resoluble en dos dimensiones de forma que todo vector de fuerza $\vec{F}$ puede descomponerse en

$$\vec{F} = F_n \vec{u}_n + F_s \vec{u}_s, \quad (1)$$

donde F_n es la fuerza correspondiente perpendicular al área donde se ejerce (su normal) y queda representada con una línea en dos dimensiones y F_s es la fuerza tangente al área donde se ejerce (su tangencial).

Al módulo de la fuerza $\vec{F}$, para simplificar notación, será $\|\vec{F}\| = F$,

$$\begin{aligned} F \cos(\phi) &= F_n \\ F \sin(\phi) &= F_s. \end{aligned} \quad (2)$$

En un plano inclinado (Fig. 4), la fuerza debe descomponerse como tal. Si marcamos el sistema de referencia con respecto al plano (como se resuelve clásicamente), obtendremos mediante diagrama del cuerpo libre, el equilibrio por la expresión:

$$\begin{aligned} F \cos(\phi) &= N \\ F \sin(\phi) - \mu N &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

donde N es la fuerza normal al plano que equilibra la carga en la compresión contra dicho plano (que permite que no lo atraviese) y μ es el coeficiente de fricción.

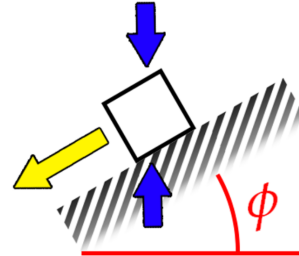


Figura 4: Problema del plano inclinado (fuerzas en azul y desplazamientos en amarillo).

Nótese que el deslizamiento comienza cuando $F \sin(\phi) - \mu N > 0$ y se produce entonces el movimiento representado con la flecha amarilla.

En tal caso, sustituyendo N por $F \cos(\phi)$:

$$F \sin(\phi) - \mu F \cos(\phi) > 0, \quad (4)$$

$$\mu > \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi). \quad (5)$$

Es decir, $\tan(\phi)$ es aquel coeficiente de fricción a partir del cual se delimita el deslizamiento.

Si se divide la Ec. (4) entre el área de contacto, y asumiendo que si $F_n = F \cos(\phi)$, entonces el esfuerzo perpendicular para dicha fuerza será $\sigma_n = F_n / A_c$ al igual que con el esfuerzo tangencial $\tau = F_s / A_c$:

$$\tau - \sigma_n \mu > 0. \quad (6)$$

Como sustituyendo $\mu = \tan(\phi)$ se está suponiendo el estado límite para a partir del cual se produce el deslizamiento, entonces,

$$\tau = \sigma_n \tan(\phi). \quad (7)$$

Resultados de ensayos para determinar la recta pueden visualizarse en la Figura 5. Así, el plano (σ_n, τ) se divide en dos:

$$\begin{cases} \tau > \sigma_n \tan(\phi), & \text{el material falla.} \\ \tau \leq \sigma_n \tan(\phi), & \text{el material no falla.} \end{cases} \quad (8)$$

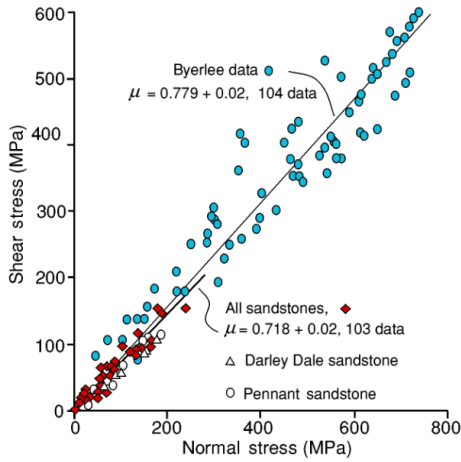


Figura 5: Compilación de resultados de resistencia en rocas por Hackston y Rutter (2016).

3. Un criterio empírico

Esta forma de asumir A_c como el área de contacto es muy idílica y carece de precisión, ya que hay granos más redondeados que facilitarían el deslizamiento o hay granos que poseen una geometría más robusta al contacto y dificultan el deslizamiento. Los geólogos, históricamente hablando, solucionaron este problema en suelos caracterizando cada tipo de suelo y clasificándolo según su textura porque no había tecnología suficiente como poder tratar cada material constituyente del suelo por separado y tratarlo como un conjunto, sino que directamente debían tratar a cada conjunto como un suelo diferente. Esto origina que el contacto sea diferente entre cada tipo de material.

Esto es, al ángulo ϕ se le denomina ángulo de rozamiento interno de un suelo o roca.

Esto funcionaba bastante bien porque las diferencias entre contactos se asumían en los valores de la fricción μ , lo que originó que esta laguna científica se la tragara el criterio al igualar

$$\mu = \tan(\phi). \quad (9)$$

El precio a pagar de esto fue que cada suelo posea un ángulo ϕ diferente y debía de tratarse empíricamente a cada suelo por separado, aunque en su composición dos geomateriales fueran similares.

4. Condición inicial

En muchas ocasiones, es necesario un problema de condición inicial porque suponer que un material que se somete a un criterio de fallo como la Ec. 7 es decir que si hay $\sigma_n = 0$, entonces directamente el material falla porque el criterio comienza en un punto $(0, 0)$ del plano (σ_n, τ) .

Esto es parcialmente cierto para algunas situaciones, como en arena suelta de playa, con la cual si montas un castillito de arena se viene abajo inmediatamente porque no tiene resistencia ninguna (el material estaría fallando). Sin embargo, por lógica, esto no sucede con otros materiales como el hormigón ya curado (ya que no se podría construir edificios).

Es necesario entonces el concepto de condición inicial en el criterio, siendo este una función $\tau_f(\sigma_n)$, donde debe darse el caso de que $\tau_f(0) = S_0$ siendo S_0 una resistencia inicial.

Históricamente S_0 se ha escrito como c y se ha denominado cohesión. A pesar de esto, la literatura moderna prefiere tomar a la cohesión, no tanto como un fenómeno físico-químico, sino como una condición inicial para el criterio de Mohr-Coulomb (Jaeger et al., 2007; Labuz y Zang, 2012).

El criterio entonces puede resumirse como una función $\tau_f = g(\sigma_n)$ cuyas condiciones iniciales son:

$$\tau_f'(\sigma_n) = \tan(\phi) \quad , \quad \tau_f(0) = S_0 \stackrel{\text{not}}{=} c, \quad (10)$$

por lo que cuya forma lineal es

$$\tau_f = \sigma_n \tan(\phi) + S_0. \quad (11)$$

5. Tensiones y círculo de Mohr

El concepto de estado tensional permite representar los vectores de tensión $\vec{p}$ en un punto mediante una entidad matemática que no depende explícitamente de $\vec{n}$, el vector normal al plano, para cada uno de los dichos planos.

El vector de tensión $\vec{p}$ que actúa sobre un punto $\vec{x}$ de un sólido (donde se supone el contacto, Fig. 6), en un plano de normal unitaria $\vec{n}$, depende únicamente de ambos:

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{x}, \vec{n}) \quad (12)$$

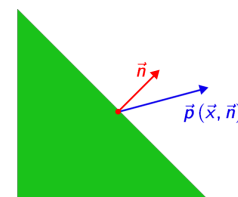


Figura 6: Representación de $\vec{p}$ y $\vec{n}$ en un punto.

Para obtener una expresión más manejable, se recurre a una forma conocida como el tetraedro de Cauchy: un elemento infinitesimal con tres caras alineadas con los ejes coordenados y una cuarta cara oblicua de normal $\vec{n}$.

El equilibrio de fuerzas, en su equilibrio, sobre dicho tetraedro (Fig. 7) exige que:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0. \quad (13)$$

Las fuerzas en cada cara son proporcionales al área proyectada sobre la dirección correspondiente:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= h \cdot w \cdot n_x \cdot \vec{p}(-\vec{e}_x) \\ \vec{F}_2 &= h \cdot w \cdot n_y \cdot \vec{p}(-\vec{e}_y) \\ \vec{F}_3 &= h \cdot w \cdot \vec{p}(\vec{n}) \end{aligned} \quad (14)$$

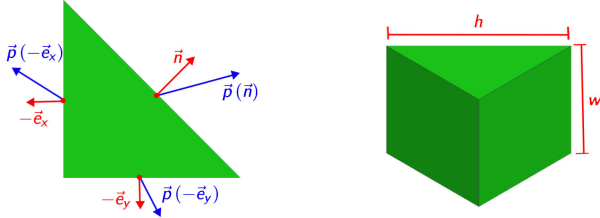


Figura 7: Estado tensional en $\mathbb{R}^2$.

Sustituyendo en la condición de equilibrio y simplificando el factor común hw :

$$n_x \cdot \vec{p}(-\vec{e}_x) + n_y \cdot \vec{p}(-\vec{e}_y) + \vec{p}(\vec{n}) = 0 \quad (15)$$

$$\vec{p}(\vec{n}) = -(n_x \cdot \vec{p}(-\vec{e}_x) + n_y \cdot \vec{p}(-\vec{e}_y)) \quad (16)$$

Aplicando la tercera ley de Newton los signos negativos se eliminan ($-\vec{p}(-\vec{e}) = \vec{p}(\vec{e})$) de la forma

$$\vec{p}(\vec{n}) = n_x \cdot \vec{p}(\vec{e}_x) + n_y \cdot \vec{p}(\vec{e}_y). \quad (17)$$

Entonces, $\vec{p}(\vec{n})$ queda expresado como combinación de los vectores de tensión sobre los ejes. Basta entonces con conocer $\vec{p}(\vec{e}_x)$ y $\vec{p}(\vec{e}_y)$ para determinar la tensión en **cualquier** dirección.

Se denominan sus componentes:

$$\vec{p}(\vec{e}_x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} ; \quad \vec{p}(\vec{e}_y) = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Con lo que la expresión anterior se puede escribir totalmente como un producto de una matriz y un vector,

$$\vec{p}(\vec{n}) = n_x \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + n_y \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\vec{p}(\vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}. \quad (20)$$

De esta forma, queda la expresión definitiva del vector $\vec{p}$ como

$$\vec{p} = [\sigma]^T \vec{n}. \quad (21)$$

La transposición ($[\sigma]^T$) aparece porque se escribe esta forma matricial de tensiones como:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

pero, como exactamente $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ debido a que de otra forma, el tetraedro estaría rotando sobre el eje perpendicular al plano en la Fig. 7, entonces la matriz queda simétrica y

$$\vec{p} = [\sigma] \vec{n}. \quad (23)$$

La matriz $[\sigma]$ se denomina en la literatura como tensor de tensiones de Cauchy (y esto es importante porque en mecánica más avanzada existen tensores de tensiones muy usados que no son el de Cauchy).

Así, σ_n puede concebirse como la parte de $\vec{p}$ que es perpendicular al plano. Como $\vec{n}$ es unitario, puede estimarse

$$\sigma_n = \vec{n}^T \vec{p} = \vec{n}^T [\sigma] \vec{n}. \quad (24)$$

En dos dimensiones, es fácil estimar un vector $\vec{s}$ unitario perpendicular a $\vec{n}$. Esto no ocurre ni por asomo en tres dimensiones, donde la situación se complica. Así, estimamos,

$$\tau = \vec{s}^T \vec{p} = \vec{s}^T [\sigma] \vec{n}, \quad (25)$$

donde, si $\vec{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$, entonces $\vec{s} = (\sin(\theta), -\cos(\theta))^T$ ya que $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, siendo ambos vectores unitarios.

Así, desarrollando, la forma que tienen σ_n y τ es:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) \quad (26)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) - \sigma_{xy} \cos(2\theta) \quad (27)$$

Las cuales son las ecuaciones, en el plano (σ_n, τ) , de una circunferencia de radio $R = |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|/2$ y centro en $\sigma_n = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$. Puede verse, junto con la envolvente del criterio, en la Figura 8.

Esto tiene bastante sentido ya que las tensiones van rotando a medida que rota la orientación del punto, de forma que el valor de $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ siempre se mantiene constante para dos descripciones diferentes de un mismo estado tensional.

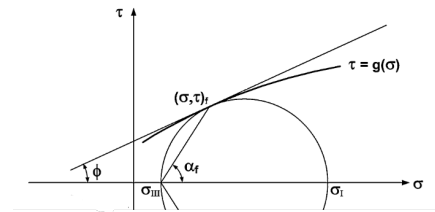


Figura 8: Círculo de Mohr y envolvente de Mohr-Coulomb por Labuz y Zang (2012)

6. Tensión hidrostática

Imagina que cuando uno quiera tirarse del tobogán, las fuerzas existentes fueran tales que le agarrasen de todos lados por igual. Es evidente que se va a bloquear y no va a haber deslizamiento.

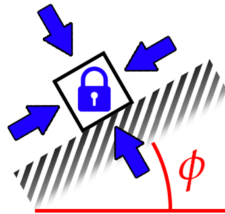


Figura 9: Tensión hidrostática (fuerzas en azul).

Esta forma de bloqueo son las fuerzas que no se desvían originalmente con respecto a la dirección del contacto y confunden el criterio de deslizamiento porque no aportan. De hecho, estas fuerzas son, sobre las cuales, a modo de esfuerzo, el estado tensional gira y corresponde a la suma $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$.

Se le llama tensión «hidrostática» porque se le asocia usualmente con la tensión que produce un fluido, como agua, sobre un objeto sumergido cuando el fluido está en reposo (estáticamente), pero no es necesaria la aparición de agua para dicho estado, solo una fuerza que actúe en todas las direcciones como para bloquear el deslizamiento al contacto como ocurre en la Fig. 9. También se puede denominar tensión esférica $[\sigma^{\text{esf}}]$ y sus valores son siempre proporcionales a $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$.

Así, la tensión efectiva $[\sigma^{\text{des}}]$ o desviadora es aquella que sí ayuda al efecto del deslizamiento y es la que resulta de quitar a la tensión total su parte hidrostática:

$$[\sigma] = [\sigma^{\text{esf}}] + [\sigma^{\text{des}}]. \quad (28)$$

Cuando una roca o suelo que está sometida a una carga de compresión posee algún fluido, como agua en sus poros (sin entrar en posibles efectos químicos), el sistema mecánico que resiste esa carga es un conjunto de ambos. Sucede que como el agua en el geomaterial, en estado de reposo, solo puede trabajar con presiones hidrostáticas, toda la carga que va asumiendo dicho fluido (u) va destinado a ser de esta forma, quitando esa tensión hidrostática que pudiera estar soportando el geomaterial.

Es decir, el agua absorbe esa fuerza que ayuda a bloquear las fuerzas en todas las direcciones, motivando así al suelo a deslizarse. En estas condiciones, la verdadera responsable del fallo no sería la tensión generada por la carga ($[\sigma]$), sino aquella que el agua no le resta al geomaterial ($[\sigma']$). Esto es conocido como el principio de Terzaghi.

7. Conclusiones

Como primera aproximación, el criterio de Mohr-Coulomb es suficientemente bueno, quizás debido a su naturaleza empírica. Sin embargo, trabaja en dos dimensiones en problemas que realmente son tridimensionales y a veces esto provoca problemas serios.

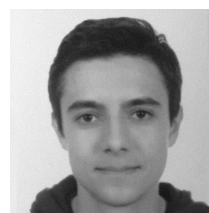
Su forma en tres dimensiones se ajusta bien a los resultados de los ensayos, pero ofrece problemas en la convergencia de las soluciones en elementos finitos como consecuencia de ser la extrapolación de un planteamiento sencillo en dos dimensiones. Esto también ocurre con otros criterios como el de Tresca. A día de hoy existen alternativas más modernas que solucionan satisfactoriamente este inconveniente (Liu et al., 2024).

Además, a veces se cometen ciertos abusos de este criterio, como cuando se aplica en ciertas arcillas del estilo «quick clays».

Nota: A menos que se indique lo contrario, todas las figuras fueron generadas desde cero por los autores del artículo.

Referencias

- Lambe, T. W. and Whitman, R. V. *Soil Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1969. ISBN 978-0-471-51192-2.
- Jaeger, J. C., Cook, N. G. W. and Zimmerman, R. W. *Fundamentals of Rock Mechanics*. 4th ed. Malden, MA: Wiley-Blackwell, 2007. ISBN 978-0-632-05759-7.
- Labuz, J. F. and Zang, A. *Mohr-Coulomb Failure Criterion*. Rock Mechanics and Rock Engineering, 45:975–979, 2012. doi: 10.1007/s00603-012-0281-7.
- Hackston, A. and Rutter, E. *The Mohr-Coulomb criterion for intact rock strength and friction: a re-evaluation and consideration of failure under polyaxial stresses*. Solid Earth, 7:493–508, 2016. doi: 10.5194/se-7-493-2016.
- Liu, J., Li, X., Xiao, J., Xie, Y. and Xia, K. *Three-dimensional strength criterion for rocks: A review*. Energy Reviews, 3:100102, 2024. doi: 10.1016/j.enrev.2024.100102.



Miguel Algar García

- Doble Grado en Ingeniería Mecánica e Ingeniería de Explotación de Minas y Recursos Energéticos, 3º curso, Universidad de Huelva (UHU).



Pablo Fernández Hernández

- Máster en Ingeniería Geotécnica, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).